PROBLEMAS

DE

MATEMÁTICAS

Ubaldo Usunáriz Balanzategui
Ignacio Usunáriz Sala

ÍNDICE

PRÓLOGO

Este libro, *Problemas de Matemáticas*, junto con otros dos, *Problemas de Geometría* y *Problemas de Geometría Analítica y Diferencial*, están dedicados a la presentación y resolución de problemas que se planteaban hace unas décadas, en la preparación para ingreso en las carreras de ingeniería técnica superior.

Incluye 1578 problemas, de los que 848 se refieren al Álgebra (operaciones algebraicas, divisibilidad, combinatoria, determinantes, ecuaciones e inecuaciones, fracciones continuas, números complejos, límites, sucesiones y series, y algunos sobre vectores y mecánica), 175 a la Trigonometría (plana y esférica), 282 al Cálculo diferencial (funciones de una variable, y de dos o más variables), 246 al Cálculo integral (integrales, integrales definidas, integrales en el campo de dos o más variables y ecuaciones diferenciales) y 27 a la Estadística.

Esta tercera edición de *Problemas de Matemáticas* tiene por objeto su puesta a disposición de la Escuela de Ingenieros de Minas de la Universidad Politécnica de Madrid.

Madrid, verano 2012

Problemas de Álgebra

Sección A -   OPERACIONES

A 1- Simplificar todo lo posible, la siguiente expresión: $\dfrac{a^4+ab^3-a^3b-b^4}{a^2-b^2}$.

Solución: a^2-ab-b^2.

A 2- Simplificar todo lo posible, la siguiente expresión: $\dfrac{2a^2(6b-7a)-3b^2(3a-b)+(3a-2b)(5a^2+ab+2b^2)}{a^2-b^2}$, y hallar su verdadero valor para $a=b=2$.

Solución: $\dfrac{a^2+6ab+b^2}{a+b}$. Sustituyendo a y b por 2, se obtiene 8.

A 3- Simplificar la expresión: $\dfrac{a}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{b}{(c-b)(a-b)}+\dfrac{c}{(a-c)(b-c)}$.

Solución: $\dfrac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\dfrac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$.

A 4- Simplificar la expresión: $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-5x+6}$.

Solución: $x-1$.

A 5- Hallar el valor exacto de la expresión $\sqrt{\left(1-\dfrac{426}{697}+2\frac{1}{2}\right):\dfrac{3\frac{1}{2}}{5\frac{1}{8}}}$.

Solución: $\dfrac{\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{426}{697}}}{\sqrt{\frac{7}{2}:\frac{41}{8}}}=\dfrac{\sqrt{\frac{4879-852}{1394}}}{\sqrt{\frac{56}{82}}}=\sqrt{\dfrac{4027x82}{1394x56}}=\sqrt{\dfrac{4027}{4x17x14}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4027}{238}}$.

A 6- Simplificar lo más posible, la siguiente expresión:
$\dfrac{a^2(2a+1)+b^2(3b-1)-ab(a-4b)}{a^2-2ab+b^2}+\dfrac{a(1-b-2a)+b(3b-1)}{a-b}$.

Solución:
$\dfrac{2a^3+a^2+3b^3-b^2-a^2b+4ab^2+(a-b)(a-ab-2a^2+3b^2-b)}{(a-b)^2}=\dfrac{2a^2+8ab^2-2ab}{(a-b)^2}$.

A 7- Hallar el valor del producto $P=(1-ax)(1+ax)^{-1}(1+bx)^{\frac{1}{2}}(1-bx)^{-\frac{1}{2}}$, para $x=a^{-1}\left(\dfrac{2a}{b}-1\right)^{\frac{1}{2}}$.

Solución: Sustituyendo el valor de x, se obtiene $P=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{2}\,a-\sqrt{2}\,b\right)^2}{\left(\sqrt{2}\,a-\sqrt{2}\,b\right)^2}}=\pm1$.

A 8- Hallar el valor más simplificado, racionalizando el resultado, de $\sqrt[3]{\dfrac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}$.

Solución: $\sqrt[3]{\dfrac{\left(9-5\sqrt{3}\right)^2}{81-75}} = \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3} = 2-\sqrt{3}$.

A 9- Hallar el valor más simplificado, racionalizando el resultado, de: $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Solución: $\dfrac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}+\dfrac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{6-2} = \sqrt{5}+\sqrt{6}$.

A 10- Demostrar que $\dfrac{[(a+b)(a+c)+2a(b+c)]^2-(a-b)^2(a-c)^2}{a} = 8(b+c)(c+a)(a+b)$.

Solución: Operando el numerador y dividiéndolo por a, se obtiene el segundo miembro de la igualdad.

A 11- Hallar el valor exacto de la expresión $\sqrt[4]{23,5+10,5\sqrt{5}}+\sqrt[4]{23,5-10,5\sqrt{5}}$.

Solución: $\sqrt[4]{\dfrac{\left(7+3\sqrt{5}\right)^2}{2^2}}+\sqrt[4]{\dfrac{\left(7-3\sqrt{5}\right)^2}{2^2}} = \sqrt{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}}+\sqrt{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\dfrac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{4}}+$
$+\sqrt{\dfrac{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}{4}} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = 3$.

A 12- Hallar el valor exacto de la expresión $\dfrac{4,\widehat{5}+2,\widehat{7}+0,45\widehat{3}}{0,54\widehat{6}+0,\widehat{7}+0,02\widehat{6}}$.

Solución: $\dfrac{\frac{41}{9}+\frac{25}{9}+\frac{408}{900}}{\frac{492}{900}+\frac{7}{9}+\frac{24}{900}} = \dfrac{4100+2500+408}{492+700+24} = \dfrac{7008}{1216} = \dfrac{219}{38}$.

A 13- Simplificar la expresión: $\dfrac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$.

Solución: $a^2\left(1+\dfrac{2a(b+c)}{(a-b)(a-c)}\right)+b^2\left(1+\dfrac{2b(a+c)}{(b-c)(b-a)}\right)+c^2\left(1+\dfrac{2c(a+b)}{(c-a)(c-b)}\right) =$
$= a^2+b^2+c^2+\dfrac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) =$
$= (a+b+c)^2$.

A 14- Sabiendo que $Ax+By+Cz=0$, simplificar $\dfrac{Ax^2+By^2+Cz^2}{BC(y-z)^2+CA(z-x)^2+AB(x-y)^2}$.

Solución: Sumando al denominador $(Ax+By+Cz)^2$, cuyo valor es 0, el denominador queda como sigue: $(A+B+C)(Ax^2+By^2+Cz^2)$. Por tanto la expresión dada vale $\dfrac{1}{A+B+C}$.

A 15- Simplificar $\dfrac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$.

Solución: $\dfrac{(ab+bc+ca)[a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)]}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)} = ab+bc+ca$.

A 16- Sabiendo que $a+b+c=0$, calcular el valor de la expresión
$\left(\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}\right)\left(\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}\right)$.

Solución: $1+\dfrac{b(b-c)}{a(c-a)}+\dfrac{c(b-c)}{a(a-b)}+\dfrac{a(c-a)}{b(b-c)}+1+\dfrac{c(c-a)}{b(a-b)}+\dfrac{a(a-b)}{c(b-c)}+\dfrac{b(a-b)}{c(c-a)}+1 =$
$= 3+\dfrac{1}{abc}\left[(a+b+c)^3-4(a+b+c)(ab+bc+ca)+12abc-6abc\right] = 3+\dfrac{6abc}{abc} = 9$.

A 17- Escribir en forma de diferencia de cuadrados, la expresión $8(2x+1)$.

Solución: $a^2 - b^2 = 8(2x+1)$. Haciendo $a+b=8$, $a-b=2x+1$, se tiene, resolviendo el sistema, que: $a = x+\frac{9}{2}$, $b = -x+\frac{7}{2}$. Luego la solución es $\left(x+\frac{9}{2}\right)^2 - \left(-x+\frac{7}{2}\right)^2$.

A 18- Simplificar la expresión $\dfrac{(x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^4+y^4+z^4)}{(x+y)^2 - z^2}$.

Solución: $\dfrac{\left[(x+y)^2 - z^2\right]\left[z^2-(x-y)^2\right]}{(x+y)^2-z^2} = z^2-(x-y)^2 = (z+x-y)(z-x+y)$.

A 19- Hallar el valor más simplificado posible de $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$.

Solución: Elevando al cuadrado, operando, simplificando y extrayendo la raíz cuadrada:

$$\sqrt{\frac{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}-2\sqrt{\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}} =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}} = \sqrt{2}.$$

A 20- Sabiendo que: $\dfrac{b-c}{y-z}+\dfrac{c-a}{z-x}+\dfrac{a-b}{x-y}=0$, hallar el valor de la siguiente expresión: $(b-c)(y-z)^2+(c-a)(z-x)^2+(a-b)(x-y)^2$.

Solución: Desarrollando la expresión dada se tiene: $(c-b)x^2+(a-c)y^2+(b-a)z^2 - 2(a-b)xy-2(b-c)yz-2(c-a)zx$. Esta expresión es igual al numerador resultante de la suma de los tres quebrados del enunciado, que es: $(b-c)(z-x)(x-y)+(c-a)(y-z)(x-y)+ (a-b)(y-z)(z-x)$, que es cero. Por tanto el valor pedido es 0.

A 21- Tres jugadores convienen que el que pierda cada partida doblará el dinero que tienen los otros dos. Cada uno pierde una partida y todos se retiran con la misma cantidad a de dinero. ¿Cuánto dinero tenía cada uno al empezar?

Solución: Sean los tres jugadores A, B y C; en el cuadro siguiente se exponen los movimientos de dinero desde la última partida hasta la primera (se supone que pierden en el orden A, B, C):

	A	B	C
Al acabar de jugar	a	a	a
Cantidades que reparte C, tras perder	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$-a$
Situación antes de perder C	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$2a$
Cantidades que reparte B, tras perder	$\frac{a}{4}$	$-\frac{5a}{4}$	a
Situación antes de perder B	$\frac{a}{4}$	$\frac{7a}{4}$	a
Cantidades que reparte A, tras perder	$-\frac{11a}{8}$	$\frac{7a}{8}$	$\frac{a}{2}$
Situación inicial	$\frac{13a}{8}$	$\frac{7a}{8}$	$\frac{a}{2}$

A 22- Obtener con la calculadora el valor de $x = \sqrt[0,2635]{\dfrac{e^{4,7589}\times 273,956}{0,0358267}}$.

Solución: $x = 3,815473668\times 10^{22}$.

A 23- Obtener con la calculadora el valor de x en la expresión:

$\left(\sqrt[0,4]{5,72}\; anti\log \log_5 43\right)^x = 3658 \times 0,00306.$

Solución: $x = 0,247956.$

A 24- Obtener con la calculadora el valor de $x = \log_n \log_m \log_p 135.000$, siendo: $n = \sqrt{2}$, $m = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{4}$.

Solución: $x = 4,7360173.$

A 25- Obtener con la calculadora el valor de $x = \log_n \dfrac{\ln 892}{\log_2 892}$, siendo $n = \sqrt[3]{100}$.

Solución: $x = -0,2387618085.$

A 26- Obtener con la calculadora el valor de $x = \ln \sqrt[3,49]{2,58945^{\log 2}}$.

Solución: $x = 0,0820669439.$

A 27- Obtener con la calculadora el valor de x en la expresión:
$2,49^x \times 3,58^{2x} \times 5,12^{3x} = 0,45 \times 25,3^2 \times 65,8^{1,8}.$

Solución: Tomando logaritmos se tiene: $x\log 2,49 + 2x\log 3,58 + 3x\log 5,12 =$
$= \log 0,45 + 2\log 25,3 + 1,8\log 65,8$. De donde, $x = 1,5783631.$

A 28- Obtener con la calculadora el valor de $x = \left(\dfrac{0,0456782 \times 11,24998}{2,48049}\right)^{\ln 515}$.

Solución: $x = 0,000053828.$

A 29- Calcular en grados, minutos y segundos sexagesimales, los siguientes valores expresados en radianes: a) 0,000461; b) 0,0036; c) 416; d) 0,0017; e) 0,0021; f) 1,93.

Solución: Como π radianes equivalen a 180º, se tiene: a) 1´35´´088; b) 12´22´´5533; c) 23.835º2´39´´408; d) 5´50´´65; e) 7´13´´156; f) 110º34´51´´076.

A 30- Calcular en radianes, los siguientes valores en grados, minutos y segundos sexagesimales: a) 2º26´; b) 17´; c) 15´´; d) 73º11´; e) 5´38´´; f) 129¨8; g) 435º45´; h) 35´25´´; i) 0´´23.

Solución: a) 0,042469678; b) 0,0049451; c) 0,000072722; d) 1,277290124; e) 0,00163867; f) 0,000629288; g) 7,605272 ; h) 0,010302291; i) 0,000001115.

A 31- Obtener con la calculadora el valor de $x = (\sin 0,25 + \sin 0,75)(\cos 0,45 + \cos 0,95)$.

Solución: $x = 1,37696226.$

A 32- Demostrar que para todo valor de n par, se verifica: $n! < \left(\dfrac{n}{2} + 1\right)^n$.

Solución: Haciendo $n = 2m$, se tiene $(2m)! < (m+1)^{2m}$, que se cumple para $m = 1$, $m = 2$, etc. Suponiendo que se cumple para m, hay que demostrar que se cumple para $m+1$. Es decir: $(2m+2)! < (m+2)^{2m+2}$. Como $(2m+2)! = (2m+2)(2m+1)(2m)! < (2m+2)(2m+2)(2m)! <$ $< (2m+2)^2(m+1)^{2m} = \left[2(m+1)^{m+1}\right]^2$, se tiene que $(2m+2)! < \left[2(m+1)^{m+1}\right]^2$. Como $(m+2)^{2m+2} = \left[[(m+1)+1]^{m+1}\right]^2 = \left[(m+1)^{m+1} + \binom{m+1}{1}(m+1)^m + \cdots\right]^2 =$
$= \left[(m+1)^{m+1} + (m+1)^{m+1} + \cdots\right]^2 = \left[2(m+1)^{m+1} + \cdots\right]^2$, de donde se deduce que: $(m+2)^{2m+2} > \left[2(m+1)^{m+1}\right]^2$. De todo ello se obtienen las siguientes desigualdades: $(2m+2)! < \left[2(m+1)^{m+1}\right]^2 < (m+2)^{2m+2}$, con lo que el enunciado queda demostrado.

A 33- Obtener con la calculadora el valor de $x = \sin(\cos 15º) \times \cos(\sin 15º)$.

Solución: $x = 0,7951781364.$

A 34- Obtener con la calculadora el valor de $x = \tan\left(\sqrt[\log 2]{3}\ \sin 1º12´14´´\right)$.

Solución: $x = 1,046190628$.

A 35- Obtener con la calculadora el valor de $x = \left(\sqrt[3]{\tan 75º20´}\right)^{\sin 15º}$.

Solución: $x = 1,783920965$.

A 36- Obtener con la calculadora el valor de $x = (\cot 725´ \times \sin 142´)^{\sin 32´}$.

Solución: $x = 0,9847989068$.

A 37- Obtener con la calculadora el valor de $x = \left(\dfrac{\sin 37º43´12´´7 \times \tan 15º3´´25}{\cos 2º45´ \times \cot 2º16´3´´21}\right)^{\sin 15´20´´45}$.

Solución: $x = 0,977777357$.

A 38- Obtener con la calculadora el valor de $x = 0,41 \times 396 \times 0,00082 \times 61,5 \times \pi \times 0,012$.

Solución: $x = 0,3086733458$.

A 39- Obtener con la calculadora el valor de $x = 758 \times e \times 0,52 \times 46,5 \times 0,0031 \times 63$.

Solución: $x = 9730,21031$.

A 40- Obtener con la calculadora el valor de $x = \dfrac{0,27 \times 321 \times 69,5 \times 0,048}{423 \times 0,062 \times 93,4}$.

Solución: $x = 0,1180363864$.

A 41- Obtener con la calculadora el valor de $x = \dfrac{\pi \times 0.026 \times 71,4 \times 43,8}{0,0045 \times 62 \times 0,792}$.

Solución: $x = 1156,022157$.

A 42- Obtener con la calculadora el valor de $x = \dfrac{a^3.b^2.c^{\frac{3}{2}}.s}{d^{\frac{2}{3}}.\sqrt[3]{e}.f}$, siendo $a = \dfrac{0,0036}{0,83}$, $b = \sqrt[4]{396}$, $c = 7,52$, $d = \sqrt{85,3}$, $e = 0,00497$, $f = (19,5)^3$, $s =$área de un círculo de diámetro $7,12$.

Solución: $x = 0,0000002393454308$.

A 43- Obtener con la calculadora el valor de $x = \dfrac{\sin 79º15´ \times \tan 26´50´´}{(\log \pi)^3}$.

Solución: $x = 0,06241057704$.

A 44- Obtener con la calculadora el valor de $x = \dfrac{(\arctan 2,5)^2 \times (\sec 27º40´)^3}{\sqrt{\log_{8,6} 72}}$.

Solución: $x = 1,446582323$.

A 45- Obtener con la calculadora el valor de $x = \dfrac{\log_{0,27} 79 \times 9,3^{\frac{7,2}{5,3}}}{\tan 72º11´ \times \sqrt[3]{3890}}$.

Solución: $x = -1,410678602$.

A 46- Obtener con la calculadora el valor de $x = \dfrac{\sqrt[7]{43^5} \times e^{0,26}}{7,8^{\pi}}$.

Solución: $x = 0,02999728145$.

A 47- Obtener con la calculadora el valor de $x = \sqrt{\dfrac{\sin 15º.\cos 25º.\tan 62º.\cot 12º}{\sin 6º30´.\cot 15º10´}}$.

Solución: $x = 2,229319787$.

A 48- Obtener con la calculadora el valor de $x = \dfrac{356.\tan 0,5.\arcsin 0,7}{0,24\cos 94º56´}$.

Solución: $x = -418.637,2705$.

A 49- Obtener con la calculadora el valor de $x = \dfrac{\log_{5,2}328 \times 7,18^{3,26}}{\pi \times 0,32 \times \sqrt[5,8]{719}}$.

Solución: $x = 694,8645938$.

A 50- Obtener con la calculadora el valor de $x = \dfrac{\ln 232 \times e^{0,28}}{2,05^{100}}$.

Solución: $x = 4,8123.10^{-31}$.

A 51- Sabiendo que $\dfrac{a}{b-c} + \dfrac{b}{c-a} + \dfrac{c}{a-b} = 0$, y que $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, hallar el valor de $A = \dfrac{a}{(b-c)^2} + \dfrac{b}{(c-a)^2} + \dfrac{c}{(a-b)^2}$.

Solución: Sustituyendo en A el valor de $\dfrac{a}{b-c}$ obtenido de la condición inicial, así como el de $\dfrac{b}{c-a}$ y el de $\dfrac{c}{a-b}$, se tiene: $A = \dfrac{\dfrac{b}{c-a} + \dfrac{c}{a-b}}{-b+c} + \dfrac{\dfrac{c}{a-b} + \dfrac{a}{b-c}}{-c+a} + \dfrac{\dfrac{a}{b-c} + \dfrac{b}{c-a}}{-a+b} \ldots =$

$$= \frac{b(b-a) + c(a-c) + c(c-b) + a(b-a) + a(c-a) + b(b-c)}{(-b+c)(-c+a)(-a+b)} =$$

$$= \frac{(b-a)(a+b) + (a-c)(a+c) + (c-b)(c+b)}{(a-b)(c-a)(c-b)} = 0.$$

A 52- En Italia y en la guerra de 1914-1918, se descubre el cadáver de un soldado francés muerto en una guerra anterior en el mismo mes en que fue descubierto. Siendo n el número de días de dicho mes, $2a$ el de años transcurridos desde su muerte hasta la fecha de su descubrimiento, y $2b$ la edad del general que mandaba al soldado muerto, se sabe que: $n \cdot a \cdot b = 64.438$. Averiguar el año del fallecimiento, el mes en que falleció y la edad del citado general.

Solución: $64438 = 2 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 101$. El número de días del mes sólo puede ser 29, lo que determina el mes de febrero de un año bisiesto, que sólo puede ser 1916. La edad del general puede ser 22 ó 44. El número de años transcurridos puede ser, respectivamente, 404 ó 202. Luego la solución buscada es: año de fallecimiento, 1714; mes en que falleció, febrero; edad, 44 años. No parece probable que el general tuviera 22 años, lo que daría 1512 como año del fallecimiento del soldado.

A 53- En la fabricación de una mezcla entra un 15% de un material cuyo precio es de 1,25 € el kg, un 35% de otro material de 2,5 € el kg, y el restante 50% de un tercer material de 3,5 € el kg. En la fabricación se produce un 5% de mermas. ¿A cuánto ha de venderse el kg de la mezcla, para ganar un 20%?

Solución: $\dfrac{(0,15 \cdot 1,25) + (0,35 \cdot 2,5) + (0,5 \cdot 3,5)}{0,95} \times 1,2 = \dfrac{135}{38} = 3,5526$ €/kg.

A 54- Encontrar un número de cuatro cifras que sea cuadrado perfecto y que la suma de sus cifras sea igual al número obtenido invirtiendo las cifras de su raíz cuadrada.

Solución: El número está comprendido entre 1000 y 9999; más concretamente, como $\sqrt{1000} = 31,6$ y $\sqrt{9999} = 99,99$, estará comprendido entre 32^2 y 99^2, es decir, entre 1024 y 9801. La suma de las cuatro cifras estará entre un mínimo de 2 para 1100 y un máximo de 34 para 9799. Luego la última cifra de la raíz cuadrada será $0, 1, 2, 3$. Si acaba en 0, su cuadrado termina en 00, por lo que la suma de sus cuatro cifras será ≤ 18. Tanteando entre $40, 50, 60, 70, 80, 90$, sólo existe como solución el número 8100. Si acaba en 1, al tantear entre $41, 51, 61, 71, 81, 91$, sólo existen como solución los números 6561 y 8281. No se encuentran soluciones para las raíces cuadradas que acaban en 2 y 3. Luego las soluciones son: $6561, 8100, 8281$.

A 55- Se somete a laminación un lingote de hierro de 1,20 m de largo y de sección cuadrada. En una primera pasada se convierte en chapa rectangular de $80\,\text{mm}$ de espesor, $1\,\text{m}$ de largo y $1,5\,\text{m}$ de ancho. En la cuarta pasada, el espesor es de $44\,\text{mm}$ y la anchura de $1,515\,\text{m}$. En la décima pasada, respectivamente, $13\,\text{mm}$ y $1,545\,\text{m}$. En la decimotercera y última pasada, $10\,\text{mm}$ y $1,55\,\text{m}$. Encontrar la longitud de la chapa en cada una de las citadas pasadas y el lado de la sección inicial del lingote.

Solución:

Pasada	Longitud (m)	Anchura (m)	Espesor (m)	Sección (m^2)	Volumen (m^3)
13ª	$7,7419$	$1,55$	$0,010$	$0,0155$	$0,12$
10ª	$5,9746$	$1,545$	$0,013$	$0,020085$	$0,12$
4ª	$1,8$	$1,515$	$0,044$	$0,06666$	$0,12$
1ª	$1,0$	$1,5$	$0,08$	$0,12$	$0,12$
Inicialmente	$1,2$	$0,3162$	$0,3162$	$0,1$	$0,12$

En la tabla se indican las longitudes tras cada pasada. El lado de la sección inicial es $\sqrt{0.1} = 0,3162\,\text{m}$.

A 56- Determinar un número de n cifras tal que su producto por 4 se escriba con las mismas cifras, pero en orden inverso.

Solución: El número buscado sólo puede comenzar por 2, pues si lo hiciera por 1, su producto al multiplicarlo por 4, no puede terminar en 1, y si comenzara por 3, o cifra mayor, al multiplicarlo por 4, el producto tendría más de n cifras. El producto, por tanto, termina en 2, y para que sea $\dot{4}$, ha de terminar en $12, 32, 52, 72, 92$. Pero como el número pedido no puede comenzar por $25, 27$, ó 29, pues su producto por 4 tendría más de n cifras, sólo puede comenzar por 21 o por 23. Evidentemente, no hay solución para $n = 1$, ni para $n = 2$. Para $n = 3$, tampoco hay solución, pues $218 \times 4 \neq 812$, y $239 \times 4 \neq 932$. Para $n = 4$, la solución es 2178, que se obtiene resolviendo la ecuación $4 \cdot 21a8 = 9a12$, es decir, $4(2108 + 10a) = 8012 + 100a$. No hay solución para $23a9$, pues la ecuación $4(2309 + 10a) = 9032 + 100a$, no admite solución entera. Para $n = 5$, partiendo del número 2178, se tiene la ecuación $4 \cdot 21a78 = 87a12$, es decir, $4(21078 + 100a) =$ $= 87012 + 100a$, cuya solución es $a = 9$. El número buscado es 21978. Procediendo similarmente para el caso de n cifras, el número buscado es $21\underbrace{99\ldots99}_{n-4\text{ nueves}}78$, pues $4 \cdot 2199\ldots9978 = 8799\ldots9912$.

A 57- Escribir todos los números enteros en orden natural como si fueran un solo número. Hallar la cifra que ocuparía el lugar 18375.

Solución: Hay 9 números de 1 cifra que ocupan 9 lugares. Hay 90 números de 2 cifras que ocupan 180 lugares. Hay 900 números de 3 cifras que ocupan 2700 lugares. Hay 9000 números de 4 cifras que ocupan 36000 lugares. Los primeros 9999 números ocupan 38.889 lugares. El número dado ha de ser de 4 cifras. Los números de 1, 2 y 3 cifras ocupan 2.889 lugares, luego la cifra pedida ocupará el lugar $18375 - 2889 = 15486$ de las de 4 cifras. Por tanto, corresponderá al número de cuatro cifras situado en el lugar $\frac{15486}{4} = 3871,5$ de los números de 4 cifras, con lo que corresponderá a la cifra 8, que es la segunda cifra del número siguiente al $999 + 3871 = 4870$, es decir la cifra de las centenas de 4871.

A 58- Demostrar que si se intercalan n ceros entre cada cifra del número 1331, el número que resulta es cubo perfecto.

Solución: $1331 = 11^3$, $1030301 = 101^3$, $1003003001 = 1001^3$. Procediendo a la inversa: $(1\overleftrightarrow{000000}_{}1)^2$ con $\overleftrightarrow{000000}$ = n ceros: $(1\overset{n\text{ ceros}}{\overleftrightarrow{000000}}1)^2 = 1\overset{n\text{ ceros}}{\overleftrightarrow{000000}}2\overset{n\text{ ceros}}{\overleftrightarrow{000000}}1$. Multiplicando este cuadrado por $1\overset{n\text{ ceros}}{\overleftrightarrow{000000}}1$, se obtiene: $(1\overset{n\text{ ceros}}{\overleftrightarrow{000000}}1)^3 = 1\overset{n\text{ ceros}}{\overleftrightarrow{000000}}3\overset{n\text{ ceros}}{\overleftrightarrow{000000}}3\overset{n\text{ ceros}}{\overleftrightarrow{000000}}1$, con lo que queda demostrado.

A 59- Obtener con la calculadora el valor de x en la expresión: $a^{-x} = \dfrac{\sqrt{354,26} \cdot \sqrt[5]{26472,8}}{1,34679^6 \cdot 0,0009987^{-\frac{7}{3}}}$, siendo $\log a = 7,882546$.

Solución: $x = 0,7127007543$.

A 60- Simplificar $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$.

Solución: Llamando $A = \dfrac{x^3-3x}{2}$ y $B = \dfrac{(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}$, se tiene: $y = \sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}$. Elevando al cubo: $y^3 = A+B+3(A+B)^{\frac{2}{3}}(A-B)^{\frac{1}{3}} + 3(A+B)^{\frac{1}{3}}(A-B)^{\frac{2}{3}} + A - B =$
$= 2A + 3[(A+B)(A-B)]^{\frac{1}{3}}\left[(A+B)^{\frac{1}{3}} + (A-B)^{\frac{1}{3}}\right] = 2A + 3(A^2-B^2)^{\frac{1}{3}}y = x^3-3x+3y$,
$y^3-3y = x^3-3x$. De donde se deduce que: $y = x$.
Nota: Operando en la ecuación obtenida, se deduce que: $y^3-x^3+3x-3y =$
$= (y-x)(y^2+xy+x^2-3) = (y-x)(y-\dfrac{-x+\sqrt{12-3x^2}}{2})(y-\dfrac{-x-\sqrt{12-3x^2}}{2}) = 0$. Como el radicando $\sqrt{x^2-4}$ del enunciado, es real para $x^2 \geq 4$, y como el radicando $\sqrt{12-3x^2}$ es real para $x^2 \leq 4$, ambos radicandos son reales simultáneamente, sólo para $x^2 = 4$, es decir para $x = \pm 2$. Para este valor se obtiene $y = \pm 2$, solución particular de $y = x$.

A 61- Determinar los números enteros n de 4 cifras, *mcdu*, tales que se cumpla que $n = 11 \cdot S^2$, siendo $S = m+c+d+u$.

Solución: Se tiene que: $n = 1000m+100c+10d+u = m+c+d+u+999m+99c+9d =$ $= S+\dot{9} = 11S^2$. Como S^2 está comprendido entre $\dfrac{1000}{11}$ y $\dfrac{9999}{11}$, se deduce que: $10 \leq S \leq 30$. La igualdad $11S^2 - S = \dot{9}$, se cumple para los siguientes valores de S comprendidos en el citado intervalo: 14, 18, 23 y 27. Luego hay cuatro valores de n, correspondientes a $11S^2$: 2156, 3564, 5819, 8019.

A 62- Un buque de carga navega 200 horas entre dos puertos situados en el ecuador, recorriendo 32º15´30´´. Hallar la velocidad del buque y la diferencia de horas entre los dos puertos. En un determinado punto del recorrido, el reloj del buque está 20 min atrasado, ¿cuál es la diferencia de longitud de dicho punto con el puerto de salida? Se indicará si este punto está al este o al oeste del puerto de salida.

Solución: El buque ha recorrido: $32 \cdot 60 + 15 + \dfrac{30}{60} = 1935,5$ millas en 200 horas, luego su velocidad es de 9,6775 nudos. La diferencia horaria es: $\dfrac{32º15'30''}{15º} = 2\,\text{h}\ 9\,\text{min}\ 2\,\text{s}$. La diferencia de longitud es de $20' \times 15 = 300' = 5º$ oeste.

A 63- Una determinada explotación industrial utilizaba un generador de vapor cuyo funcionamiento exigía 506,25t de carbón en las 90 jornadas de 10 h 25 min que constituían la campaña de trabajo por año. Perfeccionando posteriormente el generador, se consiguió reducir el consumo de carbón a 50,25t por cada 100 horas de trabajo. El importe en € de la modificación realizada ascendió a lo que resulta de calcular la expresión: $\sqrt{\left(200 + \dfrac{1,\widehat{3}}{5-\dfrac{1}{5}}\right) \div 0,2\widehat{7}} + 32.582,65$. Para satisfacer este importe se negoció un crédito en las siguientes condiciones: la cantidad neta percibida es el importe de la modificación, tras aplicar un descuento comercial del 4% con vencimiento a 75 días y descontar también un interés anual del 3,5%, ambos sobre el nominal del crédito. Se pide: a) Cantidad de kg de carbón economizado por jornada de trabajo y el importe que supone la economía de carbón en las 90 jornadas, suponiendo un precio de 12 € por Qm. b) Importe de la modificación y nominal del crédito. c) Cantidad de dólares americanos a que equivalen los euros economizados en dicha campaña, suponiendo que 1 € = 1,1486 $.

Solución: a) La cantidad de carbón economizado por jornada viene dado por la expresión: $\dfrac{562.500}{90} - \dfrac{50.250}{100}\left(10 + \dfrac{25}{60}\right) = 390,625\,\text{kg}$. El importe que supone dicha economía en las 90 jornadas, es: $390,625 \cdot 90 \cdot \frac{12}{100} = 4.218,75$ €. b) El importe de la modificación introducida en el generador, es: $32.582,65 + \sqrt{\left(200 + \frac{4/3}{24/5}\right) \div \frac{25}{90}} = 32.609,50$ €. El nominal del crédito negociado, es: $\dfrac{32.609,50}{1 - \frac{4 \times 75}{100 \times 360} - \frac{3,5}{100}} = 34.086,58$ €. c) El importe economizado valorado en dólares, es: $4218,75 \times 1,1486 = 4.845,65$ \$.

A 64- Hallar un número de 6 cifras que multiplicado sucesivamente por 2, 3, 4, 5, 6 salen las mismas cifras ordenadas según permutaciones circulares de las cifras del número buscado.

Solución: $N = abcdef$. Si se multiplica por 6, para que sigan siendo 6 cifras, $a = 1$. Considerando la permutación $bcdef1$, sólo se puede obtener multiplicando N por 3, siendo $f = 7$. Razonando similarmente con las siguientes permutaciones se obtiene que $N = 142857$.

A 65- Calcular el valor de $V = \log_a \frac{M \cdot P}{N}$, sabiendo que: $\log_a \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$; M es el módulo de $\frac{\sqrt{-256}\,(2-3i)^2}{(-1+i)^5}$; N es el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & n \\ 4 & 9 & n^2 \end{vmatrix}$, en el que n es el menor número entero y positivo que hace que $N = \dot{7}$; P es el valor exacto de $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$.

Solución: $\log_a \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, luego: $a = \frac{1}{8}$. $M = \left| \frac{\sqrt{-256}\,(2-3i)^2}{(-1+i)^5} \right| = \frac{\left|\sqrt{-256}\right| |(2-3i)^2|}{|(-1+i)^5|} = \frac{16 \cdot 13}{\sqrt{2^5}} = 26\sqrt{2}$. $N = n^2 - 5n + 6$. Luego ha de tenerse que: $n^2 - 5n + 6 - 7k = 0$. De donde: $n = \frac{5 \pm \sqrt{1 + 28k}}{2}$, $k = 6$, $n = 9$, $N = 42$. $P = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{P}}$, $2P^2 - 2P - 1 = 0$, $P = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. Por tanto: $V = \log_a M \cdot \frac{P}{N} = \frac{\log M}{\log a} \cdot \frac{P}{N} = \frac{\log 26\sqrt{2}}{\log \frac{1}{8}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2 \cdot 42} = -0,05638$.

A 66- ¿Con cuántas cifras exactas habrá que tomar el número π para que su error sea $< \frac{7}{1.000}$?

Solución: Error $< \frac{1}{10^n} < \frac{7}{1000}$, $7 \times 10^n > 1000$, $n = 3$. Por tanto se tomará con tres cifras decimales exactas. Como tiene una cifra entera, se tomará con cuatro cifras exactas.

A 67- ¿Con cuántas cifras exactas hay que tomar π para que un límite superior de su error relativo, sea $\varepsilon < \frac{7}{5643}$?

Solución: $\varepsilon < \frac{1}{3 \cdot 10^{n-1}} < \frac{7}{5643}$, por tanto $21 \cdot 10^{n-1} > 5643$, $n - 1 = 3$, $n = 4$. Luego se tomará con cuatro cifras exactas.

A 68- Dado el número aproximado por defecto $578,6349\dot{3}67227$, suprimirle las cifras inexactas.

Solución: $578,634937$.

A 69- Dado el número aproximado hasta las diezmilésimas $45,286\dot{7}4834$, hallar una aproximación por defecto y otra por exceso con error menor que una centésima.

Solución: $45,28$ por defecto y $45,29$ por exceso.

A 70- Calcular las cifras exactas con que hay que tomar cada uno de los sumandos de la suma $48,3567321 + 0,0003765 + 0,6539843$, para que el total tenga un error menor de una diezmilésima.

Solución: El total ha de tener cuatro cifras decimales exactas, por tanto cada sumando se tomará con cinco decimales exactos, es decir, el primer sumando con siete cifras exactas, el segundo con dos y el tercero con cinco.

A 71- Hallar el grado de aproximación con que habrán de tomarse los sumandos de $42,85942 + \pi + e$, para que un límite superior del error relativo de la suma sea $\varepsilon < \frac{5}{4532}$.

Solución: Un tanteo da: $42,8 + 3,14 + 2,7 = 48,64$. Siendo n el número de cifras exactas de $48,64$, para que su error relativo sea menor que el indicado, se tiene: $\varepsilon < \frac{1}{4 \times 10^{n-1}} < \frac{5}{4532}$, es decir: $20 \cdot 10^{n-1} > 4532$. Por tanto: $n - 1 = 3$, $n = 4$. El total vendrá con cuatro cifras exactas, y como tiene dos cifras enteras, tendrá dos cifras decimales exactas. Luego cada sumando se tomará con tres cifras decimales, o sea con $\varepsilon < 0,001$.

A 72- Calcular la suma $\pi + e + 3,53446$ por defecto con error menor que una centésima.

Solución: Al indicar el sentido de la aproximación ("por defecto"), se pierde una cifra, luego se calculará la suma con error menor que una milésima, por lo que cada sumando se tomará con error menor que una diezmilésima: $3,1415 + 2,7182 + 3,5344 = 9,39\dot{4}1$, luego el total por defecto con error menor que una centésima es $9,39$.
Nota: Las diez cifras que da la calculadora, son $9,394334482$.

A 73- Calcular la diferencia $\pi - e$, con error menor que una milésima.

Solución: Se calculan π y e en sentido contrario con error menor que una diezmilésima, por ejemplo π por exceso $(3,1416)$ y e por defecto $(2,718\dot{2})$, viniendo la diferencia por exceso con error menor que una milésima: $3,1416 - 2,7182 = 0,42\dot{3}4$, basta suprimir la cifra inexacta, siendo la diferencia $0,423$.
Nota: Las diez cifras que da la calculadora, son $0,4233108251$.

A 74- Calcular el producto $\pi \times e$ con error menor que $0,001$.

Solución: $\pi \times e = 8,539$.
Nota: Las diez cifras que da la calculadora son $8,539734223$.

A 75- ¿Con cuántas cifras exactas vendrá el producto $\pi \times e$, cuando se toma π con cuatro cifras exactas y e con tres?

Solución: Un tanteo da como valor del producto $8,5$. Luego: $\varepsilon < \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{2 \cdot 10^2} < \frac{1}{8 \cdot 10^{n-1}}$, $\frac{32}{6 \cdot 10^3} < \frac{1}{8 \cdot 10^{n-1}}$, $n = 2$.

A 76- Calcular el producto $\pi \times 0,086743$ sabiendo que su error es $< \frac{5}{3247}$.

Solución: Un tanteo da $3,1 \times 0,08 = 0,24$. Por tanto: $\varepsilon < \frac{1}{10^n} < \frac{5}{3247}$, $5 \cdot 10^n > 3247$, $n = 3$. Luego el producto vendrá con tres cifras decimales exactas (en este caso son tres cifras exactas), siendo un límite de su error relativo $\varepsilon < \frac{1}{2 \cdot 10^2}$. En consecuencia se tiene que: $\varepsilon < \frac{1}{3 \cdot 10^{n-1}} + \frac{1}{8 \cdot 10^{n-1}} < \frac{1}{2 \cdot 10^2}$, $\frac{11}{24 \cdot 10^{n-1}} < \frac{1}{2 \cdot 10^2}$, $24 \cdot 10^{n-1} > 22 \cdot 10^2$, $n - 1 = 2$, $n = 3$. Se tomarán los datos con tres cifras exactas.

A 77- Calcular el número de cifras exactas del producto $314 \times 2,718\dot{2}$.

Solución: Un tanteo da: $314 \times 2,71 = 850$, $\varepsilon < \frac{1}{2 \cdot 10^4} < \frac{1}{8 \cdot 10^{n-1}}$, $n = 4$. El producto tendrá cuatro cifras exactas.

A 78- ¿Con cuántas cifras exactas hay que tomar los factores del producto $\pi \times e \times 34,6375842$, para que el error de éste sea $< 10^{-3}$?

Solución: Un tanteo da como valor del producto $295,\ldots$ Por tanto el producto tendrá seis cifras exactas. Llamando n al número de cifras exactas de cada factor, se tiene que:

$\varepsilon < \dfrac{1}{3\cdot 10^{n-1}} + \dfrac{1}{2\cdot 10^{n-1}} + \dfrac{1}{3\cdot 10^{n-1}} \leq \dfrac{1}{2\cdot 10^{5}}, \quad \dfrac{7}{6\cdot 10^{n-1}} < \dfrac{1}{2\cdot 10^{5}}, \quad 6\cdot 10^{n-1} > 14\cdot 10^{5},$ $n = 7$. Cada factor se tomará con siete cifras exactas.

A 79- Obtener el número de cifras exactas del producto $3,14\dot{1} \times 0,02\dot{3} \times 143,\dot{6}$.

Solución: Un tanteo da para el producto el valor de $10,3$. Por tanto: $\varepsilon < \dfrac{1}{3\cdot 10^{3}} + \dfrac{1}{2\cdot 10} + \dfrac{1}{10^{3}} < \dfrac{1}{10^{n-1}}, \quad \dfrac{154}{3\cdot 10^{3}} < \dfrac{1}{10^{n-1}}, \quad 3\cdot 10^{3} > 154\cdot 10^{n-1}, \quad n = 2$. El producto tendrá dos cifras exactas.

A 80- Calcular con error menor que una milésima el producto $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)$.

Solución: $21,344$ por defecto, $21,345$ por exceso.
Nota: Las diez cifras que da la calculadora, son $21,34430867$.

A 81- Calcular con error $< 10^{-3}$, el valor de $x = \sqrt[7]{2^7+3}$.

Solución: Se tiene que: $x = 2\left(1+\dfrac{3}{2^7}\right)^{\frac{1}{7}} = 2\left[1+\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{3}{2^7}+\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\2\end{pmatrix}\left(\dfrac{3}{2^7}\right)^2+\cdots\right] =$
$= 2\left(1+\dfrac{3}{7\cdot 2^7}-\dfrac{9\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{7}}{2^{14}}+\cdots\right) = 2+\dfrac{3}{7\cdot 2^6}-\dfrac{27}{49\cdot 2^{13}}+\dfrac{\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{13}{7}\cdot 27}{3¡\cdot 2^{21}}(*) =$
$= 2+\dfrac{3}{7\cdot 2^6}-\dfrac{27}{49\cdot 2^{13}} = 2+\dfrac{3}{7\cdot 64}-\dfrac{27}{49\cdot 8192} = 2+\dfrac{3}{448}-\dfrac{27}{401408}(*)$. Luego tomando solamente $2+\dfrac{3}{448}$, el error es menor que 10^{-3}. Por tanto, $x = \dfrac{899}{448} = 2,006$ (los términos marcados con $(*)$ son menores que 10^{-3}, despreciándose).
Nota: Las diez cifras que da la calculadora, son $2,006630125$.

A 82- Calcular con error $< 1/48$ la expresión $(\pi+1)(e+2)$.

Solución: $19,5\dot{4}$.

A83- Calcular con tres cifras exactas $\sqrt[3]{\dfrac{\pi+e+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}}$.

Solución: $-2,43$.

A 84- Calcular con tres decimales significativos exactos
$$\frac{50\times 3,141592\ldots-(52,476023\ldots+0,052103\ldots+2,3162147)(1,654302\ldots)^2}{(0,0000067+2,87642103\ldots.+1,3222\ldots)1053,621}.$$

Solución: $0,00158$ por exceso.

A 85- ¿Qué error se comete al calcular el radio de un círculo cuya área es $30,77\dot{8}$, si se toma $3,141\dot{6}$ como valor de π ?

Solución: Un cálculo aproximado da: $\sqrt{\dfrac{30,77\dot{8}}{3,141\dot{6}}} = \sqrt{9,\ldots} = 3,\ldots$ El error del radicando es $< \dfrac{0,001}{30}+\dfrac{0,0001}{3} = 0,00006$. Por tanto, el error de la raíz es: $\dfrac{0,00006}{2} = 0,00003 < 0,0001$. Luego el radio se halla con cuatro cifras exactas.

A 86- La raíz cuadrada por defecto con error absoluto menor que $0,1$ de una fracción irreducible es $1,3$. Hallar esta fracción sabiendo que la suma de sus dos términos es 81.

Solución: $1,3 < \sqrt{\dfrac{A}{B}} < 1,4$; $1,69 < \dfrac{A}{B} < 1,96$; $1,69 < \dfrac{81-B}{B} < 1,96$; $2,69 < \dfrac{81}{B} < 2,96$; $\dfrac{81}{2,69} > B > \dfrac{81}{296}$, $30,\ldots > B > 27,\ldots$ Por tanto, se tienen las siguientes soluciones posibles: $\dfrac{51}{30}, \dfrac{52}{29}, \dfrac{53}{28}, \dfrac{54}{27}$, de las que sólo son irreducibles: $\dfrac{52}{29}$ y $\dfrac{53}{28}$.

A 87- Calcular con tres cifras exactas el valor de $\dfrac{\pi + e\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$.

Solución: El valor pedido es $1,91$ por defecto, o $1,92$ por exceso.
Nota: Las diez cifras que da la calculadora, son $1,913776679$.

A 88- Calcular $\dfrac{a^3}{12}\left(7\sqrt{5} + 15\right)$ con tres cifras exactas, siendo $a = \sqrt{3}$.

Solución: El valor pedido es $13,2$ por defecto, o $13,3$ por exceso.
Nota: Las diez cifras que da la calculadora, son $13,27291138$.

A 89- Calcular con el mayor número de cifras exactas $\dfrac{\pi \cdot e + 7,321\ldots}{e^2}$.

Solución: Se calcula $\pi \cdot e$ con tres decimales exactos, es decir $8,539$. También se calcula e^2 con tres decimales exactos, obteniéndose $7,389$. Por tanto: $\dfrac{8,539 + 7,321}{7,389} = \dfrac{15,860}{7,389} = 2,146$, con cuatro cifras exactas.

A 90- Calcular el valor de e^2 con error ε menor que 10^{-4}, utilizando el desarrollo en serie de e^x.

Solución: $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + R_n$. Por tanto: $e^2 = 1 + \dfrac{2x}{1!} + \dfrac{4x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{2^n x^n}{n!} + R_n$, $R_n = \dfrac{f^n(\xi)}{n!}2^n$, $\varepsilon = \dfrac{e^\xi}{n!}2^n$, $0 < \xi < x$, $0 < \xi < 2$, $2 < e < 3$, $e^\xi < 9$, $\varepsilon < \dfrac{10 \cdot 2^n}{n!} = \dfrac{1}{10^4}$, $\dfrac{2^n}{n!} < \dfrac{1}{10^5}$, $n = 12$, $e^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{4}{2!} + \ldots + \dfrac{2^{11}}{11!} = 7,3890$.

A 91- Calcular con cuatro decimales exactos $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\pi \cdot e + 2,\widehat{2}}$.

Solución: $0,2923$ por defecto.

A 92- Con cuántas cifras exactas hay que tomar π, $\sqrt{2}$ y $43,01$, para que el resultado de $\dfrac{\pi + \sqrt{2}}{43,01}$ tenga dos cifras exactas.

Solución: Un cálculo aproximado da: $\dfrac{3,14 + 1,41}{43,01} = \dfrac{4,55}{43,01} = 0,10$. Por tanto, el error relativo ha de ser $< \dfrac{0,01}{0,1} = 10^{-1}$. Si tomamos dos cifras exactas en el numerador y en el denominador, el error relativo es: $\dfrac{0,1}{4,5} + \dfrac{1}{43} = 0,04 < 10^{-1}$, obteniéndose: $\dfrac{2,1 + 1,4}{43} = 0,10$.
Nota: Las diez cifras que da la calculadora, son $0,1059243482$.

A 93- Calcular $x = \log\left(-\sqrt{15} + i\sqrt{5}\right)$. La parte real se calculará con un error menor que $0,01$ mediante el desarrollo en fracción continua.

Solución: $x = \log(\rho \cdot e^{\omega i})$, $\rho = \sqrt{\left(-\sqrt{15}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = 2\sqrt{5}$, $\tan\omega = \dfrac{\sqrt{5}}{-\sqrt{15}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\omega = \dfrac{5}{6}\pi$, $x = \log\left(2\sqrt{5} \cdot e^{\frac{5}{6}\pi i}\right) = \log 2\sqrt{5} + i\dfrac{5}{6}\pi \log e$. Con la calculadora se obtiene: $x = 0,6505149978 + 1,136980295\, i$. Para calcular la parte real por desarrollo en fracción continua, se procede como sigue: $x_0 = \log 2\sqrt{5}$, $10^{x_0} = 2\sqrt{5}$, $x_0 = 0 + \dfrac{1}{x_1}$, $10^{\frac{1}{x_1}} = 2\sqrt{5}$, $10 = \left(2\sqrt{5}\right)^{x_1}$, $x_1 = 1 + \dfrac{1}{x_2}$, $10 = 2\sqrt{5} \cdot \left(2\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{x_2}}$, $\left(\sqrt{5}\right)^{x_2} = 2\sqrt{5}$, $x_2 = 1 + \dfrac{1}{x_3}$, $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{x_3}} = 2\sqrt{5}$, $\sqrt{5} = 2^{x_3}$, $x_3 = 1 + \dfrac{1}{x_4}$, $\sqrt{5} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{x_4}}$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{x_4} = 2$, $x_4 = 6 + \dfrac{1}{x_5}$. Luego: $x = (0,1,1,1,6,\ldots)$, siendo las reducidas sucesivas: $R_1 = 0$, $R_2 = 1$, $R_3 = \dfrac{1}{2}$, $R_4 = \dfrac{2}{3}$, $R_5 = \dfrac{13}{20}$,... El error cometido con R_5 es $\leq \dfrac{1}{20^2} \leq \dfrac{1}{100}$. Luego la solución es: $\dfrac{13}{20}$.

A 94- La diferencia de áreas del exágono regular y del cuadrado, ambos inscritos en el mismo círculo, es $3,629547$. Hallar el área del círculo con error absoluto $\leq 10^{-3}$.

Solución: Se tiene: $\frac{3}{2}R^2\sqrt{3} - 2R^2 = R^2\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} - 2\right) = 3,629547$, $S = \pi R^2 = \dfrac{3,629547}{\frac{3}{2}\sqrt{3} - 2}\pi =$ $= \dfrac{3,629547 \times 3,141592}{0,598076} = 18,9\ldots$, $\dfrac{1}{1 \cdot 10^{n-1}} + \dfrac{1}{5 \cdot 10^{n-1}} < \dfrac{1}{10^6}$, $6 \cdot 10^4 < 5 \cdot 10^{n-1}$. Luego: $n - 1 = 5$, $n = 6$. Por tanto, $\sqrt{3}$ se tomará con 6 cifras exactas. Como $\dfrac{2}{3 \cdot 10^{n-1}} < \dfrac{1}{1 \cdot 10^5}$, $3 \cdot 10^{n-1} > 2 \cdot 10^5$, $n = 6$. Luego: $3,629$ y π se tomarán con 6 cifras exactas. Por tanto: $S = \dfrac{3,6295\dot{4} \times 3,1415\dot{9}}{0,59807\dot{6}} = \dfrac{11,402\dot{5}}{0,59807\dot{6}} = 19,06\dot{5}$.

Sección B - SISTEMAS DE NUMERACIÓN

B 1- Hallar n si $4.244_{(n} = 2.354_{(n+1}$.

Solución: $4n^3 + 2n^2 + 4n + 4 = 2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 5(n+1) + 4$. Operando, se tiene la ecuación: $2n^3 - 7n^2 - 13n - 10 = 0$. Es decir, $(n-5)(2n^2+3n+2) = 0$. Luego: $n = 5$ (las otras dos raíces de la ecuación no son válidas).

B 2- Escribir en base 5, el número $301223_{(4}$.

Solución: $301223_{(4} = 3 \cdot 4^5 + 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 3 = 3179_{(10} = 100204_{(5}$.

$$\begin{array}{rrrrrr}
3179 & \multicolumn{1}{|l}{5} & & & & \\ \cline{2-2}
17 & 635 & \multicolumn{1}{|l}{5} & & & \\ \cline{3-3}
29 & 13 & 127 & \multicolumn{1}{|l}{5} & & \\ \cline{4-4}
\underline{4} & 35 & 27 & 25 & \multicolumn{1}{|l}{5} & \\ \cline{5-5}
 & \underline{0} & \underline{2} & \underline{0} & 5 & \multicolumn{1}{|l}{5} \\ \cline{6-6}
 & & & & \underline{0} & \underline{1}
\end{array}$$

B 3- Hallar el valor de la base n para que se verifique la igualdad $21102_{(n} = 10254_{(n+1}$.

Solución: $2n^4 + n^3 + n^2 + 2 = (n+1)^4 + 2(n+1)^2 + 5(n+1) + 4$. Operando, se tiene la ecuación: $n^4 - 3n^3 - 7n^2 - 13n - 10 = 0$, cuya raíz positiva es: $n = 5$.

B 4- Hallar el valor de n para que sea cierta la igualdad $2312_{(n} = 21_{(n} \cdot 211_{(n-2} + 2$.

Solución: $2n^3 + 3n^2 + n + 2 = (2n+1)[2(n-2) + (n-2) + 1] + 2$. Operando, se tiene la ecuación: $2n^3 - 15n^2 + 6n + 7 = 0$. Las raíces de esta ecuación son: $7,\ 2,\ -1$. Sólo es válida la raíz 7.

B 5- Hallar la suma siguiente en base 8 y comprobarla por la regla de Cauchy: $35721 + 435 + 61243 + 561$.

Solución:

$$\begin{array}{cccccccr}
1 & 1 & 2 & 2 & 1 & & = & 7 \\
 & 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & = & 18 \\
 & & & 4 & 3 & 5 & = & 12 \\
 & 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & = & 16 \\
_ & _ & _ & \underline{5} & \underline{6} & \underline{1} & = & \underline{12} \\
1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & = & 9/65
\end{array}$$

El resultado es 120402. Comprobación: $9 + 8 \cdot 7 = 65$.

B 6- Disponiendo para una balanza únicamente pesas de $1,\ 5,\ 5^2, \ldots,\ 5^n$ gramos, pesar $77.646\,$g. Sólo puede utilizarse una pesa de cada tipo, y pueden colocarse las pesas en los dos platillos de la balanza.

Solución:

Dividendo	77.646	15.529	3.105	621	124	24
Divisor	5	5	5	5	5	5
Cociente	15.529	3.105	621	124	24	4
Resto	1	4	0	1	4	4

$77646 = 4441041_{(5} = 100\bar{1}11\bar{1}1_{(5} = 1 \cdot 5^7 - 1 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 - 1 \cdot 5 + 1$ En un platillo se colocan: 1 pesa de 5^7 g, 1 de 5^3 g, 1 de 5^2 g, 1 de 1 g. En el otro platillo: 1 de 5^4 g, 1 de 5 g.

B 7- Efectuar en base 12 la suma siguiente, comprobando el resultado por Cauchy, y escribiendo también dicho resultado con cifras mínimas: $543\alpha61 + 71038 + 1252\beta34 + 2659 + 7952$.

Solución:

	1	1	3	2	2		=	9
	5	4	3	α	6	1	=	29
		7	1	0	3	8	=	19
1	2	5	2	β	3	4	=	28
			2	6	5	9	=	22
_	_	_	7	9	5	2	=	23
1	8	5	6	2	0	0	=	22/130
2	$\bar{4}$	5	6	2	0	0		

Resultado: 1856200. Comprobación: $22 + 12 \times 9 = 130$. El resultado con cifras mínimas es: $2\bar{4}56200$.

B 8- Efectuar en base 12 el producto $13\alpha4\beta6 \times 530\alpha7$, y pasar el producto directamente a base 8.

Solución: Se utiliza la tabla de multiplicar en base 12:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β	10
2	2	4	6	8	α	10	12	14	16	18	1α	20
3	3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29	30
4	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38	40
5	5	α	13	18	21	26	2β	34	39	42	47	50
6	6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56	60
7	7	12	19	24	2β	36	41	48	53	5α	65	70
8	8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74	80
9	9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83	90
α	α	18	26	34	42	50	5α	68	76	84	92	$\alpha0$
β	β	1α	29	38	47	56	65	74	83	92	$\alpha1$	$\beta0$
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	$\alpha0$	$\beta0$	100

				1	3	α	4	β	6
				$\times$ 5	3	0	α	7	
				9	3	0	α	8	6
		1	1	2	8	1	7	0	
	3	β	7	2	α	β			
6	7	4	0	9	6				
6	β	4	α	0	3	8	5	8	6

El producto pedido es $6\beta4\alpha038586_{(12}$. Para pasar directamente de base 12 a base 8, se escriben el número y la base, en base 8. El producto escrito en base 8 es: $6, 13, 4, 12, 0, 3, 10, 5, 10, 6$, y la base: $1, 4$. A continuación se procede como se recoge en la tabla siguiente (todas las operaciones se efectúan en base 8, utilizándose la tabla de multiplicar en base 8):

	6	13	4	12	0	3	10	4	10	6
14		110	1.744	27.340	431.370	6.461.640	117.125.644	1.666.006.020	26.210.110.374	413.141.546.060
	6	123	1.750	27.352	431.370	6.461.643	117.125.654	1.666.006.025	26.210.110.404	413.141.546.066

B 9- Extraer en base 12, la raíz cuadrada de $13\alpha46\beta54_{(12}$.

Solución:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{13\alpha46\beta54} & 3\beta96 \\ \hline 6\alpha4 & 6\beta\times\beta \\ \underline{641} & 7\alpha9\times 9 \\ \quad 636\beta & 7\beta66\times 6 \\ \quad \underline{5\beta09} & \\ \qquad 45254 & \\ \qquad \underline{3\beta930} & \\ \qquad\; 6524 & \end{array}$$

Por tanto, se tiene que: $13\alpha46\beta54 = 3\beta96^2 + 6524$

B 10- ¿En cuántos ceros terminará 2318! si se escribe en base 12?

Solución: El exponente x del factor primo p en la descomposición de $m!$, es el cociente $\dfrac{m-s}{p-1}$, siendo s la suma de las cifras de m expresado en el sistema de base p (regla de Legendre). En base 12, los ceros corresponden al producto $2^2\cdot 3$. Por tanto, hay que buscar los exponentes α del factor 2, y β del factor 3. $2318_{(10} = 100100001110_{(2} = 10011212_{(3}$. Por tanto: $s_2 = 5$ y $s_3 = 8$. Luego: $\alpha = \dfrac{2318-5}{2-1} = 2313$, que corresponde a $2^{2313} = 2\cdot 4^{1156}$, y $\beta = \dfrac{2318-8}{3-1} = 1155$, que corresponde a 3^{1155}. Luego el número de ceros es 1155, (el menor de los dos exponentes 1156 y 1155).

B 11- ¿Cuál es la menor factorial que termina en mil ceros, cuando se escribe en base 40?

Solución: Aplicando la regla de Legendre (ver problema B 10), siendo $40 = 2^3\cdot 5$, para que escrita la factorial pedida en base 40, tenga mil ceros, es necesario que en su descomposición aparezca el producto $2^{3000}\cdot 5^{1000}$. Esto se produce para 4005! En efecto, puesto que: $4005 = 111110100101_{(2} = 112010_{(5}$. Luego: $s_2 = 8$ y $s_5 = 5$. Por tanto se tiene que: $x_2 = \dfrac{4005-8}{2-1} = 3997 > 3000$, y $x_5 = \dfrac{4005-5}{5-1} = 1000$. Luego, 4005! escrito en base 40, es igual a: $2^{3997}\cdot 5^{1000}\cdot R$, es decir, es igual a: $2^{3000}\cdot 5^{1000}\cdot R'$, por lo que termina en mil ceros.

B 12- Hallar el valor de a para que $12a25_{(8}$ sea múltiplo de $15_{(8}$.

Solución: $10^0_{(8} \cong 1(\text{mód. } 15_{(8)})$, $10^1_{(8} \cong 10_{(8}(=\bar{5}_{(8)})(\text{mód. } 15_{(8)})$, $10^2_{(8} \cong 31_{(8}(=\bar{1}_{(8)})(\text{mód. } 15_{(8)})$, $10^3_{(8} \cong 5(\text{mód. } 15_{(8)})$, $10^4_{(8} \cong 1(\text{mód. } 15_{(8)})$. Es decir, los restos son: $1, \bar{5}, \bar{1}, 5, 1, \ldots$ Por tanto: $5-2\cdot 5-a+2\cdot 5+1 = 6-a = 0$, $a = 6$.

B 13- ¿Existen sistemas de logaritmos de base mayor que uno, en los que un número puede ser igual a su logaritmo? ¿En un mismo sistema puede haber más de un número? Si existen, hállense las bases.

Solución: $\log_b N = N$, $b^N = N$, $b = N^{\frac{1}{N}}$. La curva $y = x^{\frac{1}{x}}$ pasa por el origen y por el punto $(1,1)$. Tiene un máximo en el punto de abscisa e y ordenada $e^{\frac{1}{e}} = 1{,}444668$. Para valores de $x > e$, y tiende asintóticamente a 1. Luego existen dichas bases, encontrándose b entre 1 y $1{,}444668$ $(= e^{\frac{1}{e}})$. En un mismo sistema hay dos números, salvo para $b = e^{\frac{1}{e}}$, en el que sólo hay un número, que es e.

B 14- Dado un sistema de numeración de base B, hallar el número más pequeño de cuatro cifras $abcd$, tal que la suma $a+d+bc$ sea igual a B^2+1, y que el número cb sea igual a $(a+d)^2$. Aplíquese a $B = 10$.

Solución: $a+d+(b\cdot B+c) = B^2+1$, $c\cdot B+b = (a+d)^2$. Haciendo: $a+d = S$, se tiene:

$S+(bB+c)=B^2+1$, $S^2=cB+b$. Eliminando c, se tiene: $S^2+BS+B^2b-B^3-B=0$. Dando valores a b, desde 0 a $B-1$, se obtendrá el valor de S. Dando a d el mayor valor posible $\leq (B-1)$, se obtiene a y $c=\dfrac{S^2-b}{B}$. Para $B=10$, el número es 1946.

B 15- Determinar el log x en un sistema cuya base es el número formado por las dos últimas cifras de 3^x, siendo x un número tal que el producto de todos sus divisores es $2^{60}\cdot 7^{36}$.

Solución: $x=2^a\cdot 7^b$. El producto de sus divisores es $2^{\frac{a(a+1)(b+1)}{2}}\cdot 7^{\frac{b(b+1)(a+1)}{2}}$. Luego: $a(a+1)(b+1)=120$ y $b(b+1)(a+1)=72$. De donde: $a=5$, $b=3$ y $x=2^5\cdot 7^3=10976$. Los restos potenciales de 3, módulo 100, son: $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \overline{19},\ 43,\ldots,\ 21,\ \overline{37},\ \overline{11},\ \overline{33},\ 1\ldots$ Para 3^{20}, el resto es 1. Siendo $10976=\dot{20}+16$, el resto de 3^{16}(mód. 100) es 21. Luego, se tiene que: $\log_{21}10976=\dfrac{\log 10976}{\log 21}=3{,}055804823$.

B 16- Hallar un número de tres cifras, sabiendo que en el sistema de base 7 y en el de base 9, se escribe con las mismas cifras, pero en orden invertido.

Solución: $abc_{(7}=cba_{(9}$; a, b y c han de ser <7; $49a+7b+c=81c+9b+a$; $b=8(3a-5c)$; $3a-5c$ sólo puede tomar el valor 0, pues el valor 1 hace que $b=8\not<7$. Luego: $3a-5c=0$, $a=5$, $c=3$, $b=0$. El número pedido es: $503_{(7}=305_{(9}=248_{(10}$.

Sección C - DIVISIBILIDAD NUMÉRICA

C 1- Contados los árboles de un bosque, de 10 en 10 sobran 4, de 7 en 7 sobra 1, y de 12 en 12 no sobra ninguno. Sabiendo que están comprendidos entre 2000 y 2500, hallar el número de árboles.

Solución: Se tiene que: $N = \dot{10} + 4 = \dot{7} + 1 = \dot{12}$. Luego: $N = 10x + 4 = 7y + 1 = 12z$. Con sucesivas sustituciones se tiene: $y = z + \alpha$, $\alpha = 2\beta + \gamma$, $z = 7\gamma + 3$, $x = 8\gamma + \delta + 3$, $5\delta = 2\gamma + 1$, $\delta = 2\eta + 1$. $N = 420\eta + 204$. Para $2000 < N < 2500$, $\eta = 5$, $N = 2304$.

C 2- Hallar el resto de dividir $(-7^{232} + 3 \cdot 7^{524} - 2 \cdot 7^{120} - 7)$ por $(1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^9)$.

Solución: $1 + 7 + \ldots + 7^9 = \dfrac{7^{10} - 1}{7 - 1} = \dfrac{Z - 1}{6}$, siendo $Z = 7^{10}$. La división queda como sigue: $\dfrac{6(-7^{232} + 3 \cdot 7^{524} - 2 \cdot 7^{120} - 7)}{Z - 1} = \dfrac{-6 \cdot 7^2 \cdot Z^{23} + 18 \cdot 7^4 \cdot Z^{52} - 12 \cdot Z^{12} - 42}{Z - 1}$. Luego el resto es: $\dfrac{-6 \cdot 7^2 + 18 \cdot 7^4 - 12 - 42}{6} = \dfrac{-348 + 43.218}{6} = \dfrac{42.870}{6} = 7.145$.

C 3- Demostrar que $E = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ es múltiplo de 10 si $n \neq \dot{4}$.

Solución: Sea $n = 4k + \lambda$, pudiendo λ tomar los valores 1, 2 y 3. Luego: $E = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 1^{4k+\lambda} + 2^{4k+\lambda} + 3^{4k+\lambda} + 4^{4k+\lambda} = 1 + 2^\lambda 16^k + 3^\lambda 81^k + 4^\lambda 256^k$. Se tiene que tanto 16^k como 256^k terminan siempre en 6, así como 81^k termina siempre en 1. Por tanto: $E = 1 + 6 \cdot 2^\lambda + 1 \cdot 3^\lambda + 6 \cdot 4^\lambda + \dot{10}$. Para $\lambda = 1$, $E = 1 + 12 + 3 + 24 + \dot{10} = \dot{10}$. Para $\lambda = 2$, $E = 1 + 24 + 9 + 96 + \dot{10} = \dot{10}$. Para $\lambda = 3$, $E = 1 + 48 + 27 + 384 + \dot{10} = \dot{10}$. Luego queda demostrado.

C 4- Hallar todos los números que divididos por 2, 3, 4, 5 y 6 dan de resto respectivamente 1, 2, 3, 4 y 5.

Solución: $x = \dot{2} + 1 = \dot{3} + 2 = \dot{4} + 3 = \dot{5} + 4 = \dot{6} + 5$. Por tanto: $x = \dot{2} - 1 = \dot{3} - 1 = \dot{4} - 1 = \dot{5} - 1 = \dot{6} - 1$. Luego: $x = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot k - 1 = 60k - 1$. Es decir: $x = \dot{60} - 1$.

C 5- Hallar la suma de las potencias p-ésimas de todos los divisores de un número m.

Solución: Descomponiendo m se tiene, $m = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \cdot \ldots \cdot l^\lambda$. Sus divisores vienen dados por: $(1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta)\ldots(1 + l + l^2 + \ldots + l^\lambda)$. Y sus potencias p-ésimas por: $(1 + a^p + a^{2p} + \ldots + a^{\alpha p})\ldots(1 + l^p + l^{2p} + \ldots + l^{\lambda p}) =$

$$= \frac{a^{\alpha p} \cdot a^p - 1}{a^p - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{l^{\lambda p} \cdot l^p - 1}{l^p - 1} = \frac{a^{p(\alpha+1)} - 1}{a^p - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{l^{p(\lambda+1)} - 1}{l^p - 1}.$$

C 6- Dos relojes se ponen simultáneamente en marcha a las 12. Por defecto de fabricación el primero retrasa 5 segundos a la hora y el segundo adelanta 7 segundos a la hora. Calcular el tiempo mínimo que ha de transcurrir para que marquen los dos la misma hora y cuál es ésta.

Solución: La diferencia de hora entre los dos relojes es de 12 segundos por hora. Para que la diferencia sea de 12 horas (entonces volverán a estar en hora), han de transcurrir $\dfrac{12 \text{ horas}}{12 \text{ segundos por hora}} = 3600 \text{ horas} = 150$ días, y marcarán las 12 horas.

C 7- Demostrar que $\dfrac{a \cdot n + 1}{(a + 1)n + 1}$ es irreducible para todo valor entero de a y n.

Solución:

	1	a	n
$an + n + 1$	$an + 1$	n	1
n	1	0	

. El máximo común divisor de $an + 1$ y $(a + 1)n + 1$ es 1, luego es irreducible.

C 8- ¿Cuántos números múltiplos de b hay en la sucesión $a,\ 2a,\ 3a, ...,\ ba$?

Solución: Sea el $m.c.d.(a,b) = d$. Por tanto, $a = d \cdot q_1$ y $b = d \cdot q_2$. Para que $k \cdot a$ sea divisible por b, k ha de ser múltiplo de q_2. Por tanto, el número de múltiplos es el $m.c.d.(a,b) = d$.

C 9- El número N tiene 12 divisores. Al añadirle dos ceros detrás, tiene 18 divisores más. N sólo tiene factores 2 y 5. Hallar N y el producto de todos sus divisores.

Solución: $N = 2^a \cdot 5^b$, $(a+1)(b+1) = 12$, $100N = 2^{a+2} \cdot 5^{b+2}$, $(a+3)(b+3) = 30$. Resolviendo estas ecuaciones, se obtienen para a los valores 2 y 3, y para b los valores 3 y 2, respectivamente. Luego: $N = 2^3 \cdot 5^2 = 200$, y también: $N = 2^2 \cdot 5^3 = 500$. El producto de sus divisores es: $\sqrt{200^{12}} = 200^6$ y $\sqrt{500^{12}} = 500^6$, respectivamente.

C 10- Hallar cuántos números hay que siendo menores que p^n, sean divisibles por p^r y no lo sean por p^{r+1}, siendo p número primo.

Solución: Cumplen esas condiciones los siguientes números:

$$\begin{array}{l} p^r \quad 2p^r \quad 3p^r \ldots\ldots\ldots p \cdot p^r \\ p^{r+1} \quad 2p^{r+1} \quad 3p^{r+1} \ldots\ldots p \cdot p^{r+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p^n \end{array}$$

El número de columnas válidas es: $p-1$ y el de filas válidas: p^{n-r-1}. El número pedido es: $(p-1)p^{n-r-1}$.

C 11- Siendo m y n dos números primos y k un número que varía desde 1 hasta m, hallar la suma de todos los cocientes enteros de la forma $\dfrac{k \cdot n}{m}$.

Solución:

$$\begin{aligned} n &= q_1 \cdot m + r_1 \\ 2n &= q_2 \cdot m + r_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m \cdot n &= q_m \cdot m + r_m \end{aligned}$$

Sumando las igualdades expuestas: $(1+2+\ldots+m)n = m\sum q + \sum r$. Ahora bien: $r_1,\ r_2, \ldots,\ r_m$ es el conjunto de restos incongruentes con m, luego: $\sum r = 0+1+2+\ldots+(m-1) = \dfrac{m(m-1)}{2}$, y $\sum q = \dfrac{1}{m}\left[\dfrac{m(m+1)}{2}n - \dfrac{(m-1)m}{2}\right] = \dfrac{1}{2}(m \cdot n + n - m + 1)$.

C 12- Calcular el resto de dividir por 13 el número 7^{1215}.

Solución: Al dividir por 13 las potencias de 7, se producen los siguientes restos: $7,\ 10,\ 5,\ 9,\ 11,\ 12,\ 6,\ 3,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ 7, ...$ Como 1215 es múltiplo de 12 más 3, el resto pedido es 5.

C 13- De un número m se sabe que es múltiplo de su indicador. ¿Qué condición debe cumplir un número cualquiera para ser primo con m?

Solución: $m = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot\ldots\cdot l^\lambda$. Luego: $\phi(m) = a^{\alpha-1}(a-1) \cdot b^{\beta-1}(b-1) \cdot\ldots\cdot l^{\lambda-1}(l-1)$. Al ser $m = \dot{\phi}(m)$, se verifica: $m = k \cdot a^{\alpha-1}(a-1) \cdot\ldots\cdot l^{\lambda-1}(l-1)$. De donde, sustituyendo el valor de m, se obtiene: $k = \dfrac{a}{a-1} \cdot\ldots\cdot \dfrac{l}{l-1}$. Luego la condición requerida es que el número no puede ser divisible por: a, $(a-1)$, b, $(b-1)$,..., l, $(l-1)$.

C 14- Hallar la suma de los indicadores de todos los divisores de un número.

Solución: Sea $N = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot\ldots\cdot l^\lambda$. La suma de sus divisores viene dada por: $(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)\ldots(1+l+l^2+\ldots+l^\lambda)$. Sustituyendo cada sumando por su ϕ, se tiene: $(1+a-1+a^2-a+\ldots+a^\alpha-a^{\alpha-1})\ldots(1+l-1+l^2-l+\ldots+l^\lambda-l^{\lambda-1}) = a^\alpha \cdot\ldots\cdot l^\lambda = N$. Luego la suma pedida es el mismo número.

C 15- Dados dos números N y M, se sabe que su $m.c.d. = 1$, que $N = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot\ldots\cdot(M-1)^2$. Hallar el resto de dividir N por M.

Solución: $N = [(M-1)!]^2$. M es primo, pues no tiene ningún divisor común con N, y éste los tiene todos desde 1 hasta $M-1$. Por tanto: $(M-1)!+1 \cong 0\left(\text{mód. } p\right)$. Luego: $(M-1)! = \dot{p}-1$, y por tanto: $[(M-1)!]^2 = (\dot{p}-1)^2 = \dot{p}+1$. Luego el resto pedido es 1.

C 16- Hallar los números asociados de 9 con respecto al módulo 3.

Solución: Por no ser 9 primo con 3, no existen asociados.

C 17- Calcular el resto de dividir por 7 el número $N = 5712^{1315^{2721}}$.

Solución: $N = 5712^A$, siendo: $A = 1315^{2721}$. Como: $5712 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 = \dot{7}$, $N = \dot{7}$ y el resto pedido es 0.

C 18- Hallar la suma de todos los números x menores que 8712, tales que el $m.c.d.(x, 8712) = 1$.

Solución: $8712 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^2$. Luego los números menores que 8712, primos con él, no deben tener ningún divisor 2, 3, 11. Los números menores que 8712, múltiplos de 2, son: $2,\ 4,\ 6, \ldots,$ 8710, y su suma: $\frac{2+8710}{2} \times 4355 = 18.970.380$. Los que son múltiplos de 3 y no de 2, son: 3, $9,\ 15, \ldots,\ 8709$, y su suma: $\frac{3+8709}{2} \times 1452 = 6.324.912$. Los números que son múltiplos de 11 y no de 2 ni de 3, son: $11,\ 55,\ 77, \ldots,$ y su suma es: $11(1+5+7+\ldots) =$ $= 11[(1+2+\ldots+791)-(2+4+\ldots+790)-(3+9+\ldots+789)] =$ $= 11\left(\frac{1+791}{2} \times 791 - \frac{2+790}{2} \times 395 - \frac{3+789}{2} \times 132\right) = 1.149.984$. La suma de todos los números menores que 8712 es: $\frac{1+8711}{2} \times 8711 = 37.945.116$. Luego la suma pedida es: $37.945.116 - 18.970.380 - 6.324.912 - 1.149.984 = 11.499.840$.

C 19- Si $2n+1$ es un número primo, demostrar que $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ al ser divididos por $2n+1$, dejan residuos diferentes.

Solución: Sean p y q dos cualesquiera de los números $1^2, \ldots, n^2$. Se supone que $p^2 - q^2$ es divisible por $2n+1$. Por ser $2n+1$ primo, $p+q$ o $p-q$ deben ser divisibles por $2n+1$. Pero por ser p y q cada uno de ellos menor que n, se tiene que tanto $p+q$ como $p-q$ son cada uno de ellos menores de $2n+1$. Luego p^2-q^2 no puede ser divisible por $2n+1$, es decir: p^2 y q^2 no pueden dejar el mismo residuo al ser dividos por $2n+1$.

C 20- Hallar las dos últimas cifras del número $1000^{1000^{1000}}$ si se escribe en base 12.

Solución: Se tiene: $10^2_{(12} = 144_{(10}$, $1000^0 \cong 1(\text{mód. } 144)$, $1000^1 \cong 136(\text{mód. } 144) = -8(\text{mód. } 144)$, $1000^2 \cong 64(\text{mód. } 144)$, $1000^3 \cong 64(\text{mód. } 144)$, etc. Luego el número dado termina en 64 en base decimal. Es decir, termina en 54 en base 12.

C 21- Hallar la última cifra de $1234^{5678} + 5678^{1234}$.

Solución: Se tienen las siguientes expresiones: $1234^0 \cong 1(\text{mód. } 10)$, $1234^1 \cong 4(\text{mód. } 10)$, $1234^2 \cong 6(\text{mód. } 10) = -4(\text{mód. } 10)$, $1234^3 \cong 4(\text{mód. } 10)$, con periodo de repetición igual a 2. Como $5678 \div 2$ da resto 0, el primer sumando es $1234^{\dot{2}}$, siendo su resto 6, teniéndose que: $5678^0 \cong 1(\text{mód. } 10)$, $5678^1 \cong 8(\text{mód. } 10) = -2(\text{mód. } 10)$, $5678^2 \cong 4(\text{mód. } 10)$, $5678^3 \cong 2(\text{mód. } 10)$, $5678^4 \cong 6(\text{mód. } 10) = -4(\text{mód. } 10)$, $5678^5 \cong -2(\text{mód. } 10)$, con periodo de repetición igual a 4. Como $1234 = \dot{4}+2$, el segundo sumando es 5678^2, siendo su resto 4. La suma de los dos restos es 10, luego la última cifra es 0.

C 22- Demostrar que para todo valor entero de n, el número $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = \dot{17}$.

Solución: El número dado es igual a $15 \cdot 5^{2n} + 2 \cdot 2^{3n}$. Los restos de 5^{2n} al dividir por 17 son: 1, $8,\ -4,\ 2,\ -1,\ -8,\ 4,\ -2,\ 1, \ldots$ Los restos de 2^{3n} al dividir por 17 son: $1,\ 8,\ -4,\ 2,\ -1,\ -8,\ 4,\ -2,$ $1, \ldots,$ que son los mismos que los de 5^{2n}. Por tanto, los restos del número dado son los anteriores multiplicados por $15+2 = 17$. Luego siempre es $\dot{17}$.

C 23- Hallar el valor de la cifra a, para que el número $15a37$ sea $\dot{19}$.

Solución: Se tiene: $10^0 \cong 1(\text{mód. } 19)$, $10^1 \cong -9(\text{mód. } 19)$, $10^2 \cong 5(\text{mód. } 19)$, $10^3 \cong -7(\text{mód. } 19)$, $10^4 \cong 6(\text{mód. } 19)$. Por tanto: $(1 \cdot 7) + (-9 \cdot 3) + (5 \cdot a) + (-7 \cdot 5) + (6 \cdot 1) = 5a - 49 = \dot{19}$.

Luego: $a = \dfrac{\dot{19} + 49}{5} = \dfrac{\dot{19} - 8}{5}$. Como a tiene un solo dígito, $a = \dfrac{38 - 8}{5} = 6$.

C 24- Descomponer el número 100 en sumandos 2, 5, 23, interviniendo los tres sumandos en todas las soluciones.

Solución:

$$
\begin{array}{r|ll}
100 - 23 = 77 & 77 - 5 = 72 & = 2 \times 36 \\
 & 77 - 15 = 62 & = 2 \times 31 \\
 & 77 - 25 = 52 & = 2 \times 26 \\
 & 77 - 35 = 42 & = 2 \times 21 \\
 & 77 - 45 = 32 & = 2 \times 16 \\
 & 77 - 55 = 22 & = 2 \times 11 \\
 & 77 - 65 = 12 & = 2 \times 6 \\
 & 77 - 75 = 2 & \\
\hline
100 - 46 = 54 & 54 - 10 = 44 & = 2 \times 22 \\
 & 54 - 20 = 34 & = 2 \times 17 \\
 & 54 - 30 = 24 & = 2 \times 12 \\
 & 54 - 40 = 14 & = 2 \times 7 \\
 & 54 - 50 = 4 & = 2 \times 2 \\
\hline
100 - 69 = 31 & 31 - 5 = 26 & = 2 \times 13 \\
 & 31 - 15 = 16 & = 2 \times 8 \\
 & 31 - 25 = 6 & = 2 \times 3
\end{array}
$$

Luego las soluciones son:

23	23	23	23	23	23	23	23	46	46	46	46	46	69	69	69
5	15	25	35	45	55	65	75	10	20	30	40	50	5	15	25
72	62	52	42	32	22	12	2	44	34	24	14	4	26	16	6

C 25- Hallar tres números consecutivos sabiendo que su producto es P (solución aritmética).

Solución: Se extrae la raíz cúbica de P. La raíz entera es el primero de los tres números consecutivos.

Nota: $h(h+1)(h+2) < (h+1)^3$, luego nunca la raíz entera cúbica será el segundo de los tres números consecutivos.

C 26- Hallar el resto de dividir por 15, el número $(1234567_{(8})^{1325_{(9}}$.

Solución:

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
8) & & 8 & 80 & 664 & 5344 & 42792 & 342384 \\
\hline
 & 1 & 10 & 83 & 668 & 5349 & 42798 & 342391
\end{array}
$$

Se tiene que: $342391^0 \cong 1(\text{mód. } 15)$, $342391^1 \cong 1(\text{mód. } 15)$, $342391 \cong 1(\text{mód. } 15)$. Luego: $342391^{1325_{(9}} \cong 1(\text{mód. } 15)$. El resto pedido es 1.

C 27- Hallar la suma de los números enteros menores que 10^6, tales que divididos por 2, 3, 5, den resto 1, divididos por 7 den resto 4, y divididos por 11 den resto 8.

Solución: Al ser los números buscados congruentes con 1, módulos 2, 3 y 5, son también congruentes con 1 módulo 30. Y al ser congruentes con 4 módulo 7, y congruentes con 8 módulo 11, son congruentes con 74 módulo 77. Luego son congruentes con 151 módulo 2.310. Luego la suma pedida es: $\sum_{h=0}^{432} (2310h + 151) = 216.115.063.$

Nota: $2310 \times 433 + 151 = 1000381 > 10^6$.

C 28- Hallar un número sabiendo que dividido por n^2 da un cociente q de 3 cifras, la última de las cuales es 0, y que termina en dos ceros en el sistema de base 7, siendo además 11 el número de divisores de q menores que él. La base n cumple la igualdad $148 = 404_{(n}$.

Solución: $148 = 404_{(6} = 4 \times 36 + 4$. El cociente debe ser $\dot{49}$ y terminar en 0, luego puede ser $490 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2$, ó $980 = 2^2 \times 5 \times 7^2$. El número de divisores de 490 es: $2 \times 2 \times 3 = 12$. El de 980 es: $3 \times 2 \times 3 = 18$. Luego 490 tiene 11 divisores menores que él. Por tanto, el número pedido es: $36 \times 490 = 17640$ En efecto: $\frac{17640}{36} = 490 = 1300_{(7}$.

C 29- Hallar un número de tres cifras sabiendo que su cubo termina en 013.

Solución: El único dígito cuyo cubo termina en 3 es 7. El único número de dos cifras cuyo cubo termina en 13 es 17. El único número de tres cifras cuyo cubo termina en 013 es 317.

C 30- Demostrar que $1224^n + 53^{2n+4} = \dot{17}$, para todo valor natural de n.

Solución: $1224^0 \cong 1(\text{mód. } 17)$, $1224^1 \cong 0(17)$,..., $1224^n \cong 0(17)$, $53^{2n} \cong -1, -4, 1, 4, -1(17)$, $53^4 \cdot 53^{2n} \cong -1, -4, 1, 4, -1(17)$. Para $n = 0$, la suma de restos es $1 - 1 = 0$. Luego es divisible por 17. Para cualquier otro valor de n, la suma de los dos restos es $\neq 0$, luego no es divisible por 17.

C 31- Determinar dos fracciones irreducibles $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$, sabiendo que su diferencia es $\frac{5}{6}$, que el $m.c.d.(a,b) = a - b$, y que el $m.c.m.(a,b) = 1050$.

Solución: $(a - b)1050 = a \cdot b$. Operando: $b = \dfrac{1050}{\frac{1050}{a} + 1}$. Los divisores de $1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, son: 24: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 25, 30, 35, 42, 50, 70, 75, 105, 150, 175, 210, 350, 525, 1050. Tanteando, se obtienen los siguientes valores para a, b: 75, 70; 175, 150; 210, 175; 525, 350; 1050, 525, siendo sus $m.c.d.$, respectivamente: 5, 25, 35, 175, 525. Se prueban cada par de valores, por ejemplo, 75, 70: $\frac{75}{c} - \frac{70}{d} = \frac{5}{6}$, $\frac{15}{c} - \frac{14}{d} = \frac{1}{6}$, $6(15d - 14c) = cd$; c no es $\dot{3}$ ni $\dot{5}$, por ser irreducible $\frac{a}{c}$; d no es $\dot{2}$, ni de $\dot{5}$, ni de $\dot{7}$, por ser irreducible $\frac{b}{d}$. Se puede poner que $c = 2k$, $d = 3k$, con lo que $k = 17$, teniéndose las fracciones irreducibles $\frac{75}{34}$ y $\frac{70}{51}$. Probadas las otras parejas a, b, las fracciones obtenidas no cumplen la condición de irreductibilidad.

C 32- Hallar la suma de los n menores valores positivos de a para que $7^{8^n+1} + a \cdot 50^{8 \cdot 2^n+2} = \dot{17}$.

Solución: Siendo: $7^8 = \dot{17} - 1$ y $50 = \dot{17} - 1$, la expresión queda como sigue: $7\left(\dot{17} - 1\right)^n + a\left(\dot{17} - 1\right)^{8 \cdot 2^n+2}$. Para $n = 2m$ la expresión vale: $7\left(\dot{17} + 1\right) + a\left(\dot{17} + 1\right) = \dot{17} + 7 + a$. Por tanto, para que sea $\dot{17}$, ha de ser $a = 10$. Para $n = 2m + 1$, la expresión vale: $7\left(\dot{17} - 1\right) + a\left(\dot{17} + 1\right) = \dot{17} - 7 + a$. Luego, $a = 7$. La suma pedida es: $17m$ para $n = 2m$, y $7 + 17m$ para $n = 2m + 1$.

C 33- Demostrar por inducción que si $n \neq \dot{3}$, la expresión $1 + 2^n + 2^{2n}$ es $\dot{7}$.

Solución: Para $n = 1$, vale 7. Para $n = 2$, vale 21. Se supone que para $n = 3k \pm 1$, se cumple. Ha de cumplirse para $n = 3(k+1) \pm 1$. En efecto: $1 + 2^{3(k+1)\pm 1} + 2^{6(k+1)\pm 2} = 1 + 2^{3k\pm 1} \cdot 2^3 + 2^{6k\pm 2} \cdot 2^6 =$
$= 1 + 2^{3k\pm 1} + 2^{3k\pm 1}(2^3 - 1) + 2^{6k\pm 2} + 2^{6k\pm 2}(2^6 - 1) = \underbrace{\left[1 + 2^{3k\pm 1} + 2^{6k\pm 2}\right]}_{\text{valor para } n=3k\pm 1} + 2^{2k\pm 1} \cdot 7 + 2^{6k\pm 2} \cdot 7 \cdot 9 = \dot{7}$,

con lo que queda demostrado.

C 34- Demostrar que $E = 7^{2n+1} + 2 \cdot 13^{2n+1} + 17^{2n+1} = \dot{50}$.

Solución: E es: $7 \cdot 49^n + 26 \cdot 169^n + 17 \cdot 289^n = 7(50-1)^n + 26(170-1)^n + 17(290-1)^n =$
$= \dot{50} \pm 7 \mp 26 \cdot 170^n \pm 26 \mp 17 \cdot 290n \cdot 17 = \dot{50} \pm 7 \mp 26 \cdot 20n \pm 26 \pm 17 \cdot 10n \pm 17 =$
$= \dot{50} \mp 350n \pm 50 = \dot{50}$.

C 35- Demostrar que si los números a y b son primos con 5, la suma $a^2 + 2b^2$, no es $\dot{5}$.

Solución: a y b no pueden acabar en 5, luego sus cuadrados acaban en 1, 4, 6, 9. Luego el duplo del cuadrado acaba en 2 o en 8. Sumando 8 ó 2, a 1, 4, 6, 9, nunca se obtiene un número acabado en 0 ni en 5, con lo que queda demostrado.

C 36- Siendo S_1, la suma de los n primeros números enteros, $S_{1,1}$ la suma de sus productos binarios, $S_{1,1,1}$ la suma de sus productos ternarios, etc., demostrar que $1 + S_1 + S_{1,1} + \ldots + S_{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1}}$ es divisible por $S_{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n}}$, suma de sus productos n-arios.

Solución: $(x+1)(x+2)\ldots(x+n) = x^n + S_1 x^{n-1} + S_{1,1} x^{n-2} + \ldots + S_{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n}}$. Para $x = 1$, se tiene: $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1) = 1 + S_1 + S_{1,1} + \ldots + S_{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n}}$. Por tanto: $(n+1)! = 1 + S_1 + \ldots + S_{\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}} + n!$. Es decir: $1 + S_1 + \ldots + S_{\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}} = (n+1)! - n! = n!(n+1-1) = n \cdot n! = n \cdot S_{\underbrace{1,\ldots,1}_{n}}$, con lo que queda demostrado.

C 37- 1º) Demostrar que el cuadrado de un número entero par es múltiplo de 4 y el de un número impar es múltiplo de 4 +1. 2º) Se consideran tres números enteros a, b, c, que satisfacen la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$: a) Demostrar que si a, b, c son primos entre sí, b y c son el uno par y el otro impar y a es impar. b) Si a, b, c son primos entre sí y b es par, demostrar que $a+b$ y $a-b$ son primos entre sí y son los cuadrados de dos números enteros impares m y n primos entre sí. Expresar a, b, c en función de m, n. 3º) Hallar las fórmulas generales de todas las soluciones de la ecuación citada, en números enteros no necesariamente primos entre sí (se hará intervenir el $m.c.d. = d$). Indicar todas las soluciones formadas con números no mayores de 20.

Solución: 1º) $(2n)^2 = 4n^2 = \dot{4}$, $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = \dot{4} + 1$. 2º a) Se tiene que: $m.c.d.\left(a,b;\ a,c;\ b,c\right) = 1$. Si b es par, no lo puede ser c, pues no serían primos entre sí. Siendo a^2 suma de par e impar, será impar, siéndolo también a. 2º b) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = c^2$. Si $m.c.d.[(a+b),(a-b)] = d \neq 1$, se tendría que: $a+b = xd$, $a-b = yd$, $2a = d(x+y)$, $2b = d(x-y)$, por lo que a, b no serían primos entre sí. Luego, $a+b$ y $a-b$ son primos entre sí. Si $a+b = m^2$ y $a-b = n^2$, $c^2 = m^2 \cdot n^2$, $c = m \cdot n$. Por tanto: $a = \dfrac{m^2+n^2}{2}$, $b = \dfrac{m^2-n^2}{2}$. Si m, n tuvieran un divisor común, también lo tendrían a, b; como éstos son primos entre sí, también lo son m, n. 3º) $a = d\dfrac{m^2+n^2}{2}$, $b = d\dfrac{m^2-n^2}{2}$, $c = d \cdot m \cdot n$. Las soluciones pedidas son:

m	3	3	3	3	5	5
n	1	1	1	1	1	3
d	1	2	3	4	1	1
a	5	10	15	20	13	17
b	4	8	12	16	12	8
c	3	6	9	12	5	15

C 38- Se da una fracción $\dfrac{n^2+4n+6}{n(n^4-1)}$. 1º) Demostrar que el numerador no es divisible por 5. 2º) Demostrar que el denominador es divisible por 30. 3º) ¿La fracción puede dar lugar a un cociente periódico simple? 4º) ¿Qué valor inferior a 10, ha de tomar n para que la fracción sea decimal exacta? ¿Y para que sea periódica mixta?

Solución: 1º) $n^2+4n+6=(n+2)^2+2$, que acaba en 1, 3, 6, 7, 8, pero nunca en 0 ó 5. 2º) $n(n^4-1)=n(n^2+1)(n^2-1)=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$. Para $n=\dot{5}$ y $n=\dot{5}\pm 1$, es claro que el denominador es $\dot{5}$. Para $n=\dot{5}\pm 2$, $n^2+1=(\dot{5}\pm 2)^2+1=\dot{5}+4+1=\dot{5}$. Luego el denominador es divisible siempre por 2, 3 y 5, o sea, por 30. 3º) Para que el cociente sea periódico simple, el denominador ha de estar formado sólo por nueves, lo que no se da, por ser múltiplo de 5 y no serlo el numerador. 4º) 2 y 3 para ser decimal exacta, y 4, 5, 7, 8, 9 (primos con 2 y 5) para ser periódica mixta.

C 39- Dados dos números a, b primos entre sí, hallar la suma de los cocientes enteros que resultan de dividir por b, la serie de números $a,\ 2a,\ 3a,\ldots,\ (b-1)a$.

Solución: Los restos de dividir la serie dada por b, son: $1,\ 2,\ 3,\ldots,\ (b-1)$, siendo su suma $\frac{(b-1)b}{2}$. La suma de los términos de la serie dada es: $\frac{ab(b-1)}{2}$. Luego la suma pedida es: $\frac{1}{b}\left[\frac{ab(b-1)}{2}-\frac{b(b-1)}{2}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$.

C 40- Demostrar que la expresión $E=3^{2n+3}+40n-27$ es divisible por 64, cualquiera que sea el valor de n.

Solución: Operando se tiene que: $E=27\cdot 9^n+40n-27=27[(8+1)^n-1]+40n=$ $=27\left(\dot{64}+8n+1-1\right)+40n=\dot{64}+n(216+40)=\dot{64}$.

C 41- Demostrar que si $1/a$ y $1/b$, cuyos denominadores son primos entre sí, originan fracciones periódicas puras cuyos periodos tienen el mismo número de cifras p del periodo, el producto $a\cdot b$ divide a 10^p-1.

Solución: $\frac{1}{a}=\frac{A(p)}{10^{p+1}-1}$, luego $a=\frac{10^{p+1}-1}{A(p)}$, siendo $A(p)$ el periodo de p cifras de $\frac{1}{a}$. Por tanto, $A(p)$ es divisor de 10^p-1. Un razonamiento paralelo da: $b=\frac{10^{p+1}-1}{B(p)}$, siendo $B(p)$ el periodo de p cifras de $\frac{1}{b}$, siendo $B(p)$ divisor de 10^p-1. Siendo primos entre sí a, b, también lo son $A(p)$, $B(p)$, por lo que al ser ambos divisores de 10^p-1, su producto lo es también.

C 42- Hallar dos números A y B, dada su diferencia D y su $m.c.m.$ M. Aplicación a $D=240$ y $M=1260$.

Solución: Siendo el $m.c.d.(A,B)=d$, se tiene que: $A=a\cdot d$, $B=b\cdot d$, siendo $m.c.d.(a,b)=1$, $D=d(a-b)$, $A\cdot B=M\cdot d$, de donde: $a\cdot b\cdot d=M$, y $\frac{a\cdot b}{a-b}=\frac{M}{D}=\frac{\mu}{\delta}$, siendo $m.c.d.(\mu,\delta)=1$. Por tanto, se trata de descomponer μ en dos factores cuya diferencia sea δ. $\frac{M}{D}=\frac{1260}{240}=\frac{21}{4}=\frac{\mu}{\delta}$. La descomposición de μ da $7\cdot 3$, cuya diferencia 4 es δ. Como $D=\frac{M}{\mu}=\frac{1260}{21}=60$, los números pedidos son: $A=7\cdot 60=420$, $B=3\cdot 60=180$.

C 43- Encontrar tres números a, b, c sabiendo que se cumplen las relaciones $m.c.d.(a,b)=17$, $m.c.d.(a,c)=17$, $m.c.d.(b,c)=17$, $m.c.m.(a,b,c)=1785$, y que $a+b+c=255$.

Solución: Se tiene: $a=17\cdot\alpha$, $b=17\cdot\beta$, $c=17\cdot\gamma$, $m.c.m.(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1785}{17}=105$, $\alpha+\beta+\gamma=\frac{255}{17}=15$. Siendo: $105=3\cdot 5\cdot 7$ y $15=3+5+7$, la solución es la siguiente: $a=3\cdot 17=51$, $b=5\cdot 17=85$, $c=7\cdot 17=119$.

C 44- Hallar el $m.c.d.$ de 3^m-1 y 3^n-1. Aplicar para $m=3621$ y $n=1711$.

Solución: Los números dados en base decimal, se escriben como sigue en base tres: $A=(3^m-1)_{(10}=\overset{m}{\overline{22\ldots2}}_{(3}$, $B=(3^n-1)_{(10}=\overset{n}{\overline{22\ldots2}}_{(3}$.

Luego: $m.c.d.(\overset{m}{\overline{2\ldots2}}_{(3},\overset{n}{\overline{2\ldots2}}_{(3})=\overset{d}{\overline{2\ldots2}}_{(3}$, siendo $d=m.c.d.(m,n)$. En base decimal:

$\overbrace{2\ldots2}^{d}{}_{(3} = 2+2\cdot3+2\cdot3^2+\ldots+2\cdot3^{d-1} = 3^d-1$, que es el $m.c.d.$ pedido. Como $m.c.d.(3621,1711) = 1$, el $m.c.d.$ pedido es: $3^1-1 = 2$.

C 45- Hallar un número entero, cubo perfecto, con 16 divisores y que dividido por 43 da cociente primo y resto 1.

Solución: Sea $N = a^{3\alpha}\cdot b^{3\beta}\cdot\ldots$ El número de sus divisores viene dado por: $(3\alpha+1)(3\beta+1)\ldots = 16 = (3\cdot1+1)(3\cdot1+1)$, o también, $3\cdot5+1$. Luego N adopta estas dos formas: $a^3\cdot b^3$ o a^{15}, y ha de ser igual a $43\cdot n+1$. Por tanto, como se tiene que: $43+1 = 44 = 2^2\cdot11$, $43\cdot2+1 = 87 = 3\cdot29$, $43\cdot3+1 = 130 = 2\cdot5\cdot13$, $43\cdot4+1 = 173$, $43\cdot5+1 = 216 = 2^3\cdot3^3$, la solución es 216.

C 46- Determinar $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, si $m.c.d.(a,b) = 1$, y $1170 = 7A-2B = 4a+19b$.

Solución: $M.c.d.(A,B) = d$, $A = a\cdot d$, $B = b\cdot d$. Resolviendo el sistema: $1170 = 4a+19b$, $\frac{1170}{d} = 7a-2b$, se obtiene: $b = \frac{390}{47d}(7d-4)$. El único valor de d, divisor de 390, que hace que $(7d-4)$ sea $\dot{47}$, es 390, obteniéndose: $a = 17$, $b = 58$, $A = 6630$, $B = 22620$.

C 47- Hallar dos números siendo su suma 127.008, y sabiendo que tienen 45 divisores comunes.

Solución: $127008 = 2^5\cdot3^4\cdot7^2$. El número 45 se puede obtener por los siguientes productos: $3\cdot15 = 3\cdot3\cdot5 = 9\cdot5 = 45$, lo que daría como factores comunes las siguientes posibilidades: a) $a^2\cdot b^{14}$, b) $a^2\cdot b^2\cdot c^4$, c) $a^8\cdot b^4$, d) a^{44}. Las soluciones a), c) y d) no son posibles porque no existen los exponentes 14, 8, 44 en la descomposición factorial de 127.008. Por tanto, las posibilidades son dos: 1) $A = 2^4\cdot3^2\cdot7^2\cdot m = 7056m$, $B = 7056n$, siendo $m.c.d.(m,n) = 1$. 2) $A = 2^2\cdot3^4\cdot7^2\cdot p = 15876p$, $B = 15876q$, siendo $m.c.d.(p,q) = 1$. Resolviendo la primera, se tiene: $m+n = \frac{127008}{7056} = 18$; hay que descomponer 18 en dos sumandos, primos entre sí, y que ninguno sea múltiplo de 2, 3, 7; hay tres soluciones: $1+17$, $5+13$, $7+11$. Resolviendo la segunda: $p+q = 8$, que se descompone en 1 + 7, 3 + 5. El conjunto de las soluciones se presentan en el cuadro siguiente:

A	7.056	35.280	49.392	15.876	47.628
B	119.952	91.728	77.616	111.132	79.380

C 48- Hallar cuatro números A, B, C, D, enteros, que forman en ese orden una proporción armónica. Se sabe que cualquiera de sus razones menores que 1, reducidas a decimales, originan periodos puros. El $m.c.d.(A,B,C,D) = 9$, y su $m.c.m = 756$.

Solución: Dividiendo por 9, los cuatro números: $A = 9a$, $B = 9b$, $C = 9c$, $D = 9d$. El $m.c.d.(a,b,c,d) = 1$, el $m.c.m.(a,b,c,d) = 84 = 2^2\cdot3\cdot7$, y a, b, c, d forman en ese orden una proporción armónica. Los divisores de 84 son: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84. Ninguno de los cuatro números puede ser ≥ 12, pues los factores restantes de 84 no podrían formar tres números (por ejemplo: $a = 12$, $bcd = 7$, que sólo forma dos números, 1 y 7). Tomando la relación armónica: $\frac{a-c}{a-d} = \frac{b-c}{b-d}$, y suponiendo que estas razones son < 1, $a-d$ y $b-d$ tienen que ser 3 ó 6, y $a-c$ y $b-c$ tienen que ser 1 ó 2, con objeto de que las razones sean 1/3 ó 2/3 para dar periódicas puras. Esta situación se cumple para 4, 1, 3, 7, por lo que los cuatro números pedidos son: 36, 9, 27, 63, en ese orden, puesto que $(36,9,27,63) = -1$.

C 49- Para multiplicar dos números se puede proceder de la siguiente forma: Escríbase el multiplicador a la derecha del multiplicando. Debajo de éste, póngase como primer componente de esta segunda línea, su mitad exacta o por defecto cuando sea impar. Debajo del multiplicador, póngase como segundo componente de esta segunda línea, su doble. En la tercera línea se escribirá a la izquierda, como primer componente, la mitad exacta o por defecto del primer componente de la segunda fila, y a la derecha, como segundo componente de esta tercera línea, el doble del segundo componente de la segunda fila. Y así sucesivamente, hasta que aparezca la unidad. Entonces, señálense las filas en las que el primer componente sea impar, y destáquese en ellas el segundo componente. La suma de estos segundos componentes destacados es el producto buscado.

Demuéstrese. Un ejemplo puede aclarar lo expuesto: Para multiplicar 426×358, se procede de la siguiente forma:

426	358
*213	**716**
106	1.432
*53	**2.864**
26	5.728
*13	**11.456**
6	22.912
*3	**45.824**
*1	**91.648**

Luego, $716 + 2864 + 11456 + 45824 + 91648 = 152508$.

Solución: Sea, en el ejemplo expuesto, $A \times B = P = B(2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^8)$. Por tanto: $A = 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^8$. Si se aplica a A el algoritmo de las divisiones sucesivas para escribirlo en base 2, los cocientes serían los números de la primera columna (el primer componente), y los que fueran impares darían resto 1. Es decir, escribiendo A en base 2, se obtendrían solamente las potencias de 2 correspondientes a los cocientes impares. Con lo que queda demostrado.

Sección D - COMBINATORIA

D 1- Hallar de cuántas maneras se pueden ordenar las caras de 10 dados, de forma que el producto de las caras sea múltiplo de 450, interviniendo un solo 6 y al menos dos 1, sin que el producto sea múltiplo de 8.

Solución: $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 6 \cdot 3 \cdot 5^2$. Al intervenir un 6, no puede intervenir ningún 4, para que el producto no sea $\dot{8}$, y el 2 sólo puede intervenir una vez como máximo por la misma razón. El 3 debe intervenir al menos una vez y el 5 al menos dos veces, para que el producto sea múltiplo de 450. Luego de los 10 dados, hay 6 obligados: dos 1, un 3, dos 5, un 6, cuyo producto es 450. En los otros cuatro dados pueden intervenir: hasta un máximo de cuatro veces el 1, el 3 y el 5, y un máximo de una vez el 2. Hay 25 maneras si el orden no importa:

1111	1115	3355	1112	1255
1113	1155	3555	1123	2555
1133	1555	1135	1233	2335
1333	5555	1335	2333	2355
3333	3335	1355	1125	1235

Si el orden importa, la solución es:

$$10!\left[\begin{array}{c}\frac{1}{6!2!}+\frac{1}{5!2!2!}+\frac{1}{4!3!2!}+\frac{1}{3!4!2!}+\frac{1}{2!5!2!}+\frac{1}{5!3!}+\frac{1}{4!4!}+\frac{1}{3!5!}+\frac{1}{2!6!}+\frac{1}{2!4!3!}+\\ +\frac{1}{2!3!4!}+\frac{1}{2!2!5!}+\frac{1}{4!2!3!}+\frac{1}{3!3!3!}+\frac{1}{3!2!4!}+\frac{1}{5!2!}+\frac{1}{4!2!2!}+\frac{1}{3!3!2!}+\frac{1}{2!4!2!}+\\ +\frac{1}{4!3!}+\frac{1}{3!4!}+\frac{1}{2!5!}+\frac{1}{2!3!3!}+\frac{1}{2!2!4!}+\frac{1}{3!2!3!}\end{array}\right]$$

$$= 10!\left(\frac{2}{6!2!}+\frac{3}{5!2!2!}+\frac{2}{5!3!}+\frac{2}{5!2!}+\frac{1}{4!4!}+\frac{6}{4!3!2!}+\frac{2}{4!3!}+\frac{3}{4!2!2!}+\frac{1}{3!3!3!}+\frac{3}{3!3!2!}\right) =$$
$$= 481.740.$$

D 2- Hallar de cuántas maneras se pueden ordenar las caras de n dados, de forma que el producto de las caras sea múltiplo de 45 y no lo sea de 25 ni de 27.

Solución: Por las condiciones expuestas sólo puede haber las siguientes posibilidades: a) dos 3, un 5, ningún 6, siendo las otras $n-3$ caras, $1, 2, 4$; b) un 3, un 5, un 6, siendo las otras $n-3$ caras, 1, 2, 4 ; c) ningún 3, un 5, dos 6, siendo las otras $n-3$ caras, 1, 2. 4. No importando el orden de los dados, cada una de las tres posibilidades da $C'_{3,\,n-3} = \binom{n-1}{n-3}$ maneras, luego en total hay, en este caso, $3\binom{n-1}{n-3}$ maneras.

D 3- Hallar de cuántas maneras se pueden ordenar las caras de 20 dados de modo que la suma da las 20 caras sea 40.

Solución: Sea $f(t) = (t^1+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6)^{20} = t^{20}(\frac{1-t^6}{1-t})^{20} = t^{20}(1-t^6)^{20}(1-t)^{-20}$, de donde se extraen los términos cuyos exponentes sumen 40. O bien, en la expresión $(1-t^6)^{20}(1-t)^{-20}$, de donde se extraen aquellos cuyos exponentes sumen 20. Estos términos, que representan la solución, son: $\binom{20+20-1}{20} - \binom{20}{1}\binom{20+14-1}{14} + \binom{20}{2}\binom{20+8-1}{8} - \binom{20}{3}\binom{20+1}{2} = \binom{39}{20} - \binom{20}{1}\binom{33}{14} + \binom{20}{2}\binom{27}{8} - \binom{20}{3}\binom{21}{2}$.

D 4- En una clase de 40 alumnos, el profesor anula, como promedio, mil problemas cada mes, a causa de la "copia" entre alumnos. Por cada "copia" detectada, anula 10 problemas. ¿De cuántas maneras podrá hacerlo de forma que ningún alumno se "escape"? El número de problemas planteados al mes es 60.

Solución: Se trata de extraer los términos de exponente 100, en la expresión:

$(t^1+t^2+\ldots+t^{60})^{40} = t^{40}\left(\frac{1-t^{60}}{1-t}\right)^{40}$. Luego se busca el coeficiente de t^{60} en $\left(\frac{1-t^{60}}{1-t}\right)^{40}$, es decir en: $\left[1-\binom{40}{1}t^{60}+\ldots\right]\cdot\left[1-\binom{-40}{1}t+\ldots+\binom{-40}{40}t^{40}+\ldots\right]$. El término buscado es: $\binom{-40}{40} = \binom{79}{40}$.

Nota: $\binom{-m}{n} = (-1)^n\binom{m+n-1}{n}$.

D 5- ¿De cuántas maneras distintas se puede ir desde un ángulo de un tablero de ajedrez hasta el opuesto, marchando por la línea de separación de los escaques? No se puede retroceder.

Solución: Siempre hay que recorrer 16 segmentos. Las maneras serán: $\frac{16!}{\alpha!\beta!}a^\alpha b^\beta$, siendo $\alpha+\beta = 16$ (8 filas + 8 columnas), siendo además $\alpha = \beta = 8$. Por tanto, el número de maneras es: $\frac{16!}{8!\cdot 8!} = 12.870$.

D 6- Se tienen n puntos en el espacio, de los que m se encuentran sobre un mismo plano, y los restantes puntos están colocados de forma que 4 cualesquiera de ellos no definen un plano. ¿Cuántos tetraedros distintos pueden formarse de modo que tengan sus vértices en los puntos dados?

Solución: Si no fueran coplanarios los m puntos, sino que estuvieran colocados cumpliendo la misma condición que los demás puntos, el número de tetraedros formados sería $\binom{n}{4}$. El número de tetraedros que se podrían formar con los m puntos si no fueran coplanarios, es $\binom{m}{4}$. Por tanto, el número pedido es: $\binom{n}{4}-\binom{m}{4}$.

D 7- Se sortean tres premios de 1000, 500 y 250 euros, entre n individuos. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerse la distribución? Se consideran dos casos según que un mismo individuo pueda, o no, recibir más de un premio. Hay que tener en cuenta que quien sortea hace trampas para que un amigo suyo, incluido entre los n individuos, siempre obtenga premio.

Solución: En el caso en que sólo se puede recibir un premio por persona, hay dos premios a repartir entre $n-1$ individuos. El amigo puede recibir cualquiera de los tres premios. Luego el número de maneras es: $3\cdot 2\cdot\binom{n-1}{2}$. En el caso en que se pueda recibir más de un premio por persona, si el amigo recibe un premio, el número es: $3\left[2\binom{n-1}{2}+n-1\right]$; si el amigo recibe dos premios, el número es $3(n-1)$; si el amigo recibe tres, sólo hay 1 forma. Por tanto, en este segundo caso, el número es, sumando las tres posibilidades, $3n^2-3n+1$.

D 8- De una compañía de 120 soldados, se nombran 10 para realizar una tarea. ¿De cuántas maneras distintas pueden nombrarse según los casos siguientes? a) Un soldado no realiza esa tarea; b) La tarea la realizan todos los soldados; c) Hay tres soldados pendientes de recibir un castigo, de ellos se elige uno para realizar la tarea.

Solución: a) $\binom{119}{10}$; b) $\binom{120}{10}$; c) $3\binom{117}{9}$.

D 9- Se considera el número 256368. Se forman todos los números posibles permutando sus cifras. Hallar la suma total de todos los números formados.

Solución: Los números que se forman son: $P_6' = \frac{6!}{2!} = 360$. Por tanto, en las unidades, en las decenas, etc., habrá $\frac{360}{6} = 60$ doses, 60 cincos, 120 seises, 60 treses, 60 ochos. Por lo que las unidades sumarán: $(60\times 2)+(60\times 5)+(120\times 6)+(60\times 3)+(60\times 8) = 1800$, lo mismo que las decenas, las centenas, las unidades de millar, etc. Por tanto, la suma total será: $1800(1+10+100+1000+10000+100000) = 199.999.800$.

D 10- Hallar de cuántas maneras se pueden repartir ocho premios distintos, entre siete personas, de modo que no quede ninguna persona sin premio.

Solución: Sean $A,\ B,\ C,\ldots,\ H$ los ocho premios distintos. Hay que agrupar dos premios en una persona, lo que da $\binom{8}{2}$ grupos distintos. Para cada grupo, las otras seis personas se pueden agrupar en P_6 formas distintas. Se pueden elegir 7 personas diferentes para recibir los dos premios. Por tanto, el número pedido es: $7 \cdot \binom{8}{2} \cdot 6! = 141.120$.

D 11- Hallar el límite cuando n tiende a infinito, del cociente entre el número de permutaciones con n objetos y el número total de inversiones.

Solución: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{\binom{n}{2}\dfrac{n!}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n(n-1)} = 0.$

D 12- Con los números $1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 8$ se forman todas las variaciones con repetición V_4'. Se suprimen las que teniendo el 3 como cifra de las decenas, tienen a la vez el 5 como cifra de las unidades de millar. Hallar la suma de las restantes variaciones.

Solución: Las variaciones con repetición de 8 elementos tomados de 4 en 4, son: $V_{8,4}' = 8^4$. De éstas, hay $\dfrac{8^4}{8} = 8^3$ variaciones que tienen el 3 como cifra de las decenas. Y de éstas, hay $\dfrac{8^3}{8} = 8^2$ variaciones que además tienen el 5 como cifra de las unidades de millar. Las variaciones no suprimidas son: $8^4 - 8^2 = 4096 - 64 = 4032$. Las cifras de las unidades y de las centenas suman, cada una de ellas: $\dfrac{4032}{8}(1+2+3+4+5+6+7+8) = 18.144$. Las de las decenas suman: $\dfrac{4096}{8}(1+2+4+5+6+7+8) + (\dfrac{4096}{8} - 64)3 = 18.240$. Las de las unidades de millar suman: $\dfrac{4096}{8}(1+2+3+4+6+7+8) + (\dfrac{4096}{8} - 64)5 = 18.112$. Luego la suma total es: $18144 + (10 \times 18240) + (100 \times 18144) + (1000 \times 18112) = 20.126.944$.

D 13- ¿De cuántas maneras se pueden extender en fila recta las 40 cartas de una baraja, sin que nunca estén juntos dos caballos?

Solución: De las $P_{40} = 40!$ permutaciones, un caballo estará en una determinada fila $\dfrac{40!}{10}$ veces. Si es un caballo determinado, por ejemplo el de oros, estará $\dfrac{40!}{10 \cdot 4} = 39!$ veces. En este caso tendrá detrás otro caballo $39! \times \dfrac{3}{40-1} = \dfrac{39!}{13}$ veces. Si este segundo caballo es uno determinado, por ejemplo el de copas, lo tendrá $\dfrac{39!}{13 \cdot 3} = 38!$ veces. Como el primer caballo puede ser cualquiera, el número de veces será $\dfrac{4 \cdot 39!}{13}$. Y como el segundo puede ser cualquiera de los restantes, el número de veces será $\dfrac{8 \cdot 39!}{13} = 24 \cdot 38!$ Una vez que han salido juntos dos caballos, los otros dos caballos saldrán juntos $4 \cdot 38!$ Por tanto, las veces que salen dos caballos juntos, con independencia de que haya otros dos juntos, es: $24 \cdot 38! - 4 \cdot 38! = 20 \cdot 38!$. Las permutaciones en las que no salen dos caballos juntos son: $40! - 20 \cdot 38! = 1540 \cdot 38!$

D 14- ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las caras de 10 dados para que su suma sea múltiplo de 20?

Solución: La suma puede ser 20, 40 ó 60. 1º) La suma es 20: el número de veces que sucede corresponde al coeficiente de t^{20} en el polinomio $(t^1+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6)^{10} = t^{10}(1+t+\ldots+t^5)^{10} = t^{10}(\dfrac{1-t^6}{1-t})^{10}$. Lo que es lo mismo que el coeficiente de t^{10} en el producto $(1-t^6)^{10}(1-t)^{-10}$, es decir, desarrollando los factores, en el producto: $\left[1 - \binom{10}{1}t^6 + \binom{10}{2}t^{12} + \ldots\right]\left[1 - \binom{-10}{1}t + \ldots + \binom{-10}{4}t^4 + \ldots + \binom{-10}{10}t^{10}\right]$.Este coeficiente es: $\binom{-10}{10} - \binom{10}{1}\binom{-10}{4} = \binom{19}{10} - \binom{10}{1}\binom{13}{4}$ [**A**]. 2º) La suma es 40: el número de veces corresponde al coeficiente de t^{30} en $\left(\dfrac{1-t^6}{1-t}\right)^{10}$. Este coeficiente es: $\binom{10}{2}\binom{27}{18} - \binom{33}{24}\binom{10}{1} - \binom{21}{12}\binom{10}{3} + \binom{15}{6}\binom{10}{4} - \binom{10}{5}$ [**B**]. 3º) La suma es 60: aquí el número de veces corresponde al coeficiente de t^{50}. Ahora bien, la suma 60 entre diez dados sólo puede corresponder a la cara seis en cada uno de ellos, por lo que este coeficiente es 1. El número de maneras pedido es la suma de [**A**] + [**B**] + 1.

D 15- ¿Cuántos números pares de tres cifras, tienen sus tres cifras distintas?

Solución: 1º) Se consideran los números sin cero: Las dos primeras cifras corresponden a $V_{8,2} = 56$. Como en cada variación la tercera cifra puede ser $2,\ 4,\ 6,\ 8$, el número total en este caso es: $4 \cdot 56 = 224$. 2º) Se consideran los números cuya decena es cero. Los que empiezan por número impar, pueden terminar en $2,\ 4,\ 6,\ 8$, es decir: $5 \cdot 4 = 20$. Los que empiezan por número par, sólo pueden tener tres terminaciones, es decir: $4 \cdot 3 = 12$. Luego en este 2º caso, el total es 32. 3º) Se consideran los números cuya unidad es cero: $V_{9,2} = 72$.
El número pedido es: $224 + 32 + 72 = 328$.

D 16- ¿De cuántas maneras se pueden sentar alrededor de una mesa circular 8 hombres y 8 mujeres, si sólo se tiene en cuenta el sexo y no la identidad de cada uno?

Solución: Para resolver el problema se trata primero el caso de 1 hombre y 1 mujer (1H y 1M), luego el de 2H y 2M, seguidamente el de 4H y 4M, para terminar con el de 8H y 8M. En cada caso se busca una correspondencia entre las permutaciones con repetición (*PR*) y las permutaciones circulares con repetición (*PCR*). En el caso de 1H y 1M, hay 2 *PR*, que, al cerrarse sobre sí mismas, se corresponden con una sola *PCR*. En el caso de 2H y 2M, las 6 *PR* ($= \frac{4!}{2!2!}$) se corresponden con 2 *PCR*; de ellas, dos provienen de la duplicación de las *PR* del caso anterior y se corresponden, al cerrarse sobre sí mismas, con una sola *PCR*; las otras cuatro *PR*, al cerrarse sobre sí mismas, se corresponden con una sola *PCR*. Por tanto, hay 2 *PCR* que se corresponden, una con 2 *PR* y la otra con 4 *PR*; en resumen: 2 *PCR* y 6 *PR*. En el caso de 4H y 4M, hay 10 *PCR*, de las que 2 (cada una duplica la cadena de una de las 2 *PCR* del caso anterior) se corresponden con 6 *PR*, y las restantes 8 *PCR* se corresponden con 8 *PR* cada una; es decir, hay: $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$ *PR* y 10 *PCR*. El número de *PCR* viene dado, por tanto, por: $2 + \frac{PR - 6}{8} = 2 + \frac{\frac{8!}{4!4!} - 6}{8} = 10$, siendo 2 las que duplican la cadena de las *PCR* del caso anterior, y que en este caso se corresponden con 6 *PR*, y las otras 8 *PCR* se corresponden con 8 *PR* cada una de ellas. En el caso de 8H y 8M, las 10 *PCR* del caso anterior se duplican en tamaño y forman 10 *PCR*, correspondiéndose con 70 *PR*; las restantes *PCR* se corresponden con 16 *PR* cada una de ellas. Por tanto, en total hay: $10 + \frac{\frac{16!}{8!8!} - 70}{16} = 810$ *PCR*, es decir, 810 maneras de sentarse a la mesa. Se puede establecer la siguiente ecuación de recurrencia: $PCR_{2^n} = PCR_{2^{n-1}} + \frac{PR_{2^n} - PR_{2^{n-1}}}{2^n}$, siendo: $PR_{2^n} = \frac{(2^n)!}{(2^{n-1})! \cdot (2^{n-1})!}$. Por tanto, se tiene que: $PR_{2^2} = PR_4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$, $PCR_{2^2} = PCR_4 =$ $= 1 + \frac{6-2}{4} = 2$, $PR_{2^3} = PR_8 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$, $PCR_{2^3} = PCR_8 = 2 + \frac{70-6}{8} = 10$, $PR_{2^4} = PR_{16} = \frac{16!}{8! \cdot 8!} = 12.870$, $PCR_{2^4} = PCR_{16} = 10 + \frac{12.870 - 70}{16} = 810$.

D 17- ¿Cuál es la probabilidad de que al extender en fila recta las 40 cartas de una baraja, no resulten dos reyes juntos?

Solución: Los casos en que hay dos reyes juntos son $V_{4,2}$. Como este hecho puede producirse en la 1ª y 2ª posición, o en la 2ª y 3ª, etc., el número total de casos será $39 \cdot V_{4,2}$. Y éstos se completan con las P_{38}. La probabilidad pedida es: $1 - \frac{39 \cdot V_{4,2} \cdot P_{38}}{P_{40}} = 1 - \frac{39 \cdot 12 \cdot 38!}{40!} = 0,7$.

D 18- Hallar de cuántas maneras se pueden ordenar las caras de seis dados para que su suma sea múltiplo de 15.

Solución: La suma puede ser 15 ó 30. 1º) La suma es 15: Se trata de calcular el coeficiente del término t^{15} en el producto $t^6(1-t^6)^6(1-t)^{-6}$, que es: $-\binom{6}{1}\binom{8}{3} + \binom{14}{9}$ [**A**]. 2º) La suma es 30: En este caso se trata del coeficiente del término t^{30}, que es: $\binom{29}{24} - \binom{6}{1}\binom{23}{18} + \binom{6}{2}\binom{17}{12} - \binom{6}{3}\binom{11}{6} + \binom{6}{4}$ [**B**]. 3º) El número pedido es:

$[\mathbf{A}]+[\mathbf{B}] = 2.122.$

D 19- Dadas n letras, $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$, hallar el número de permutaciones en las que ninguna letra esté en el puesto que le atribuye su subíndice.

Solución: La letra a_1 estará en el lugar 1, en P_{n-1} permutaciones, es decir: $(n-1)!$ Luego estará en un lugar impropio en: $n!-(n-1)!$ Fijando ahora a_2, es: $(n-1)!-(n-2)!$ el número de permutaciones de las $n-1$ restantes letras con a_1 en lugar impropio. Luego el número de permutaciones con a_1 y a_2 en lugar impropio es: $n!-2(n-1)!+(n-2)!$ Razonando similarmente con el resto de las letras hasta a_n, se llega a que el número pedido es: $n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}(n-n)! = n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$
Nota: Para $n=2$, el número pedido es $U_2=1$. Para $n=3$, es $U_3=2$. Para $n=4$, es $U_4=9$. Para $n=5$, es $U_5=44$. Para $n=6$, es $U_6=265$. La ley de recurrencia es: $U_n=nU_{n-1}+(-1)^n$.

D 20- Determinar el número de permutaciones de n elementos, siendo $n\geq 5$, que se pueden formar con 5 elementos dados $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$, de tal modo que todos estos elementos figuren en cada una de aquéllas, sin que aparezca ninguna inversión.

Solución: Hay que combinar 5 elementos en grupos de $n-5$, pudiendo estar repetido todas las veces que se quiera uno cualquiera. Serán: $C'_{5,n-5}=\binom{5+n-5-1}{n-5}=\binom{n-1}{n-5}$, pues éstas vienen ordenadas de la forma pedida.
Nota: $C'_{m,n}=\binom{m+n-1}{n}$.

D 21- Se forman las permutaciones sin repetición con las cifras $0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n$. Hallar la suma de todas ellas. Aplíquese a $n=4$.

Solución: Se forman $(n+1)!$ permutaciones. En cada columna hay $\frac{(n+1)!}{n+1}$ ceros, y otros tantos unos, etc. La suma de una columna es: $\frac{(n+1)!}{n+1}(0+1+2+\ldots+n)=\frac{n\cdot(n+1)!}{2}$. La suma de las $n+1$ columnas es: $\frac{n\cdot(n+1)!}{2}(1+10+100+\ldots+10^n)=\frac{n\cdot(n+1)!}{2}\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}$. Para $n=4$, la suma es: $2\cdot 5!\cdot\frac{99999}{9}=2.666.640.$

D 22- Para formar una clave de telégrafo se pide hallar el número de palabras de cinco letras que pueden formarse con las cinco vocales y diez consonantes, cinco de éstas serán $b,\ c,\ d,\ f,\ g$; las otras cinco serán elegidas a voluntad. Las condiciones de cada palabra son: 1º) Entran siempre dos vocales, iguales o distintas. 2º) Entre estas dos vocales ha de haber una o dos consonantes. 3º) Las consonantes sólo se pueden duplicar cuando ocupan lugares contiguos. 4º) No podrán preceder a la primera vocal, dos consonantes, salvo que sean *bg, bf, cd, cg, cf*, y en ese mismo orden.

Solución: Sólo hay cinco formas de colocar las vocales, expuestas en el cuadro siguiente:

	1	2	3	4	5
1ª	V	C	V	C	C
2ª	V	C	C	V	C
3ª	C	V	C	V	C
4ª	C	V	C	C	V
5ª	C	C	V	C	V

1ª forma) Conservando las dos vocales y la primera consonante. Como las consonantes sólo se pueden repetir cuando están juntas, la primera consonante no se repite. Las dos últimas consonantes dan lugar a $V'_{9,2}=81$. Hay 10 consonantes que pueden estar en el segundo lugar. Luego se tienen: $10\cdot V'_{9,2}=810$. Variando las vocales con repetición, se tiene: $10\cdot V'_{9,2}\cdot V'_{5,2}=810\cdot 25=20.250$. 2ª y 4ª forma) Son análogas a la primera. Cada una tiene 20.250 posibilidades. 3ª forma) Conservando las consonantes se tiene: $V_{10,3}=720$. Variando las vocales se tiene: $720\cdot V'_{5,2}=18.000$. 5ª forma) Las dos primeras consonantes forman 5 grupos

(bg, bf, cd, cg, cf). Para un grupo dado, y conservando las vocales, se pueden formar 8 palabras, pues son 8 las consonantes libres. Variando las vocales se tienen $V'_{5,2}$ Por tanto se tienen: $5 \cdot 8 \cdot V'_{5,2} = 1.000$. Luego el número total de palabras es: $3 \cdot 20.250 + 18.000 + 1.000 = 79.750$.

D 23- Calcular cuántos números capicúas de seis cifras pueden formarse con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, de forma que la lectura de estos números, dé seis cifras (es decir, los números no pueden empezar por cero).

Solución: Con formar la primera mitad del número es suficiente, siempre que no empiece por cero. Luego: $V'_{6,3} = 6^3$. De éstas, la sexta parte comienza por cero. El número pedido es: $\frac{5}{6} \cdot 6^3 = 180$.

D 24- Se dan tres rectas coplanarias a, b, c, y en ellas l, m, n puntos respectivamente, distintos de sus puntos de intersección. ¿Cuántos triángulos pueden formarse tomando tres de los $l+m+n$ puntos?

Solución: Tomando un punto de cada recta se forman $l \cdot m \cdot n$ triángulos. Tomando dos puntos en a, se forman: $\binom{l}{2} \cdot (m+n)$ triángulos. Tomando dos puntos en b, se forman: $\binom{m}{2} \cdot (l+n)$ triángulos. Tomando dos puntos sobre c, se forman: $\binom{n}{2} \cdot (l+m)$ triángulos. En total, se forman: $l \cdot m \cdot n + \binom{l}{2}(m+n) + \binom{m}{2}(l+n) + \binom{n}{2}(l+m)$ triángulos.

D 25- Dados los dos números 4725 y 18369, cuántos números se pueden formar de manera que cada uno tenga tres cifras del primero y otras tres del segundo.

Solución: Del primer número salen $C_{4,3}$ grupos de tres cifras. Del segundo, salen $C_{5,3}$ grupos de tres cifras. Dadas seis cifras diferentes, se pueden formar P_6 números diferentes. El número pedido es: $C_{4,3} \cdot C_{5,3} \cdot P_6 = 28.800$.

D 26- Dados los números $1, 2, 3, \ldots, 3n-1, 3n$, de cuántas maneras pueden elegirse ternas de números distintos cuya suma sea múltiplo de 3.

Solución: 1º) Los tres números elegidos son $\dot{3}$. En este caso hay $\binom{n}{3}$ maneras. 2º) Los tres números elegidos son, uno $\dot{3}$, otro $\dot{3}+1$, y el tercero $\dot{3}+2$. En este caso hay n^3 maneras. 3º) Los tres números son $\dot{3}+1$. Hay $\binom{n}{3}$ maneras. 4º) Los tres números son $\dot{3}+2$. Hay $\binom{n}{3}$ maneras. Por tanto, en total hay: $n^3 + 3\binom{n}{3}$ maneras.

D 27- Dado un producto de n factores, determinar de cuántas maneras se pueden cambiar los signos de los factores sin que por ello se altere el signo del producto.

Solución: Si n es par, el número de maneras es: $\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n}$. Si n es impar, el número de maneras es: $\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n-1}$. Ambas expresiones valen: $2^{n-1} - 1$.

D 28- Sabiendo que $p + q = 1$, hallar el término de mayor valor del desarrollo de $(p+q)^n$.

Solución: 1º) $p > 0$, $q > 0$, se supone que $p > q$. Si el término mayor es el h-ésimo, es decir, $\binom{n}{h-1}p^{n-h+1}q^{h-1}$, se tiene: $\binom{n}{h-2}p^{n-h+2}q^{h-2} < \binom{n}{h-1}p^{n-h+1}q^{h-1} > \binom{n}{h}p^{n-h}q^h$. Operando: $\frac{h-1}{n-h+2} \cdot \frac{p}{q} < 1 > \frac{n-h+1}{h} \cdot \frac{q}{p}$, y sustituyendo el valor $p = 1-q$, se tiene: $q(n+1) < h < q(n+1)+1$. Luego el término pedido es el que ocupa el lugar del entero siguiente a $q(n+1)$. Si $p = q$, el término buscado es el central en el caso de n par ($h = \frac{n}{2}+1$), o los dos centrales en el caso de n impar ($h = \frac{n+1}{2}$, y el siguiente, $h = \frac{n+3}{2}$). 2º) $p > 1$, luego $(p-q)^n$ siendo $p - q = 1$. Sacando p^n factor común, se tiene: $p^n(1 - \frac{q}{p})^n$. Procediendo como en el caso anterior y sin tener en cuenta el signo de cada término, se tiene: $\binom{n}{h-2}(\frac{q}{p})^{h-2} < \binom{n}{h-1}(\frac{q}{p})^{h-1} < \binom{n}{h}(\frac{q}{p})^h$, lo que da: $\frac{n+1}{1+\frac{p}{q}} < h < \frac{n+2+\frac{p}{q}}{1+\frac{p}{q}}$. Luego el término pedido es el que ocupa el lugar del entero siguiente a $\dfrac{n+1}{1+\dfrac{p}{q}}$.

Sección E - DETERMINANTES

E 1- Calcular en forma de producto $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos 3\alpha & \cos 7\alpha \\ \cos\beta & \cos 3\beta & \cos 7\beta \\ \cos\gamma & \cos 3\gamma & \cos 7\gamma \end{vmatrix}$.

Solución: Siendo $x = \cos\alpha$, se tiene que: $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4x^3 - 3x$, $\cos 7\alpha = \cos^7\alpha - 21\cos^5\alpha\sin^2\alpha + 35\cos^3\alpha\sin^4\alpha - 7\cos\alpha\sin^6\alpha = 64x^7 - 112x^5 + ax^3 + bx$.

Luego, $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & 4x_1^3 - 3x_1 & 64x_1^7 - 112x_1^5 + ax_1^3 + bx_1 \\ x_2 & \dots & \dots \\ x_3 & \dots & \dots \end{vmatrix}$. Sumando a la segunda columna la primera multiplicada por 3, restando a la tercera columna la primera multiplicada por b y la nueva segunda multiplicada por $\frac{a}{4}$, se eliminan los monomios de tercero y primer grado. Desarrollando:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & 4x_1^3 & 64x_1^7 - 112x_1^5 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 4x_1^3 & 64x_1^7 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & 4x_1^3 & 112x_1^5 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$= 4 \cdot 64x_1x_2x_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^6 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - 4 \cdot 112x_1x_2x_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^4 \\ 1 & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^4 \\ 1 & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix}$ es el determinante de Vandermonde de x_1^2, x_2^2, x_3^2, es decir: $V(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, y como $\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^6 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)V(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, sustituyendo estos valores en la expresión anterior, se tiene que el determinante dado calculado en forma de producto, es el siguiente: $\Delta = 4 \cdot 64x_1x_2x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)V(x_1^2, x_2^2, x_3^2) - 4 \cdot 112x_1x_2x_3V(x_1^2, x_2^2, x_3^2) =$
$= 64x_1x_2x_3[4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 7]V(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, siendo $x_1 = \cos\alpha$, $x_2 = \cos\beta$, $x_3 = \cos\gamma$. El determinante de Vandermonde, es decir: $V(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = (x_1^2 - x_2^2)(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2)$, se puede desarrollar de la siguiente forma: $x_1^2 - x_2^2 = \cos^2\alpha - \cos^2\beta = (\cos\alpha + \cos\beta)(\cos\alpha - \cos\beta) =$
$= (2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2})(-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}) = -4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$
$= -2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin(\alpha-\beta)$.

Luego: $V(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = -8\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\gamma)$.

E 2- Calcular en forma de producto $\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \sin 3\alpha_1 & \sin 7\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 & \sin 3\alpha_2 & \sin 7\alpha_2 \\ \sin\alpha_3 & \sin 3\alpha_3 & \sin 7\alpha_3 \end{vmatrix}$.

Solución: Siendo $\sin\alpha = x$, se tienen los valores: $\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha = -4x^3 + 3x$, $\sin 7\alpha = -64\sin^7\alpha + 112\sin^5\alpha - 56\sin^3\alpha + 7\sin\alpha = -64x^7 + 112x^5 - 56x^3 + 7x$. Luego se tiene: $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & -4x_1^3 + 3x_1 & -64x_1^7 + 112x_1^5 - 56x_1^3 + 7x_1 \\ x_2 & \dots & \dots \\ x_3 & \dots & \dots \end{vmatrix}$. Restando de la segunda columna la primera multiplicada por 3, y de la tercera columna la primera multiplicada por 7 y la nueva segunda columna multiplicada por 14, con lo que se anulan los monomios de primer grado de la segunda columna, y los de tercero y primer grado de la tercera columna, y desarrollando, se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & -4x_1^3 & -64x_1^7+112x_1^5 \\ x_2 & \dots & \dots \\ x_3 & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & -4x_1^3 & -64x_1^7 \\ x_3 & \dots & \dots \\ x_5 & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & -4x_1^3 & 112x_1^5 \\ x_3 & \dots & \dots \\ x_5 & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$= 4 \bullet 64x_1x_2x_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^6 \\ 1 & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix} - 4 \bullet 112x_1x_2x_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^4 \\ 1 & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^4 \\ 1 & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix}$ es el determinante de Vandermonde de x_1^2, x_2^2, x_3^2, es decir: $V(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, y como además, $\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^6 \\ 1 & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix} = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)V(x_1^2,x_2^2,x_3^2)$, sustituyendo estos valores en la expresión anterior, se tiene que el determinante dado calculado en forma de producto, es el siguiente: $\Delta = 4 \bullet 64x_1x_2x_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)V(x_1^2,x_2^2,x_3^2) - 4 \bullet 112x_1x_2x_3V(x_1^2,x_2^2,x_3^2) =$
$= 64x_1x_2x_3[4(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-7]V(x_1^2,x_2^2,x_3^2)$, siendo $x_1 = \sin\alpha$, $x_2 = \sin\beta$, $x_3 = \sin\gamma$. El determinante de Vandermonde, es decir: $V(x_1^2,x_2^2,x_3^2) = (x_1^2-x_2^2)(x_2^2-x_3^2)(x_3^2-x_1^2)$, se puede desarrollar de la siguiente forma: $x_1^2 - x_2^2 = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = (\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta) =$
$= (2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2})(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$
Luego: $V(x_1^2,x_2^2,x_3^2) = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)$.

E 3- Calcular en forma de producto $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_1 & \cos 2\alpha_1 & \dots & \cos(n-1)\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\alpha_n & \cos 2\alpha_n & \dots & \cos(n-1)\alpha_n \end{vmatrix}$.

Solución: Se tiene que: $\cos n\omega = \cos^n\omega - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\omega\sin^2\omega + \ldots = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \ldots =$
$= 2^{n-1}x^n + ax^{n-2} + bx^{n-4} + cx^{n-6} + \ldots$ (con $x = \cos\omega$). Sustituyendo estos valores en Δ y llamando $x_1 = \cos\alpha_1, \ldots, x_n = \cos\alpha_n$, se tiene que el determinante queda de la siguiente forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 2x_1^2-1 & 2^2x_1^3-3x_1 & 2^3x_1^4+a_2x_1^2+\ldots & \dots & 2^{n-2}x_1^{n-1}+b_1x_1^{n-3}+b_2x_1^{n-5}+\ldots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Sumando a la tercera columna la primera, sumando a la cuarta columna la segunda multiplicada por 3, y procediendo de forma similar con las restantes columnas, se anulan todos los monomios de menor grado de cada columna, con lo que el determinante queda como sigue:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 2x_1^2 & 2^2x_1^3 & 2^3x_1^4 & \dots & 2^{n-2}x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \bullet 2^2 \bullet \ldots \bullet 2^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$= 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & \dots \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} V(x_1 \ldots x_n)$. Para calcular el determinante de Vandermonde se tiene que: $V(x_1 \ldots x_n) = (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\ldots(\cos\alpha_{n-2} - \cos\alpha_{n-1}) =$
$= (-2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2})\ldots(-2\sin\frac{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}}{2}\sin\frac{\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}}{2}) =$
$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \le i < j \le n} \sin\frac{\alpha_i+\alpha_j}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_j}{2}$. Como para $n > 3$, el signo $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ es siempre

positivo, se puede escribir que: $\Delta = 2^{(n-1)^2}\prod_{1\le i<j\le n}\sin\frac{\alpha_i+\alpha_j}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_j}{2}$.

E 4- Calcular en forma de producto $\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \sin 3\alpha_1 & \dots & \sin(2n-1)\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha_n & \sin 3\alpha_n & \dots & \sin(2n-1)\alpha_n \end{vmatrix}$.

Solución: Desarrollando $\sin(2n-1)\theta$ en función de las potencias de $\sin\theta$ y $\cos\theta$, se tiene que: $\sin(2n-1)\theta = \binom{2n-1}{1}\cos^{2(n-1)}\theta\sin\theta - \binom{2n-1}{3}\cos^{2(n-2)}\theta\sin^3\theta + \binom{2n-1}{5}\cos^{2(n-3)}\theta\sin^5\theta - \ldots =$
$= \binom{2n-1}{1}(1-\sin^2\theta)^{n-1}\sin\theta - \binom{2n-1}{3}(1-\sin^2\theta)^{n-2}\sin^3\theta + \binom{2n-1}{5}(1-\sin^2\theta)^{n-3}\sin^5\theta - \ldots$
Operando, se tiene que el coeficiente de $\sin^{2n-1}\theta$ es: $\binom{2n-1}{1}+\binom{2n-1}{3}+\binom{2n-1}{5}+\ldots = 2^{2(n-1)}$. Luego: $\sin(2n-1)\theta = 2^{2(n-1)}\sin^{2n-1}\theta + A\sin^{2n-3}\theta + \ldots$. Introduciendo este valor en el determinante: $\Delta =$

$$= \begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & 2^2\sin^3\alpha_1 + A_1\sin\alpha_1 & 2^4\sin^5\alpha_1 + A_2\sin^3\alpha_1 + \ldots & 2^{2(n-1)}\sin^{2n-1}\alpha_1 + A_n\sin^{2n-3}\alpha_1 + \ldots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha_n & 2^2\sin^3\alpha_n + A_1\sin\alpha_n & 2^4\sin^5\alpha_n + A_2\sin^3\alpha_n + \ldots & 2^{2(n-1)}\sin^{2n-1}\alpha_n + A_n\sin^{2n-3}\alpha_n + \ldots \end{vmatrix}.$$

Restando a la segunda columna la primera multiplicada por A_1, a la tercera la nueva segunda multiplicada por $\frac{A_2}{2^2}$ y procediendo de la misma forma con las siguientes, se anulan los monomios de cada columna distintos del monomio de mayor grado, con lo que el determinante queda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & 2^2\sin^3\alpha_1 & 2^4\sin^5\alpha_1 & \dots & 2^{2(n-1)}\sin^{2n-1}\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha_n & 2^2\sin^3\alpha_n & 2^4\sin^5\alpha_n & \dots & 2^{2(n-1)}\sin^{2n-1}\alpha_n \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\alpha_1\ldots\sin\alpha_n 2^2 2^4\ldots 2^{2(n-1)}\begin{vmatrix} 1 & \sin^2\alpha_1 & \dots & \sin^{2n-2}\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sin^2\alpha_n & \dots & \sin^{2n-2}\alpha_n \end{vmatrix} =$$

$$= 2^{n(n-1)}\sin\alpha_1\ldots\sin\alpha_n V(\sin^2\alpha_1,\ldots,\sin^2\alpha_n) =$$
$$= 2^{n(n-1)}\sin\alpha_1\ldots\sin\alpha_n(\sin^2\alpha_1-\sin^2\alpha_2)\ldots(\sin^2\alpha_{n-1}-\sin^2\alpha_n) =$$
$$= 2^{n(n-1)}\sin\alpha_1\ldots\sin\alpha_n(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)\ldots(\sin\alpha_{n-1}+\sin\alpha_n)(\sin\alpha_{n-1}-\sin\alpha_n) =$$
$$= 2^{n(n-1)}\sin\alpha_1\ldots\sin\alpha_n 2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}2\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\ldots=$$
$$= 2^{n(n-1)}\sin\alpha_1\ldots\sin\alpha_n\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\ldots\sin(\alpha_{n-1}+\alpha_n)\sin(\alpha_{n-1}-\alpha_n) =$$
$$= 2^{n(n-1)}\sin\alpha_1\ldots\sin\alpha_n\prod_{1\le i<j\le n}\sin(\alpha_i+\alpha_j)\sin(\alpha_i-\alpha_j).$$

E 5- Calcular el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \sin(\alpha_1+d) & \sin(\alpha_1+2d) & \dots & \sin(\alpha_1+nd) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha_{n+1} & \sin(\alpha_{n+1}+d) & \sin(\alpha_{n+1}+2d) & \dots & \sin(\alpha_{n+1}+nd) \end{vmatrix}$.

Solución: $\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \sin\alpha_1\cos d + \cos\alpha_1\sin d & \sin(\alpha_1+2d) & \dots & \sin(\alpha_1+nd) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha_{n+1} & \sin\alpha_{n+1}\cos d + \cos\alpha_{n+1}\sin d & \sin(\alpha_{n+1}+2d) & \dots & \sin(\alpha_{n+1}+nd) \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \sin\alpha_1\cos d & \sin(\alpha_1+2d) & \dots & \sin(\alpha_1+nd) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha_{n+1} & \sin\alpha_{n+1}\cos d & \sin(\alpha_{n+1}+2d) & \dots & \sin(\alpha_{n+1}+nd) \end{vmatrix} +$$

$+\begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\sin d & \sin(a_1+2d) & \dots & \sin(\alpha_1+nd) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha_{n+1} & \cos\alpha_{n+1}\sin d & \sin(\alpha_{n+1}+2d) & \dots & \sin(\alpha_{n+1}+nd) \end{vmatrix} = A+B$. El determinante A es nulo, pues su segunda columna es igual a la primera multiplicada por $\cos d$. El determinante B también es nulo, pues su tercera columna es igual a la suma de la primera multiplicada por $\cos d$

más la segunda multiplicada por $\frac{\sin 2d}{\sin d}$. Por tanto: $\Delta = 0$.

E 6- Hallar el valor del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}+2a\right) & \dots & \cos\left(\frac{\pi}{2}+2na\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) & \cos\frac{3\pi}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{2}+b\right) & \dots & \cos\left(\frac{\pi}{2}+(n-1)b\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-2a\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right) & \cos\frac{5\pi}{2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-2na\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}-(2n-1)b\right) & \dots & \dots & \cos\frac{(2n+1)\pi}{2} \end{vmatrix}$$

Solución: El determinante es hemisimétrico pues los elementos de la diagonal principal son nulos, y los conjugados son de signo cambiado. Como el determinante es de orden impar, su valor es cero. En efecto, si se cambia el signo de todos sus elementos, el valor del nuevo determinante Δ' es $(-1)^{2n+1}\Delta = -\Delta$. Pero como es el mismo determinante que Δ (cambiadas las filas por columnas y viceversa), se tiene que: $-\Delta = \Delta$, luego $\Delta = 0$.

E 7- Calcular en forma de producto $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$.

Solución: Sea el siguiente sistema de n ecuaciones con n incógnitas: $x_1 + x_2a_1 + x_3a_1^2 + \ldots + x_{n-1}a_1^{n-2} + x_na_1^{n-1} = a_1^n$ y sus homólogas para $a_2,\ldots,a_n$. Sea la función $f(t)$ de grado $n+1$, cuyas $n+1$ raíces son las siguientes: $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ b$, es decir que: $f(t) = t^{n+1} - x_nt^{n-1} - x_{n-1}t^{n-2} - \ldots - x_2t - x_1 = (t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n)(t-b) =$
$= t^{n+1} - S_1t^n + S_2t^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}S_{n-1}t^2 + (-1)^nS_nt + (-1)^{n+1}S_{n+1}$. Igualando coeficientes, se tiene: $S_1 = 0 = a_1 + \ldots + a_n + b$, es decir: $b = -(a_1 + \ldots + a_n)$. Aplicando la regla de Cramer al sistema de n ecuaciones y n incógnitas anteriormente formado, para hallar la incógnita b, se tiene:

$$b = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & -a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & -a_n^n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \frac{-\Delta}{V(a_1,\ldots,a_n)},$$

siendo $V(a_1,\ldots,a_n)$ el determinante de Vandermonde de $a_1,\ldots,a_n$. De donde: $\Delta = -bV(a_1,\ldots,a_n) = (a_1+\ldots+a_n)V(a_1,\ldots,a_n) = (a_1+\ldots+a_n)\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_i - a_j)$.

E 8- Calcular el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3^2 & 5^2 & 7^2 \\ 3^2 & 5^2 & 7^2 & 9^2 \\ 5^2 & 7^2 & 9^2 & 11^2 \\ 7^2 & 9^2 & 11^2 & 13^2 \end{vmatrix}$ reduciendo a cero los elementos de la primera columna, salvo el a_{11}.

Solución: Resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3^2 + 5^2x + 7^2y + 9^2z &= 0 \\ 5^2 + 7^2x + 9^2y + 11^2z &= 0 \\ 7^2 + 9^2x + 11^2y + 13^2z &= 0 \end{aligned}$$

se obtienen los siguientes valores: $x = -3,\quad y = 3,\quad z = -1$. Por tanto, aplicándolos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-3\cdot 9+3\cdot 25-49 & 9 & 25 & 49 \\ 9-3\cdot 25+3\cdot 49-81 & 25 & 49 & 81 \\ 25-3\cdot 40+3\cdot 81-121 & 49 & 81 & 121 \\ 49-3\cdot 81+3\cdot 121-169 & 81 & 121 & 169 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 & 25 & 49 \\ 0 & 25 & 49 & 81 \\ 0 & 49 & 81 & 121 \\ 0 & 81 & 121 & 169 \end{vmatrix} = 0.$$

Nota: El elemento a_{11} se anula a la vez que los restantes elementos de la columna.

E 9- Desarrollar el determinante $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ de la forma más simplificada posible.

Solución: $(af - be + dc)^2$.

E 10- Desarrollar por una fila y una columna el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} a & x & y & z & t \\ x & b & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & c & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & d & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}$.

Solución:

$$\Delta = a\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix} - x^2\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{vmatrix} + xy\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} - xz\begin{vmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{vmatrix} + xt\begin{vmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+yx\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} - y^2\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{vmatrix} + yz\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{vmatrix} - yt\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - zx\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{vmatrix} +$$

$$+zy\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{vmatrix} - z^2\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & e \end{vmatrix} + zt\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + tx\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} - ty\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+tz\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - t^2\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcde - x^2cde - y^2bde - z^2bce - t^2bcd.$$

E 11- Desarrollar en forma de producto el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$.

Solución: $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

E 12- Efectuar el producto $A \times B$, y seguidamente desarrollar el determinante producto:

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & -d \\ a & -b & c & -d \\ a & b & -c & -d \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} d & -c & b & -a \\ -d & -c & b & a \\ d & c & b & a \\ d & -c & -b & a \end{vmatrix}.$$

Solución: Operando, los determinantes A y B son: $A = abcd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$;

$$B = abcd\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \quad A \bullet B = a^2b^2c^2d^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a^2b^2c^2d^2\begin{vmatrix} 1-1+1-1 & -1-1+1+1 & 1+1+1+1 & 1-1-1+1 \\ -1-1+1+1 & 1-1+1-1 & -1+1+1-1 & -1-1-1-1 \\ 1+1+1+1 & -1+1+1-1 & 1-1+1-1 & 1+1-1-1 \\ 1-1-1+1 & -1-1-1-1 & 1+1-1-1 & 1-1+1-1 \end{vmatrix} =$$

$$= a^2b^2c^2d^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 256a^2b^2c^2d^2.$$

E 13- Desarrollar el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 9 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 9 & -12 & -4 \end{vmatrix}$ reduciéndolo por condensación a uno de tercer orden (pivote a_{11}).

Solución:

$$\Delta = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} -7 & 7 & -20 & -39 \\ 13 & 17 & -4 & 15 \\ -3 & -6 & -30 & -54 \\ 18 & 30 & -24 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^3 7^2}\begin{vmatrix} -210 & 288 & 402 \\ 63 & 150 & 261 \\ -336 & 528 & 660 \end{vmatrix} = \frac{8}{7}\begin{vmatrix} -10 & 48 & 134 \\ 3 & 25 & 87 \\ -4 & 22 & 55 \end{vmatrix} = 3.440.$$

E 14- Sabiendo que $\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$ es el determinante adjunto de δ, hallar éste, es decir, el a_{ij}.

Solución: $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Un menor principal A de orden $(n-1)$ de Δ es igual a δ^{n-2} multiplicado por el complementario del menor a, homólogo de A en δ, que es el elemento

$$a_{nn} = \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{n,n-1} \end{vmatrix}}{\sqrt[n-1]{\Delta^{n-2}}}.$$ Luego, $a_{ij} = (-1)^{i+j} \sqrt[n-1]{\frac{\left[A'ij\right]^{n-1}}{\Delta^{n-2}}}$, siendo A'_{ij} el adjunto de A_{ij} en Δ.

Nota: $\delta = \sqrt[n-1]{\Delta}$.

E 15- El determinante δ está definido de tal modo que cada elemento es igual a su adjunto. Sabiendo que es distinto de cero, se pide: 1º) Valor. 2º) Número de elementos arbitrarios.

Solución: El determinante adjunto Δ de otro determinante δ de orden n, es igual a éste elevado al exponente $n-1$, es decir: $\Delta = \delta^{n-1}$. Como $\Delta = \delta$, $\delta^{n-2} = 1$. Luego para n impar, $\delta = 1$. Para n par, $\delta = \pm 1$. Al desarrollar δ por los elementos de una fila, se tienen $2n$ ecuaciones con n^2 incógnitas, por lo que se pueden fijar arbitrariamente $(n^2 - 2n)$ elementos.

E 16- Desarrollar el determinante de orden n, $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & a & a & \dots & a \\ a & 1+a & a & \dots & a \\ a & a & 1+a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & 1+a \end{vmatrix}$.

Solución: Restando a cada columna la inmediatamente anterior, se tiene que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & -1 & \dots & 0 \\ a & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & -1 & \dots & 0 \\ a & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + a\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$ Sumando a la primera fila de este determinante todas las restantes filas: $\Delta = 1 + a\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 + an$.

E 17- Hallar la raíz cuadrada del desarrollo de $\begin{vmatrix} 0 & -x & -y & -z & -t & -u \\ x & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ y & 1 & 0 & -5 & -6 & -7 \\ z & 2 & 5 & 0 & -8 & -9 \\ t & 3 & 6 & 8 & 0 & -10 \\ u & 4 & 7 & 9 & 10 & 0 \end{vmatrix}$.

Solución: El determinante dado es un determinante hemisimétrico de orden par, por lo que:

$$\pm\sqrt{\Delta} = x \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & -5 & -6 & -7 \\ 5 & 0 & -8 & -9 \\ 6 & 8 & 0 & -10 \\ 7 & 9 & 10 & 0 \end{vmatrix}} - y \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & -8 & -9 \\ 3 & 8 & 0 & -10 \\ 4 & 9 & 10 & 0 \end{vmatrix}} + z\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -6 & -7 \\ 3 & 6 & 0 & -10 \\ 4 & 7 & 10 & 0 \end{vmatrix}} -$$

$$-t\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -5 & -7 \\ 2 & 5 & 0 & -9 \\ 4 & 7 & 9 & 0 \end{vmatrix}} + u\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -5 & -6 \\ 2 & 5 & 0 & -8 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \end{vmatrix}}$$. Luego: $\sqrt{\Delta} = \pm(52x - 25y + 13z - 15t + 11u)$.

E 18- Calcular el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & -6 & 3 & 9 & 10 \\ -4 & -7 & -9 & 4 & 11 \\ -5 & -8 & -10 & -11 & 5 \end{vmatrix}$.

Solución: 20.655.

E 19- Desarrollar el determinante $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

Solución: $a_1a_2\dots a_n + \underbrace{a_1a_2\dots a_{n-1} + \dots + a_2a_3\dots a_n}_{n \text{ sumandos}}$.

E 20- Desarrollar el determinante de orden n, $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$.

Solución: El determinante dado es igual a: $\Delta = \begin{vmatrix} b+(a-b) & b & \dots & b \\ b & b+(a-b) & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & b+(a-b) \end{vmatrix} =$

$= (a-b)^n + n(a-b)^{n-1}b + (a-b)^{n-2}\begin{vmatrix} b & b \\ b & b \end{vmatrix} + \dots = (a-b)^n + n(a-b)^{n-1}b =$

$= (a-b)^{n-1}[a + (n-1)b]$.

E 21- Desarrollar el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 4 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n+1 \end{vmatrix}$.

Solución: $\Delta = \begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2+1 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 3+1 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n+1 \end{vmatrix} =$

$= 1 + n + (n-1) + \dots + 1 + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \dots + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n \end{vmatrix} =$

$= \dfrac{n+1}{2} n + 1 = \dfrac{n^2+n+2}{2}$.

E 22- Hallar la característica de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 15 & 21 & -6 & 18 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & -4 & -17 & 10 & -9 \\ 1 & 5 & 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: 5.

E 23- Calcular el determinante de orden n: $\begin{vmatrix} x & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solución: Sustituyendo en el determinante $x = a + y$, se tiene que: $\Delta = \begin{vmatrix} a+y & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & b & \dots & b \\ 0 & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & \dots & a \end{vmatrix}$. El primer sumando (ver problema E 20) vale: $(a-b)^{n-1}[a + (n-1)b]$. El segundo es igual a: $y \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix}$, siendo este determinante de orden $n-1$. Por tanto, el segundo sumando vale: $(x-a)(a-b)^{n-2}[a + (n-2)b]$. Luego: $\Delta = (a-b)^{n-2}[x[a + (n-2)b] - (n-1)b^2]$.

E 24- Calcular la característica de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 8 & 12 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución: 4.

E 25- Determinar para qué valores de n es compatible el siguiente sistema:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1\cos\alpha_1 & + & x_2\cos\alpha_2 & + & \dots & + & x_n\cos\alpha_n & = & 0 \\ x_1\cos(\alpha_1+\beta) & + & x_2\cos(\alpha_2+\beta) & + & \dots & + & x_n\cos(\alpha_n+\beta) & = & 0 \\ \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & = & 0 \\ x_1\cos(\alpha_1+(n-1)\beta) & + & x_2\cos(\alpha_2+(n-1)\beta) & + & \dots & + & x_n\cos(\alpha_n+\beta) & = & 0 \end{array}$$

Solución: Se trata de un sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas. Para que el sistema sea compatible, el determinante de los coeficientes ha de ser nulo, es decir que: $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \dots & \cos\alpha_n \\ \cos(\alpha_1+\beta) & \cos(\alpha_2+\beta) & \dots & \cos(\alpha_n+\beta) \\ \cos(\alpha_1+2\beta) & \cos(\alpha_2+2\beta) & \dots & \cos(\alpha_n+2\beta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_1+(n-1)\beta) & \dots & \dots & \cos(\alpha_n+(n-1)\beta) \end{vmatrix} = 0$. Sumando a la primera fila la tercera, y aplicando que $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$, operando se tiene: $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1+\cos(\alpha_1+2\beta) & \cos\alpha_2+\cos(\alpha_2+2\beta) & \dots & \cos\alpha_n+\cos(\alpha_n+2\beta) \\ \cos(\alpha_1+\beta) & \cos(\alpha_2+\beta) & \dots & \cos(\alpha_n+\beta) \\ \cos(\alpha_1+2\beta) & \cos(\alpha_2+2\beta) & \dots & \cos(\alpha_n+2\beta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_1+(n-1)\beta) & \dots & \dots & \cos(\alpha_n+(n-1)\beta) \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 2\cos(\alpha_1+\beta)\cos\frac{\beta}{2} & 2\cos(\alpha_2+\beta)\cos\frac{\beta}{2} & \dots & 2\cos(\alpha_n+\beta)\cos\frac{\beta}{2} \\ \cos(\alpha_1+\beta) & \cos(\alpha_2+\beta) & \dots & \cos(\alpha_n+\beta) \\ \cos(\alpha_1+2\beta) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_1+(n-1)\beta) & \dots & \dots & \cos(\alpha_n+(n-1)\beta) \end{vmatrix} =$$

$= (2\cos\frac{\beta}{2})^n \begin{vmatrix} \cos(\alpha_1+\beta) & \cos(\alpha_2+\beta) & \dots & \cos(\alpha_n+\beta) \\ \cos(\alpha_1+\beta) & \cos(\alpha_2+\beta) & \dots & \cos(\alpha_n+\beta) \\ \cos(\alpha_1+2\beta) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_1+(n-1)\beta) & \dots & \dots & \cos(\alpha_n+(n-1)\beta) \end{vmatrix} = 0$, por ser iguales las dos primera filas. Luego para $n > 2$ el determinante de los coeficientes es nulo y el sistema es compatible.

E 26- Sabiendo que el determinante $\begin{vmatrix} x^2+2 & 4x+2 & 2x+2 \\ 4x+2 & x^2+13 & 4x+3 \\ 2x+2 & 4x+3 & x^2+5 \end{vmatrix}$ es el cuadrado de un determinante de la forma $\begin{vmatrix} x & a & b \\ c & x & d \\ e & f & x \end{vmatrix}$, hallar $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$.

Solución: $\begin{vmatrix} x & a & b \\ c & x & d \\ e & f & x \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x^2+a^2+b^2 & cx+ax+bd & ex+af+bx \\ cx+ax+bd & c^2+x^2+d^2 & ce+fx+dx \\ ex+af+bx & ce+fx+dx & e^2+f^2+x^2 \end{vmatrix}$. Igualando los elementos de ambos determinantes, se obtiene: $a = b = e = 1$; $d = f = 2$; $c = 3$.

E 27- Hallar el valor de un determinante de Vandermonde sabiendo que cuando todos sus elementos aumentan en cuatro unidades, se convierte en otro que vale veinte unidades más que el primero.

Solución: Sea el determinante de Vandermonde cuyo valor se pide, el siguiente: $V(a,b,c,\dots) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ a & b & c & \dots \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)\dots(b-c)\dots$ Sea Δ el determinante formado al sumar 4 unidades a cada elemento del determinante de Vandermonde, es decir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+4 & 1+4 & 1+4 & \dots \\ a+4 & b+4 & c+4 & \dots \\ a^2+4 & b^2+4 & c^2+4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1+4 & 1+4 & \dots \\ a & b+4 & c+4 & \dots \\ a^2 & b^2+4 & c^2+4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1+4 & 1+4 & \dots \\ 4 & b+4 & c+4 & \dots \\ 4 & b^2+4 & c^2+4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+4 & \dots \\ a & b & c+4 & \dots \\ a^2 & b^2 & c^2+4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1+4 & \dots \\ a & 4 & c+4 & \dots \\ a^2 & 4 & c^2+4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1+4 & \dots \\ 4 & b & c+4 & \dots \\ 4 & b^2 & c^2+4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Siguiendo con el desdoblamiento de los determinantes, se obtiene finalmente que: $\Delta = V(a,b,c\dots) + 4V(a,b,\dots,1) +\dots+ 4V(a,1,c,\dots) +\dots+ 4V(1,b,c,\dots)$.
Como: $V(a,b,\dots,1) +\dots+ V(a,1,c,\dots) +\dots+ V(1,b,c,\dots) = V(a,b,c,\dots)$,
y como: $\Delta = V(a,b,c\dots) + 20$,. se tiene que: $V(a,b,c,\dots) + 4V(a,b,c,\dots) = 20$.
Luego: $V(a,b,c,\dots) = 5$.

E 28- Calcular el determinante de orden n cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a a^2-b^2 y los demás a $a+b$. Una vez obtenida la fórmula general, aplíquese al caso en que $a = 3, b = 1, n = 7$.

Solución: $\Delta = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & a+b & \dots & a+b \\ a+b & a^2-b^2 & \dots & a+b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+b & a+b & \dots & a^2-b^2 \end{vmatrix} = (a+b)^n \begin{vmatrix} a-b & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a-b & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & a-b \end{vmatrix} =$

$$= (a+b)^n \begin{vmatrix} (a-b-1)+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (a-b-1)+1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & (a-b-1)+1 \end{vmatrix} =$$

$= (a+b)^n\left[(a-b-1)^n + n(a-b-1)^{n-1}\right] = (a+b)^n(a-b-1)^{n-1}(a-b-1+n).$ Para los valores dados: $\Delta = 4^7(1+7) = 131.072$.

E 29- Hallar el valor del determinante $\Delta = \begin{vmatrix} a & ab & ab^2 & \dots & ab^{n-1} \\ ab^{n-1} & a & ab & \dots & ab^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ab & ab^2 & ab3 & \dots & a \end{vmatrix}$.

Solución:

$$\Delta = a^n \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b^{n-1} \\ b^{n-1} & 1 & \dots & b^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b^2 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^n}{b} \begin{vmatrix} b & b & \dots & b^{n-1} \\ b^n & 1 & \dots & b^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^2 & b^2 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^n}{b} \begin{vmatrix} 0 & b & \dots & b^{n-1} \\ b^n-1 & 1 & \dots & b^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b^2 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=\dots= \frac{a^n}{b^{n-1}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & b^{n-1} \\ b^n-1 & 0 & \dots & b^{n-2} \\ 0 & b^n-1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^n}{b^{n-1}}(-1)^{n-1}b^{n-1} \begin{vmatrix} b^n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b^n-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b^n-1 \end{vmatrix} =$$

$= (-1)^{n-1}a^n(b^n-1)^{n-1} = a^n(1-b^n)^{n-1}$.

E 30- Desarrollar por la regla de Laplace (menores de 2º orden) el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Solución: Todo determinante es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando todos los menores de orden n que se pueden formar con n líneas paralelas, por sus adjuntos respectivos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ d_1 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}.$$

E 31- Tras colocar el elemento $a_{23} = 0$ en el lugar a_{11}, desarrollar por la 1ª columna y la 1ª fila el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 7 & 9 \\ -1 & 3 & 8 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & -6 & 4 & 11 \\ -5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Solución: Trasladando la tercera columna a la primera y la primera fila a la quinta, se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 8 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ -6 & 6 & 3 & 4 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 11 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 8 \cdot 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 & 11 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 8 \cdot 7 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 11 \\ -5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} -$$

$$-8 \cdot 9 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 6 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 6 \cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot 7 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} -$$

$$-6 \cdot 9 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 11 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 11 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot 7 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 11 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} -$$

$$-1 \cdot 9 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 11 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 11 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot 7 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 11 \\ -5 & 6 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+2 \cdot 9 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

E 32- Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x-a & x-a & x-a & x-a & \dots & x-a \\ x-a & 2x-(a+b) & 2x-(a+b) & 2x-(a+b) & \dots & 2x-(a+b) \\ x-a & 2x-(a+b) & 3x-(a+b+c) & 3x-(a+b+c) & \dots & 3x-(a+b+c) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x-a & 2x-(a+b) & 3x-(a+b+c) & 4x-(a+b+c+d) & \dots & nx-(a+b+c+\dots+l) \end{vmatrix}$$

Solución: Restando de cada columna la inmediata anterior, se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x-a & x-b & 0 & \dots & 0 \\ x-a & x-b & x-c & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x-a & x-b & x-c & \dots & x-l \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)\dots(x-l).$$

E 33- Desarrollar el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \dots & (n+1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2 & (n+1)^2 & \dots & (2n-1)^2 \end{vmatrix}$.

Solución: Restando a cada columna la anterior, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \dots & 2n-1 \\ 4 & 5 & \dots & 2n+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2 & 2n+1 & \dots & 4n-3 \end{vmatrix}$. Restando a cada fila la anterior, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \dots & 2n-1 \\ 3 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 2 & \dots & 2 \end{vmatrix}$. Restando a la tercera fila y siguientes, la anterior, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \dots & 2n-1 \\ 3 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$. De donde: $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8$, $\Delta_{n>3} = 0$.

Sección F - DIVISIBILIDAD ALGEBRAICA

F 1- Un polinomio $f(x)$ dividido por $x-2$ da resto 1 y dividido por $x+3$ da resto 2. Hallar el resto que dará al dividirlo por $(x-2)(x+3)$.

Solución: $-\frac{x}{5}+\frac{7}{5}$.

F 2- Dado el polinomio $f(x)$, de grado ≥ 3, hallar el resto de dividirlo por $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Solución: Sea el polinomio $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)Q(x)+mx^2+nx+p$, donde $Q(x)$ representa una función de x de grado ≥ 1. El resto de dividirlo por $(x-a)$ es: $f(a)=\alpha=ma^2+na+p$. El resto de dividirlo por $(x-b)$ es: $f(b)=\beta=mb^2+nb+p$. Y el de dividirlo por $(x-c)$ es: $f(c)=\gamma=mc^2+nc+p$. Resolviendo el sistema se obtienen los valores de m, n, p. El resto de dividir el polinomio $f(x)$ por $(x-a)(x-b)(x-c)$ es: $\frac{\alpha(b-a)+\beta(c-a)+\gamma(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}x^2+$ $+\frac{\alpha(c^2-b^2)+\beta(a^2-c^2)+\gamma(b^2-a^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}x+\frac{\alpha bc(b-a)+\beta ac(c-a)+\gamma ab(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$.

F 3- Sabiendo que el polinomio $x^6+4x^5-2x^4-10x^3+13x^2-6x+1$ es un cuadrado exacto, hallar su raíz cuadrada.

Solución: Sea el polinomio de tercer grado: x^3+ax^2+bx+1. Su cuadrado es: $(x^3+ax^2+bx+1)^2=x^6+2ax^5+(2b+a^2)x^4+(2+2ab)x^3+(2a+b^2)x^2+2bx+1$. Igualando coeficientes con el polinomio dado y resolviendo las ecuaciones, se tiene que: $a=2$, $b=-3$, con lo que el polinomio raíz cuadrada es: x^3+2x^2-3x+1.

F 4- Determinar un polinomio de 5º grado $P(x)$, sabiendo que es múltiplo de $(x+1)$ y de $(x+2)$, que disminuido en 1, es divisible por $(x-1)$, que disminuido en 2, lo es por $(x-2)$, y que disminuido en 3, lo es por $(x-3)$.

Solución: $P(x)=a(x+1)(x+2)(x^3+mx^2+nx+p)$. Por las condiciones dadas, se tiene: $P(1)-1=a\cdot 2\cdot 3(1+m+n+p)-1=0$, $P(2)-2=a\cdot 3\cdot 4(8+4m+2n+p)-2=0$, $P(3)-3=a\cdot 4\cdot 5(27+9m+3n+p)-3=0$. Las soluciones de este sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, son: $m=-\frac{1+720a}{120a}$, $n=\frac{1+440a}{40a}$, $p=\frac{3-120a}{20a}$. Luego: $P(x)=a(x+1)(x+2)(x^3-\frac{1+720a}{120a}x^2+\frac{1+440a}{40a}x+\frac{3-120a}{20a})=$ $=ax^5-\frac{360a+1}{120}x^4-5ax^3+\frac{360a+5}{24}x^2+\frac{8a+1}{2}x-\frac{120a-3}{10}$.

F 5- Descomponer la expresión $18x^2-2y^2-35z^2+9xy-9xz+19yz$ en el producto de $3x+2y+mz$ por otra expresión lineal. ¿Cuál debe ser el valor de m?

Solución: Sea la otra expresión lineal: $6x-y+az$. Por tanto: $(3x+2y+mz)(6x-y+az)=$ $=18x^2+9xy+(6m+3a)xz-2y^2+(-m+2a)yz+maz^2$. Igualando coeficientes con la ecuación dada y resolviendo las ecuaciones, se tiene: $a=7$, $m=-5$.

F 6- Hallar el $m.c.d.$ de los polinomios $x^4-6x^3+19x^2-30x+25$ y $4x^3-18x^2+38x-30$.

Solución: x^2-3x+5.

F 7- Determinar el valor de a para que sea de 2º grado el $m.c.d.$ de los polinomios $A(x)=x^5+x^4-17x^3+14x^2+4x-3$ y $B(x)=x^3+(a-1)x^2+(3-a)x-3$.

Solución: Operando, se tiene que los polinomios son: $A(x)=(x-1)(x-3)(x^3+5x^2-1)$, $B(x)=(x-1)(x^2+ax+3)=(x-1)(x-\frac{-a+\sqrt{a^2-12}}{2})(x-\frac{-a-\sqrt{a^2-12}}{2})$. Luego el $m.c.d.$ es: $(x-1)(x-\frac{-a\pm\sqrt{a^2-12}}{2})$. Por tanto: $\frac{-a\pm\sqrt{a^2-12}}{2}=3$, $a=-4$, siendo el $m.c.d=(x-1)(x-3)$.

F 8- Hallar las raíces comunes a los siguientes polinomios $A(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 + x - 3$ y $B(x) = x^6 + 2x^4 - 8x^2 + 5$.

Solución: $m.c.d.(A,B) = x^2 - 1$. Por tanto, las raíces comunes son 1 y -1.

F 9- Hallar un polinomio de 4º grado tal que $f(x+m) - f(x)$ sea idénticamente igual a x^3, sabiendo que $f(0) = 0$.

Solución: Sea $f(x)$ el polinomio buscado: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Se tiene que: $f(x+m) = a(x+m)^4 + b(x+m)^3 + c(x+m)^2 + d(x+m) + e$. Desarrollando esta expresión se tiene: $f(x+m) - f(x) = 4amx^3 + (6am^2 + 3bm)x^2 + (4am^3 + 3bm^2 2cm)x + am^4 + bm^3 + cm^2 + dm$. Haciendo $am = 1$, igualando a cero los demás coeficientes y resolviendo las ecuaciones, se obtiene: $f(x) = \dfrac{1}{4m}x^4 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{m}{4}x^2$.

F 10- Dados los polinomios $P_1 = x^5 + 7x^4 - 10x^3 + 2x^2 - 8x + 5$ y $P_2 = x^6 - 50x + 3$, escribirlos según las potencias de $(x-2)$ aplicando Horner.

Solución:

	1	7	–10	2	–8	5
2)		2	18	16	36	56
	1	9	8	18	28	(61
2)		2	22	60	156	
	1	11	30	78	(184	
2)		2	26	112		
	1	13	56	(190		
2)		2	30			
	1	15	(86			
2)		2				
	1	(17				

De donde se obtiene: $P_1 = (x-2)^5 + 17(x-2)^4 + 86(x-2)^3 + 190(x-2)^2 + 184(x-2) + 61$. Procediendo similarmente con el segundo polinomio se obtiene:
$P_2 = (x-2)^6 + 12(x-2)^5 + 60(x-2)^4 + 160(x-2)^3 + 240(x-2)^2 + 142(x-2) - 33$.

F 11- Hallar el resto de dividir $x^{1000} + 3x^{900} - 5x^{101} + x + 2$ por $x^{10} - 1$.

Solución: Haciendo $x^{10} = z$, se tiene: $x^{1000} + 3x^{900} - 5x^{101} + x + 2 = z^{100} + 3z^{90} - 5xz^{10} + x + 2$, cuyo resto al dividirlo por $z - 1$, es: $1 + 3 - 5x + x + 2 = -4x + 6$.

F 12- Aplicando la regla de la división abreviada, efectuar las divisiones:
1º) $(x^8 - 4x^4 - 3) \div (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)$.
2º) $(x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 8x + 1) \div (2x^3 + 2x^2 + x + 1)$.

Solución: 1ª división:

			1	0	0	0	–4	0	0	0	–3
				2	4	2	–6	–22	–24	36	–12
					–3	–6	–3	9	33	–11	
1	–3	2				1	2	1	–3		
			1	2	1	–3	–11	–12	6	25	–15

Luego el cociente es: $x^5 + 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 11x - 12$, y el resto: $6x^2 + 25x - 15$.

2ª división:

			1	-3	4	-6	8	1
				-1	4	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{4}$
-1	-1	-2			$-\frac{1}{2}$	2	2	
						$-\frac{1}{2}$		
		2	1	-4	$\frac{15}{2}$	-12	$\frac{25}{4}$	$-\frac{11}{4}$
			$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{15}{4}$			

Luego el cociente es: $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{15}{4}$, y el resto: $-12x^2 + \frac{25}{4}x - \frac{11}{4}$.

F 13- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{(x+3)(x-2)^2(x+1)^2}$.

Solución: $\dfrac{\frac{11}{100}}{x+3} + \dfrac{\frac{1}{9}}{(x-2)^3} + \dfrac{\frac{8}{135}}{(x-2)^2} + \dfrac{\frac{7}{675}}{x-2} + \dfrac{\frac{7}{54}}{(x+1)^2} - \dfrac{\frac{13}{108}}{x+1}$.

F 14- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^4 - 2x^3 + x - 1}{(x^2+1)^2(x-2)^2}$.

Solución: $\dfrac{\frac{1}{25}}{(x-2)^2} + \dfrac{\frac{37}{125}}{x-2} + \dfrac{\frac{9}{25}x - \frac{12}{25}}{(x^2+1)^2} + \dfrac{\frac{-37}{125}x + \frac{46}{125}}{x^2+1}$.

F 15- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^4 + 2x^3 - 3}{(x^2+x+1)^3(x-2)}$

Solución: $\dfrac{29}{343(x-2)} + \dfrac{1}{343}\left[\dfrac{-49x - 196}{(x^2+x+1)^3} + \dfrac{140x + 420}{(x^2+x+1)^2} + \dfrac{-29x - 87}{x^2+x+1}\right]$.

F 16- Se sabe que el polinomio $f(x)$ al dividirlo por $x^2 + 1$ da resto $x + 1$, y que al dividirlo por $x^2 - 3x + 2$ da resto $3x - 2$. Hallar el resto que dará al dividirlo por $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Solución: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x^2+1)(x^2 - 3x + 2) = (x^2+1)(x-1)(x-2)$. El resto que se pide es: $\frac{7}{10}x^3 - \frac{12}{10}x^2 + \frac{17}{10}x - \frac{2}{10}$.

F 17- Dividir $(x^9 - 5x^5 + 6x^2 - 1) \div (2x^2 - 3x + 1)$.

Solución: El cociente es: $\frac{1}{2}x^7 + \frac{3}{4}x^6 + \frac{7}{8}x^5 + \frac{15}{16}x^4 - \frac{49}{32}x^3 - \frac{177}{64}x^2 - \frac{433}{128}x - \frac{177}{256}$, y el resto: $\frac{335}{256}x - \frac{79}{256}$.

F 18- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^5 - 4x^2 + 6}{(x-1)^4(x^2 - 3x + 1)}$.

Solución: $\dfrac{\frac{26}{5}\sqrt{5} - 5}{x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}} - \dfrac{\frac{26}{5}\sqrt{5} + 5}{x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}} - \dfrac{3}{(x-1)^4} + \dfrac{6}{(x-1)^3} - \dfrac{15}{(x-1)^2} + \dfrac{11}{x-1}$.

F 19- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^4 - 3x^2 + 5}{(x-2)^6}$.

Solución: $\dfrac{9}{(x-2)^6} + \dfrac{20}{(x-2)^5} + \dfrac{21}{(x-2)^4} + \dfrac{8}{(x-2)^3} + \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

F 20- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 7}{(x-2)^3(x+5)}$.

Solución: $\dfrac{-\frac{1}{7}}{(x-2)^3} - \dfrac{\frac{27}{49}}{(x-2)^2} + \dfrac{\frac{125}{343}}{x-2} + \dfrac{\frac{218}{343}}{x+5}$.

F 21- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{4x^5 - 7x + 1}{(x+2)^4(x-3)}$.

Solución: $\dfrac{\frac{113}{5}}{(x+2)^4} - \dfrac{\frac{1678}{25}}{(x+2)^3} + \dfrac{\frac{9678}{125}}{(x+2)^2} - \dfrac{\frac{10322}{625}}{x+2} + \dfrac{\frac{952}{625}}{x-3}$.

F 22- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^2 - 1}{(x+2)^3}$.

Solución: $\dfrac{3}{(x+2)^3} - \dfrac{4}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{x+2}$.

F 23- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^2 - x\sqrt{a} + 3}{(x+\sqrt{a})^5}$.

Solución: $\dfrac{2a+3}{(x+\sqrt{a})^5} - \dfrac{3\sqrt{a}}{(x+\sqrt{a})^4} + \dfrac{1}{(x+\sqrt{a})^3}$.

F 24- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{6x^4 - 9x^2 + 5}{(x+1)^2(x-1)^2(x+2)}$.

Solución: $\dfrac{1}{2(x+1)^2} - \dfrac{3}{2(x+1)} + \dfrac{1}{6(x-1)^2} + \dfrac{5}{18(x-1)} + \dfrac{65}{9(x+2)}$.

F 25- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(x+2)^2}$.

Solución: $\dfrac{1}{9(x-1)} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{5}{3(x+2)^2} + \dfrac{8}{9(x+2)}$.

F 26- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)}$.

Solución: $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$.

F 27- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x-2}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

Solución: $-\dfrac{1}{2(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2x+1}{x^2+1}$.

F 28- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^9 - 3x^7 + 5x^5 - 2x^3 + x + 1}{(x-1)^{10}}$.

Solución: $\dfrac{3}{(x-1)^{10}} + \dfrac{8}{(x-1)^9} + \dfrac{17}{(x-1)^8} + \dfrac{27}{(x-1)^7} + \dfrac{46}{(x-1)^6} + \dfrac{68}{(x-1)^5} + \dfrac{63}{(x-1)^4} +$
$+\dfrac{33}{(x-1)^3} + \dfrac{9}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1}$

F 29- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^7 + 2x^6 - x^5 + 3x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x + 2)^4}$.

Solución: $\dfrac{19x - 17}{(x^2-x+2)^4} + \dfrac{-22x+33}{(x^2-x+2)^3} + \dfrac{5x-22}{(x^2-x+2)^2} + \dfrac{x+5}{x^2-x+2}$.

F 30- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{-32x+60}{(x^4 - 5x^3 + 6x^2)(x^2 - 2x + 10)}$.

Solución: $\dfrac{1}{10(x-2)} - \dfrac{4}{13(x-3)} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{\frac{19}{65}x + \frac{9}{26}}{x^2 - 2x + 10}$.

F 31- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^4 - 3x^2 + x - 1}{(x-1)^3(x^2-2x+5)(2x^2-2x+1)}$.

Solución: $\dfrac{-1}{2(x-1)^3} + \dfrac{3}{4(x-1)^2} + \dfrac{3}{8(x-1)} + \dfrac{\frac{597}{776}x - \frac{1019}{776}}{x^2-2x+5} - \dfrac{\frac{222}{97}x + \frac{40}{97}}{2x^2-2x+1}$.

F 32- Descomponer en fracciones sencillas $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)^2(x+1)^2(x-2)}$.

Solución: $\dfrac{\frac{x}{10} - \frac{3}{10}}{(x^2+1)^2} + \dfrac{\frac{-7}{100}x + \frac{3}{100}}{x^2+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{\frac{17}{300}}{x+1} + \dfrac{\frac{1}{75}}{x-2}$.

F 33- Demostrar que $(x+1)^{6n+1} - x^{6n+1} - 1$, es divisible por $x^2 + x + 1$.

Solución: Resolviendo $x^2 + x + 1 = 0$, se tiene: $x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}$. Sustituyendo este valor en la expresión dada y teniendo en cuenta que: $x + 1 = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$, se tiene: $e^{\pm\frac{\pi}{3}(6n+1)i} - e^{\pm\frac{2\pi}{3}(6n+1)i} - 1 = e^{\pm\frac{\pi}{3}i} - e^{\pm\frac{2\pi}{3}i} - 1 = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} \mp i\sin\frac{2\pi}{3} - 1 =$ $= \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} \pm i(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \pm i(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) - 1 = 0$, luego queda demostrado.

F 34- Determinar un polinomio de 7º grado $f(x)$ tal que $f(x) + 1 = \overset{\cdot}{\overline{(x-1)^4}}$ y $f(x) - 1 = \overset{\cdot}{\overline{(x+1)^4}}$.

Solución: $(x+1)^4(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^7 + (4a+b)x^6 + (6a+4b+c)x^5 + \ldots + d$. Obligando a que el polinomio $ax^7 + (4a+b)x^6 + \ldots + d + 2$ tenga cuatro veces la raíz 1, se tiene que: $f(x) = \frac{5}{16}x^7 - \frac{21}{16}x^5 + \frac{35}{16}x^3 - \frac{35}{16}x$.

Sección G - ECUACIONES

G 1- Una escalera móvil salva un desnivel de 30 metros en 3 minutos. Una persona que además sube 5 escalones cada 8 segundos llega arriba en 1minuto y 20 segundos. Determinar la contrahuella de la escalera.

Solución: Velocidad de subida de la escalera: $\frac{30\,\text{m}}{180\,\text{s}} = \frac{1}{6}\,\text{m/s}$. Velocidad total de la persona: $\frac{1\,\text{m}}{6\,\text{s}} + \frac{5x\,\text{m}}{8\,\text{s}} = \frac{30\,\text{m}}{80\,\text{s}}$. Luego: $x = \frac{1}{3}$ m.

G 2- Dos amigos A y B, distantes 600 m, salen uno al encuentro del otro, cada uno con una velocidad de 6 km/h. Con A está un perro P que corre con velocidad de 16 km/h. En el momento de empezar, B llama a P, que corre a su encuentro. En cuanto le alcanza, le llama A y el perro corre a su encuentro. En cuanto le alcanza, le llama B, y así sucesivamente. Cuando los dos amigos se encuentran, el perro se detiene con ellos. ¿Cuál es la distancia recorrida por P?

Solución: Tiempo que tardan en encontrarse A y B: $\frac{600\,\text{m}}{2 \times 6000\,\text{m}}\,\text{h} = \frac{1}{20}\,\text{h} = 3\,\text{min}$. Distancia recorrida por P: $3\,\text{min} \times \frac{16000\,\text{m}}{60\,\text{min}} = 800\,\text{m}$.

G 3- Resolver el sistema de ecuaciones $x + y = 1$, $y + z = 2$, $x + z = 3$.

Solución: $x = 1,\ y = 0,\ z = 2$.

G 4- Dos móviles A y B distantes d unidades, parten en el mismo instante, uno al encuentro del otro, con velocidades respectivas v_a y v_b. Hallar el punto en que se encuentran y el tiempo que tardan.

Solución: Siendo t el tiempo que tardan, se tiene: $d = t(v_a + v_b)$. Luego: $t = \frac{d}{v_a + v_b}$. Se encuentran a una distancia: $\frac{dv_a}{v_a + v_b}$ del punto de partida de A, y $\frac{dv_b}{v_a + v_b}$ del de B.

G 5- Resolver el sistema de ecuaciones $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10,\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -3,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 5$.

Solución: Haciendo $\alpha = \frac{1}{x},\ \beta = \frac{1}{y},\ \gamma = \frac{1}{z}$, se tiene: $\alpha + \beta = 10,\ \beta + \gamma = -3,\ \alpha + \gamma = 5$, de donde: $\alpha = 9,\ \beta = 1,\ \gamma = -4$. Por tanto: $x = \frac{1}{9},\ y = 1,\ z = \frac{-1}{4}$.

G 6- Resolver el sistema $2^{x+1} + 2 \cdot 3^{y-1} = 10$, $3 \cdot 2^{x-1} + 4 \cdot 3^{y+1} = 111$.

Solución: Haciendo $a = 2^x$ y $b = 3^y$, se tiene: $2a + \frac{2}{3}b = 10,\ \frac{3}{2}a + 12b = 111$. De donde: $a = 2$, $b = 9$. Por tanto: $x = 1,\ y = 2$.

G 7- Tres amigos A, B y C, hablan de sus edades. A dice a B: cuando yo tenía tu edad, C tenía 10 años. B le contesta: cuando yo tenga la tuya, C tendrá 26. C dice: cuando yo nací, la suma de vuestras edades era el doble de mi edad actual. Calcular los años de A, B y C.

Solución: Siendo $A,\ B,\ C$ las actuales edades, se tiene: $C - A + B = 10,\ C - B + A = 26$, $A + B - 2C = 2C$. Luego: $A = 40,\ B = 32,\ C = 18$.

G 8- Dos trenes parten simultáneamente de A y B, cruzándose en C. El primero realiza su recorrido AB en 1 hora y 52 minutos. El segundo realiza el suyo, BA, en 2 horas y 55 minutos. ¿Qué tiempo han empleado hasta cruzarse y cuál es la distancia AB? Se sabe que las velocidades de los dos trenes difieren en 12 km/h.

Solución: Sean las velocidades en m/min: $V_A = (V_B + \frac{12000}{60})\,\text{m/min} = V_B + 200$. Siendo $1\,\text{h}\,52\,\text{min} = 112\text{min}$, la distancia AB es: $D_{AB} = 112(V_B + 200) = 175V_B$. Luego: $V_B = 355,\widehat{5}\,\text{m/min} = 21\frac{1}{3}\,\text{km/h}$, $V_A = 33\frac{1}{3}\,\text{km/h}$, $D_{AB} = 62,\widehat{2}\,\text{km} = 62\frac{2}{9}\,\text{km}$, y el tiempo pedido es: $t = \dfrac{62\frac{2}{9}}{21\frac{1}{3} + 33\frac{1}{3}} = 1\,\text{h}\,8\,\text{min}\,17\frac{23}{41}\,\text{s} = 1\,\text{h}\,8\,\text{min}\,17,56\,\text{s}$.

G 9- Resolver la ecuación $\dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{a} + \dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{x} = \sqrt[n]{x}$.

Solución: $x = \dfrac{a}{\sqrt[n+1]{a^n} - 1} = \dfrac{a}{a^{\frac{n}{n+1}} - 1}$.

G 10- Determinar a y b de manera que las raíces de la ecuación $x^4 - 4x^3 - 36x^2 + ax + b = 0$, estén en progresión aritmética, y calcularlas.

Solución: $1 - 3\sqrt{\dfrac{21}{5}}$, $1 - \sqrt{\dfrac{21}{5}}$, $1 + \sqrt{\dfrac{21}{5}}$, $1 + 3\sqrt{\dfrac{21}{5}}$.

G 11- La distancia entre dos ciudades es de $588\,\text{km}$. Un tren recorre esta distancia con una velocidad media horaria desconocida. Si la recorriese con una velocidad $10,5\,\text{km/h}$ mayor, el tiempo empleado disminuiría en $1\,\text{h}$. Hallar la velocidad.

Solución: $\dfrac{588}{V} - 1 = \dfrac{588}{V + 10,5}$. De donde: $V = 73,5\,\text{km/h}$.

G 12- Dada la ecuación $x^{20} + 19x^{19} - 12x + 5 = 0$, calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=20} \frac{1}{x_i^2}$, siendo x_i las raíces de dicha ecuación.

Solución: La ecuación que tiene por raíces los cuadrados de las raíces de la ecuación dada, se obtiene de la siguiente forma: $(x^{20} + 19x^{19} - 12x + 5)(x^{20} - 19x^{19} + 12x + 5) = x^{40} - 361x^{38} + 466x^{20} - 144x^2 + 25 = 0$. La ecuación que tiene como raíces las inversas de esta última, es: $25x^{20} - 144x^{19} + 466x^{10} - 361x + 1 = 0$. Por tanto, la suma pedida es: $\dfrac{144}{25}$.

G 13- Determinar a de manera que $x^3 - 3ax^2 + 6x - 4 = 0$, tenga una raíz que sea media aritmética de las otras dos, y resolver la ecuación.

Solución: Siendo $x_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{2}$, $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2 = 3a$. Por tanto, $x_2^3 - 3x_2^2 + 6x_2 - 4 = 0$, de donde, $x_2 = a = 1$ y -2. Se obtienen las siguientes soluciones:

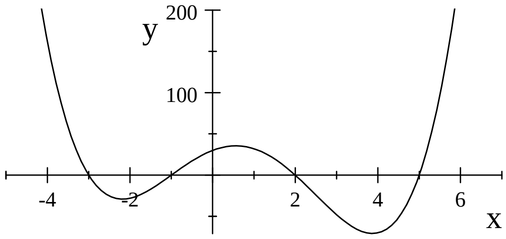
x_1	x_2	x_3
$1 - \sqrt{-3}$	1	$1 + \sqrt{-3}$
$-2 - \sqrt{6}$	-2	$-2 + \sqrt{6}$

G 14- Dada la ecuación $x^{4n} + 3x - 1 = 0$, calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{1 + x_i^4}$.

Solución: Haciendo $y = \dfrac{1}{1 + x^4}$, se tiene que: $x^4 = \dfrac{1 - y}{y}$. Sustituyendo este valor en la ecuación dada y operando: $3\left(\dfrac{1-y}{y}\right)^{\frac{1}{4}} = 1 - \left(\dfrac{1-y}{y}\right)^n$, $3^4\left(\dfrac{1-y}{y}\right) = \left[1 - \left(\dfrac{1-y}{y}\right)^n\right]^4$. De donde: $[y^n - (1-y)^n]^4 + 3^4y^{4n} - 3^4y^{4n-1} = [y^n + (-1)^{n+1}(y-1)^n]^4 + 3^4y^{4n} - 3^4y^{4n-1} = [y^n + (-1)^{n+1}y^n + (-1)^{n+2}ny^{n-1} + \ldots]^4 + 3^4y^{4n} - 3^4y^{4n-1}$. Para n par, se tiene: $3^4y^{4n} - 3^4y^{4n-1} + \ldots = 0$, siendo la suma pedida: $\dfrac{3^4}{3^4} = 1$. Para n impar, se tiene: $(2y^n - ny^{n-1} + \ldots)^4 + 3^4y^{4n} - 3^4y^{4n-1} = y^{4(n-1)}(2y - n + \ldots)^4 + 3^4y^{4n} - 3^4y^{4n-1} = y^{4(n-1)}(2^4y^4 - 4 \cdot 2^3ny^3 + \ldots) + 3^4y^{4n} - 3^4y^{4n-1} = (2^4 + 3^4)y^{4n} - (2^5n + 3^4)y^{4n-1} + \ldots$, siendo la suma pedida: $\dfrac{2^5n + 3^4}{2^4 + 3^4}$.

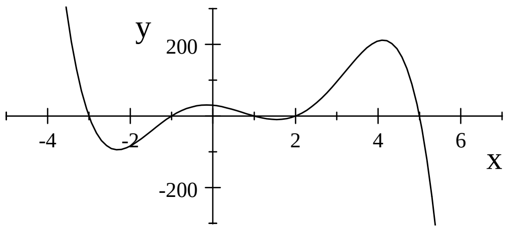
G 15- Dibujar la gráfica de la función $y = (x+1)(x-2)(x+3)(x-5)$.

Solución: Por ser de grado par ($n = 4$) y ser positivo el coeficiente de x^4, la gráfica "desciende" en el 2º cuadrante desde $(-\infty, +\infty)$, y "asciende" en el 1º cuadrante hacia $(+\infty, +\infty)$, cortando al eje de las x en los puntos de abscisas $-3,\ -1,\ +2,\ +5$, formando tres ondulaciones, y cortando al eje de las y en el punto de ordenada 30.



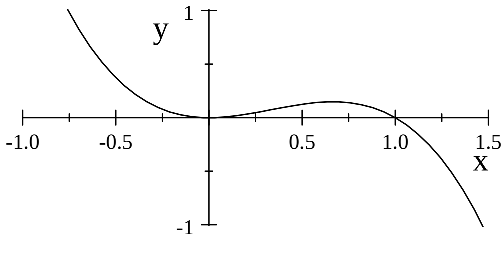
G 16- Dibujar la gráfica de la función $y = -(x+1)(x-2)(x+3)(x-5)(x-1)$.

Solución: Por ser de grado impar ($n = 5$) y ser negativo el coeficiente de x^5, la gráfica "desciende" en el 2º cuadrante desde $(-\infty, +\infty)$, y "desciende" en el 4º cuadrante hacia $(+\infty, -\infty)$, cortando al eje de las x en los puntos de abscisas $-3, -1, +1, +2, +5$, formando 4 ondulaciones, y cortando al eje de las y en el punto de ordenada 30.



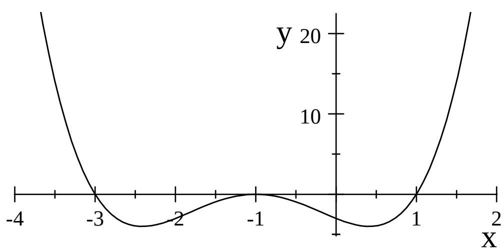
G 17- Dibujar la gráfica de la función $y = -x^2(x-1)$.

Solución: Por ser de grado impar ($n = 3$) y ser negativo el coeficiente de x^3, la gráfica "desciende" en el 2º cuadrante desde $(-\infty, +\infty)$, y "desciende" en el 4º cuadrante hacia $(+\infty, -\infty)$. Al tener una raíz doble en el punto $(0,0)$, la tangente a la curva en ese punto es el eje de las x, cortando a dicho eje en el punto de abscisa $+1$, formando dos ondulaciones.



G 18- Dibujar la gráfica de la función $y = (x+1)^2(x-1)(x+3)$.

Solución: Por ser de grado par ($n = 4$) y ser positivo el coeficiente de x^4, la gráfica "desciende" en el 2º cuadrante desde $(-\infty, +\infty)$, y "asciende" en el 1º cuadrante hacia $(+\infty, +\infty)$. Al tener una raíz doble en el punto $(-1, 0)$, la tangente a la curva en ese punto es el eje de las x, cortando a dicho eje en los puntos de abscisas -3 y $+1$, formando tres ondulaciones, y cortando al eje de las y en el punto de ordenada -3.

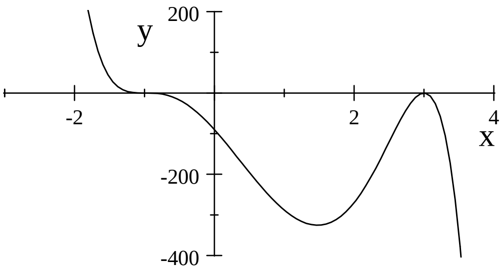


G 19- Dada la ecuación $x^{20}+3x^{10}+5x-2=0$, calcular $\sum \dfrac{1}{(1+x_i^{10})(1+x_j^{10})}$.

Solución: Haciendo $y=\dfrac{1}{1+x^{10}}$, se tiene: $(4y^2-y-1)^{10}-(1-y)\quad 5^{10}y^{19}$, es decir: $(4^{10}+5^{10})y^{20}-\left[\binom{10}{1}4^9-8^{10}\right]y^{19}+\left[-\binom{10}{1}4^9+\binom{10}{2}4^8\right]y^{18}+\ldots=0$. La suma pedida es:
$$\sum \frac{1}{(1+x_i^{10})(1+x_j^{10})}=\sum y_i y_j=\frac{\text{Coeficiente de } y^{18}}{\text{Coeficiente de } y^{20}}=\frac{\left[-\binom{10}{1}4^9+\binom{10}{2}4^8\right]}{4^{10}+5^{10}}=\frac{5\cdot 4^8}{4^{10}+5^{10}}.$$

G 20- Indicar la forma aproximada de una función polinómica de grado 7, con una raíz doble, una triple y dos raíces imaginarias conjugadas, siendo negativo el coeficiente del término en x^7.

Solución:



Por ser de grado impar ($n=7$), y ser negativo el coeficiente de x^7, la gráfica "desciende" en el 2º cuadrante desde $(-\infty,+\infty)$, y "desciende" en el 4º cuadrante hacia $(+\infty,-\infty)$, cortando al eje de las x en el punto de abscisa correspondiente a la raíz triple ($x=-1$ en la gráfica), donde hay un punto de inflexión, siendo tangente al eje de las x en el punto correspondiente a la raíz doble ($x=3$ en la gráfica). En la gráfica se ha representado el polinomio de grado siete: $(x-3)^2(x+1)^3(-x^2+2x-10)=0$

G 21- Calcular las raíces de la ecuación $x^4+2x^3-12x^2+2x+3=0$, sabiendo que la suma de dos de sus raíces vale 2.

Solución: $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, $-2-\sqrt{7}$, $-2+\sqrt{7}$.

G 22- Resolver el sistema
$$\begin{aligned}\frac{x}{u_1-a}+\frac{y}{u_1-b}+\frac{z}{u_1-c}&=1\\ \frac{x}{u_2-a}+\frac{y}{u_2-b}+\frac{z}{u_2-c}&=1\\ \frac{x}{u_3-a}+\frac{y}{u_3-b}+\frac{z}{u_3-c}&=1.\end{aligned}$$

Solución: Operando se obtiene: $x=\dfrac{a^3-a^2(u_1+u_2+u_3)+a(u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3)-u_1u_2u_3}{-a^2-ab+ac-cb}$.
$$y=\frac{b^3-b^2(u_1+u_2+u_3)+b(u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3)-u_1u_2u_3}{-b^2-ab+ac-cb}.$$
$$z=\frac{c^3-c^2(u_1+u_2+u_3)+c(u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3)-u_1u_2u_3}{-c^2-ab+ac-bc}.$$

G 23- Resolver el sistema
$$\begin{aligned}x+ay+a^2z+a^3t&=a^5\\ x+by+b^2z+b^3t&=b^5\\ x+cy+c^2z+c^3t&=c^5\\ x+dy+d^2z+d^3t&=d^5.\end{aligned}$$

Solución: $x=-abcd(a+b+c+d)$, $y=(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)-abcd$, $z=-(a+b+c+d)(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+abc+abd+acd+bcd$, $t=(a+b+c+d)^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd$.

G 24- Dada la ecuación $x^3 + px + q = 0$, hallar la ecuación que tenga por raíces $a^2 + b^2$, $a^2 + c^2$, $b^2 + c^2$, siendo a, b, c las raíces de la ecuación propuesta.

Solución: En la ecuación dada: $a + b + c = 0$, $ab + ac + bc = p$, $abc = -q$. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = \frac{1}{2}[(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2)] + 2p = 0$. Luego, $(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) = -4p$. Procediendo de forma similar se obtiene: $(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) + (a^2 + b^2)(b^2 + c^2) + (a^2 + c^2)(b^2 + c^2) = 5p^2$, $(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) = -2p^3 - q^2$. De donde se obtiene que la ecuación pedida es: $x^3 + 4px^2 + 5p^2x + 2p^3 + q^2 = 0$

G 25- Dada la ecuación $x^3 - 3x + 8 = 0$, hallar $\sum = \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_1}{x_3^2} + \frac{x_2}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_3^2} + \frac{x_3}{x_1^2} + \frac{x_3}{x_2^2}$, siendo x_1, x_2, x_3 sus raíces.

Solución: $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $S_{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{-3}{-8}$, $S_{-2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$. Como: $S_1 \cdot S_{-2} = S_{-1} + \sum$, se tiene que: $\sum = 0 - S_{-1} = -\frac{3}{8}$.

G 26- Dada la ecuación $x^{20} - 3x^2 + 1 = 0$, hallar $\sum_{i=1}^{i=20} \frac{1}{1 + x_i^4}$.

Solución: Haciendo $y = \frac{1}{1 + x^4}$, se tiene: $\left[\frac{y^5 + (1 - y)^5}{3y^5}\right]^{10} - \frac{(1 - y)^5}{y^5} = 0$. Desarrollando: $3^{10}y^{50} - 5 \cdot 3^{10}y^{49} + \ldots = 0$. Luego: $\sum_{i=1}^{i=20} \frac{1}{1 + x_i^4} = \sum_{i=1}^{i=20} y_i = \frac{5 \cdot 3^{10}}{3^{10}} = 5$.

G 27- Dada la ecuación $x^{10} - x + 2 = 0$, hallar $\sum_{i=1}^{i=10} \frac{1}{1 + x_i^5}$.

Solución: Haciendo $y = \frac{1}{1 + x^5}$, se tiene: $\frac{1 - y}{y} = \left[2 + \frac{(1 - y)^2}{y^2}\right]^5$. Desarrollando: $(3^5 + 1)y^{10} - (10 \cdot 3^4 + 1)y^9 + \ldots = 0$. Luego: $\sum_{i=1}^{i=10} \frac{1}{1 + x_i^5} = \sum_{i=1}^{i=10} y_i = \frac{10 \cdot 3^4 + 1}{3^5 + 1} = \frac{811}{244}$,

G 28- Hallar para qué valores de m la ecuación $x^4 - 6x^3 + mx^2 - 11x + 6 = 0$, tiene dos raíces cuya suma sea 5. Dando a m esos valores, resolver la ecuación.

Solución: Siendo a, b, c, d las raíces de la ecuación, se tiene: $a + b = 5$, $c + d = 1$, $ab + cd + 5 = m$, $ab + 5cd = 11$. Haciendo: $ab = \alpha$, $cd = \beta$, se tiene: $\alpha + 5\beta = 11$, $\alpha\beta = 6$, de donde α y 5β son las raíces de $z^2 - 11z + 30 = 0$, por lo que α toma los valores 6 y 5, y β los valores 1 y $\frac{6}{5}$, respectivamente. En consecuencia, m toma los valores $\frac{56}{5}$ y 12. Las raíces de la ecuación son: para $m = \frac{56}{5}$, $a = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2}$, $c = \frac{1 \pm \sqrt{-3{,}8}}{2}$, $d = \frac{1 \mp \sqrt{-3{,}8}}{2}$. Para $m = 12$, $a = 2$ y 3, $b = 3$ y 2, respectivamente, $c = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, $d = \frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2}$.

G 29- Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2\alpha^2 + \frac{z^2}{2} \\ x^2 + z^2 &= 2\gamma^2 + \frac{y^2}{2} \\ y^2 + z^2 &= 2\beta^2 + \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Solución: $x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2}$, $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}$, $z = \pm\frac{2}{3}\sqrt{-\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2}$.

G 30- Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 4 & 5x & x^2 \\ 5x & x^2 & 4 \\ x^2 & 4 & 5x \end{vmatrix} = 0$, y hallar la descomposición factorial del polinomio en x.

Solución: La ecuación es: $x^6+65x^3+64=0$. Haciendo $x^3=y$, $y^2+65y+64=0$, $y_1=-1$, $y_2=-64$. Luego, $x^3+1=0$, $x=-1$, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$, $x^3+64=0$, $x=-4$, $x=2\pm2\sqrt{-3}$. Por tanto, la descomposición factorial es la siguiente:

$$(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)(x+4)\left(x-2-2\sqrt{-3}\right)\left(x-2+2\sqrt{-3}\right).$$

G 31- Dada la ecuación $x^{2n}+7x+9=0$, hallar $\sum_{i=1}^{i=2n}\dfrac{2x_i}{1+x_i}$.

Solución: Haciendo: $y=\dfrac{2x}{1+x}$, se tiene: $x=\dfrac{y}{2-y}$. Sustituyendo en la ecuación y desarrollando: $3y^{2n}-(8n+14)y^{2n-1}+\ldots=0$. Luego: $\sum_{i=1}^{i=2n}\dfrac{2x_i}{1+x_i}=\sum_{i=1}^{i=2n}y_i=\dfrac{8n+14}{3}$.

G 32- Hallar las cotas de las raíces de la ecuación $6x^5+31x^4-77x^3-6x^2-31x+77=0$.

Solución:

	6	31	−77	−6	−31	77	
$x=2$	6	43	9	12	−		
$x=3$	6	49	70	204	+	+	$L=3$
	77	−31	−6	−77	31	6	
$x=2$	77	113	220	+	+	+	$l=\frac{1}{2}$
	−6	31	77	−6	31	77	
$x=1$	−6	+	+	+	+	+	$L=-1$
	6	−31	−77	6	−31	−77	
$x=7$	6	11	+	+	+	+	$l=-7$

	Límite superior (L)	Límite inferior (l)
Raíces +	3	$\frac{1}{2}$
Raíces −	−1	−7

G 33- Calcular la suma de los productos binarios de los cuadrados de las raíces de $x^5-3x^3+x^2-1=0$.

Solución:

1	0	−3	1	0	−1	
1	0	9	1	0	1	
	6	0	0	2		
1	6	9	1	2	1	$(-x^2)$
−1	6	−9	1	−2	1	(x^2)

Suma pedida $=\dfrac{-9}{-1}=9$.

G 34- Calcular las raíces enteras de $x^6+4x^5-52x^4+58x^3+577x^2+54x+630=0$.

Solución: Límite superior de las raíces positivas: 6. Límite inferior de las raíces negativas: -10. Valor absoluto de los divisores de 630, menores de 10: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10. Ninguno de estos valores es raíz de la ecuación, luego ésta no tiene raíces enteras.

G 35- Calcular las raíces enteras de $x^6+x^5-115x^4-11x^3+5230x^2-2x+11088=0$.

Solución: Límite superior de las raíces positivas: 11. Límite inferior de las raíces negativas: -12. Valor absoluto de los divisores de 11088, menores o iguales a 12: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12. Ninguno de estos valores es raíz de la ecuación, luego ésta no tiene raíces enteras.

G 36- Calcular las raíces enteras y fraccionarias de $3x^3-5x^2+8x-4=0$.

Solución: No tiene raíces enteras. En cuanto a las fraccionarias, $\frac{n}{d}$, siendo $m.c.d.(n,d)=1$, se tiene: $3=\dot{d}$, $4=\dot{n}$, obteniéndose la raíz: $\frac{2}{3}$.

G 37- Calcular las raíces enteras y fraccionarias de $6x^5+31x^4-77x^3-6x^2-31x+77=0$.

Solución: Límite superior de las raíces: 3. Límite inferior: -8. Hay que probar los divisores de 77 situados entre dichos límites: $1, -1, -7$. De estos son raíces 1 y -7. En cuanto a las fraccionarias, $\frac{n}{d}$, siendo $m.c.d.(n,d)=1$, se tiene $6=\dot{d}$ y $77=\dot{n}$, obteniéndose la raíz $\frac{11}{6}$.

G 38- Calcular las raíces de $120x^4-116x^3+14x^2+13x-3=0$.

Solución: $-\frac{1}{3},\ \frac{3}{10},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$.

G 39- Calcular las raíces de $30x^4+61x^3-59x^2-4x+2=0$.

Solución: $-\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ -1\pm\sqrt{3}$.

G 40- Calcular las raíces de $4x^4+24x^3+45x^2+41x+21=0$.

Solución: $-\frac{7}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

G 41- Hallar las raíces complejas de componentes enteros de la ecuación $x^6+2x^5+14x^4+2x^3+105x^2-24x+260=0$.

Solución: $\pm 2i,\ 1\pm 2i,\ -2\pm 3i$.
Nota: Dadas las raíces $a\pm bi$, el total a^2+b^2 es divisor del término independiente.

G 42- Dada la ecuación $63x^3+54x^2+5x-2=0$, y siendo $A,\ B,\ C$, los puntos representativos de las raíces llevadas sobre una recta a partir de un origen O, calcular el producto de las tres razones simples $(ABC)(BCA)(CAB)$.

Solución: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-1$.

G 43- Hallar las raíces de $x^6-5x^5+21x^4-26x^3+45x^2+19x+65=0$.

Solución: $1\pm 2i,\ 2\pm 3i,\ \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

G 44- Las raíces de las ecuaciones $a_1x^2+2b_1x+c_1=0$, $a_2x^2+2b_2x+c_2=0$, representan las abscisas de cuatro puntos conjugados armónicos. Encontrar la relación entre los coeficientes de dichas ecuaciones.

Solución: Sean $A,\ B$ y $C,\ D$ las raíces de las ecuaciones, que al ser conjugadas armónicas cumplen la condición $2(AB+CD)=(A+B)(C+D)$. Por tanto, $2(\frac{c_1}{a_1}+\frac{c_2}{a_2})=(\frac{-2b_1}{a_1})(\frac{-2b_2}{a_2})$. Es decir, $2b_1b_2=a_1c_2+a_2c_1$.

G 45- Calcular la suma de los productos de los cubos por las cuartas potencias de las raíces de la ecuación $x^6-5x^5+4x^3-2x^2+x-3=0$.

Solución: $S_{3,4} = S_3 \cdot S_4 - S_7$

	6	–25	0	12	–4	1	0	0
		18	–21	–81	–150	–495	–1410	–3627
			–6	7	27	50	165	470
				12	–14	–54	–100	–330
					–24	28	108	200
5, 0, –4, 2, –1, 3							30	–35
	6	5	25	113	553	2670	12961	62809
				S_3	S_4			S_7

Luego: $S_{3,4} = 113 \times 553 - 62809 = -320$

G 46- Dadas las abscisas de dos parejas de puntos definidas por las siguientes ecuaciones de 2º grado: $a_1x^2 + 2b_1x + c_1 = 0$, $a_2x^2 + 2b_2x + c_2 = 0$, encontrar la ecuación de 2º grado tal que los puntos definidos por sus raíces sean conjugados armónicos de los anteriores.

Solución: Las raíces de esta tercera ecuación son: $\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}$, $\dfrac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$. La ecuación pedida es: $(a_1b_2 - b_1a_2)x^2 + 2(a_1c_2 - c_1a_2)x + b_1c_2 - c_1b_2 = 0$

G 47- Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 &= 30 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 &= 84 \\ x^4 + y^4 + z^4 + t^4 &= 354. \end{aligned}$$

Solución: $S_1 = 6$, $S_2 = 30$, $S_3 = 84$, $S_4 = 354$. Las raíces son: $-2,\ 1,\ 3,\ 4$.

G 48- Dada la ecuación $x^3 + px + q = 0$, encontrar la condición que deben verificar los coeficientes para que, 1º) tenga una raíz doble, y 2º) admita una raíz imaginaria de módulo 2.

Solución: 1º) $4p^3 + 27q^2 = 0$. 2º) $16p + q^2 - 64 = 0$.

G 49- Dada la ecuación $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$, demostrar que para que sus raíces sean conjugadas armónicas se debe cumplir que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0$.

Solución: Siendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ las raíces de la ecuación, la relación que cumplen para ser conjugadas armónicas es: $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 2(\alpha\beta + \gamma\delta)$. Haciendo $m = \alpha + \beta$, $n = \gamma + \delta$, $p = \alpha\beta$, $q = \gamma\delta$, se tiene: $mn = 2(p + q)$. Además: $m + n = -4\dfrac{b}{a}$, $mn + p + q = 6\dfrac{c}{a}$, $pn + qm = -4\dfrac{c}{a}$, $pq = \dfrac{e}{a}$. Obteniendo m, n, p, q en función de a, b, c, d, y sustituyéndolos en $mn = 2(p + q)$, se tiene: $ace + 2bcd - c^3 - d^2a - b^2e = 0$, con lo que queda demostrado.

G 50- Hallar la suma de los cuadrados de los productos binarios de los inversos de las raíces de la ecuación $x^{2n+1} + x^5 + x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

Solución: La ecuación cuyas raíces son las inversas de la dada es: $x^{2n+1} - 3x^{2n-1} + x^{2n-3} + x^{2n-4} + 1 = 0$. Utilizando la fórmula de Girard, se tiene: $S_2 = 6$, $S_4 = 14$. La suma pedida es: $S_{2,2} = \dfrac{1}{2}(S_2^2 - S_4) = 11$.

G 51- Resolver el sistema
$$\begin{aligned} x + 2y + 4z + 8t &= 32\\ x + 3y + 3^2z + 3^3t &= 3^5\\ x + ay + a^2z + a^3t &= a^5\\ x + by + b^2z + b^3t &= b^5. \end{aligned}$$

Solución: Si en la ecuación $f(u) = u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x = 0$, se sustituye u por 2, se tiene la primera ecuación del sistema. Si se sustituye u por 3, se tiene la segunda ecuación. Y si se sustituye por a y por b, se tienen las ecuaciones tercera y cuarta. Luego, $f(u) = (u-2)(u-3)(u-a)(u-b)(u-\theta)$, siendo θ la quinta raíz de $f(u)$. Como la suma de las cinco raíces de $f(u)$, es nula: $\theta = -2-3-a-b = -a-b-5$. Por consiguiente, x es el producto de las cinco raíces de $f(u)$, es decir, $x = 6ab(-a-b-5)$; y es la suma de los productos cuaternarios cambiada de signo, z es la suma de los productos ternarios, t es la suma de los productos binarios cambiada de signo. Por tanto:
$y = -[2 \cdot 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot 3 \cdot a(-a-b-5) + 2 \cdot 3 \cdot b(-a-b-5) + \ldots]$
$z = 2 \cdot 3 \cdot a + 2 \cdot 3 \cdot b + 2 \cdot 3(-a-b-5) + 2 \cdot a \cdot b + \ldots$
$t = -[2 \cdot 3 + 2 \cdot a + 2 \cdot b + 2(-a-b-5) + \ldots]$

G 52- Descomponer en suma de cuadrados la forma cuadrática $W = 2xy + 3yz - zu + xz + 2xu - 4yu$.

Solución: $W = \dfrac{(x+y+2z-u)^2}{2} - \dfrac{(-x+y-z+3u)^2}{2} + (2u - \dfrac{z}{2})^2 - \dfrac{7}{4}z^2.$

G 53- Resolver $6x^8 + 5x^7 - 14x^6 + 20x^5 - 34x^4 + 20x^3 - 14x^2 + 5x + 6 = 0$.

Solución: $1,\ 1,\ \dfrac{1 \pm i\sqrt{15}}{4},\ \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1 \pm i\sqrt{35}}{6}.$

G 54- Hallar la suma de los cuadrados de los productos binarios de los inversos de las raíces de la ecuación $x^7 - 2x^5 + 3x^4 + x + 1 = 0$.

Solución: La ecuación cuyas raíces son las inversas de la dada es: $x^7 + x^6 + 3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$,
$S_{2,2} = \dfrac{1}{2!}\begin{vmatrix} S_2 & (S_2) \\ (S_2) & S_2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}(S_2^2 - S_4) = \dfrac{1}{2}(1+11) = 6.$
Nota: S_2 y S_4 se obtienen por la fórmula de Girard.

G 55- Resolver la ecuación
$A(x) = x^9 - 3(1+i)x^8 - (10-9i)x^7 + (27+22i)x^6 + (28-57i)x^5 - (57+28i)x^4 - (22-27i)x^3 +$
$+(9+10i)x^2 + 3(1-i)x - i = 0.$

Solución: $A(x)$ tiene la raíz triple i, obteniéndose:
$A(x) = (x-i)^3(x^6 - 3x^5 - 7x^4 + 18x^3 + 7x^2 - 3x - 1) = (x-i)^3x^3B(x) = 0,$
$B(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 18 + \dfrac{7}{x} - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} = (x^3 - \dfrac{1}{x^3}) - 3(x^2 + \dfrac{1}{x^2}) - 7(x - \dfrac{1}{x}) = 0.$
Haciendo: $x - \dfrac{1}{x} = u$, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = u^2 + 2$, $x^3 - \dfrac{1}{x^3} = u^3 + 3u$, se tiene: $B(u) = u^3 - 3u^2 - 4u + 12 = 0$, cuyas raíces son: $-2,\ 2,\ 3$. Sustituyendo estos valores en $x - \dfrac{1}{x} = u$, se tienen las raíces de $B(x)$: $1 \pm \sqrt{2},\ -1 \pm \sqrt{2},\ \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. Las raíces de $A(x)$ son las seis de $B(x)$ más la raíz triple i.

G 56- Dada la ecuación $x^3 - 7x + a = 0$, hallar a para que una raíz sea doble de otra, y resolver la ecuación.

Solución: $a = \pm 6$. Las raíces son: $-3,\ 1,\ 2$, o bien: $3,\ -1,\ -2$.

G 57- Resolver $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$, sabiendo que las raíces están en progresión aritmética.

Solución: $-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}.$

G 58- Hallar $\sum \frac{x_i^3}{x_j^4}$, siendo $x_i,\ x_j$ raíces de $x^7 - 3x^5 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$.

Solución: $\sum \frac{x_i^3}{x_j^4} = S_{3,-4} = \begin{vmatrix} S_3 & (S_3) \\ (S_4) & S_4 \end{vmatrix} = S_3 \cdot S_4 - S_{3-4} = S_3 \cdot S_4 - S_{-1} = 0 \cdot 257 - 5 = -5.$

Los valores de S_{-1}, S_3, S_4, se han obtenido por la fórmula de Girard.

G 59- Resolver la ecuación $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0$.

Solución: $1 \pm \sqrt{2},\ 1 \pm \sqrt{2}\,i$.

G 60- Hallar la resultante del sistema

$$\begin{aligned} a^2x^2 + b^2y^2 &= a^2b^2 \\ a^2x^2 - b^2y^2 &= a^2b^2 \\ y^2 &= 2px. \end{aligned}$$

Solución: $pb = 0$.

G 61- Resolver el sistema

$$\begin{aligned} (1+\lambda)x + y + z &= 4 \\ 2x + (2+\lambda)y + 2z &= 5 \\ 3x + 3y + (3+\lambda)z &= 6 \end{aligned}$$

, según los valores de λ.

Solución: $\Delta = \lambda^2(\lambda+6)$, $\Delta_x = \lambda(4\lambda+9)$, $\Delta_y = 5\lambda^2$, $\Delta_z = 3\lambda(2\lambda-3)$. Para $\lambda = 0$ y $\lambda = -6$, el sistema es incompatible. Para los demás valores es determinado.

G 62- Resolver el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + y + z + t + u &= 0 \\ ax + by + cz + dt + eu &= 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2t + e^2u &= 0 \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3t + e^3u &= 0. \end{aligned}$$

Solución: $x = \lambda \cdot V(b,c,d,e) = \lambda(c-b)(d-b)(e-b)(d-c)(e-c)(e-d)$, $y = -\lambda \cdot V(a,c,d,e)$, $z = \lambda \cdot V(a,b,d,e)$, $t = -\lambda \cdot V(a,b,c,e)$, $u = \lambda \cdot V(a,b,c,d)$.

Nota: V = Determinante de Vandermonde.

G 63- Resolver el sistema

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2-\lambda_1} + \frac{y^2}{b^2-\lambda_1} + \frac{z^2}{c^2-\lambda_1} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2-\lambda_2} + \frac{y^2}{b^2-\lambda_2} + \frac{z^2}{c^2-\lambda_2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2-\lambda_3} + \frac{y^2}{b^2-\lambda_3} + \frac{z^2}{c^2-\lambda_3} &= 1. \end{aligned}$$

Solución: Sustituyendo en el problema G 22, los valores de x,y,z por x^2,y^2,z^2, los de u_1,u_2,u_3 por a^2,b^2,c^2, y los de a,b,c por $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, se obtienen las siguientes soluciones:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-a^6 + a^4(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) - a^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda u_3) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{-a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - c^2b^2}},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{-b^6 + b^4(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) - b^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda u_3) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{-b^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + c^2b^2}},$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{-c^6 + c^4(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) - c^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda u_3) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{-c^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - c^2b^2}}.$$

G 64- Discutir según los valores de λ el número de raíces reales de $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + \lambda = 0$.

Solución: $y = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$, $-x^2(x^2 - 4x + 4) = 0$, $x = 0$, $x = 2$. $y' = -4x^3 + 12x^2 - 8x = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 1$. De todo ello se deduce: $\lambda > 0 \rightarrow$ ninguna raíz real: $\lambda = 0 \rightarrow$ dos raíces reales dobles: 0 y 2; $-1 < \lambda < 0 \rightarrow$ cuatro raíces reales, de las que una es negativa y tres son positivas; $\lambda = -1 \rightarrow$ dos raíces reales sencillas (una positiva y la otra negativa) y una raíz real doble, $x = 1$; $\lambda < -1 \rightarrow$ dos raíces reales (una positiva y la otra negativa).

G 65- Discutir según los valores de λ, el número de raíces reales del polinomio $P(x) = x(x-2)(x-4)(x-6)(x-8) + \lambda(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)(x-9) = 0$.

Solución:

Valores de $x \rightarrow$	$-\infty$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$+\infty$
Signo de P para $\lambda > 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de P para $\lambda < 0$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

Si $\lambda > 0$, P tiene 5 raíces reales en los intervalos: $(0,1)$, $(2,3)$, $(4,5)$, $(6,7)$, $(8,9)$. Si $\lambda < 0$, P tiene 5 raíces reales en los intervalos: $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,6)$, $(7,8)$, $(9,+\infty)$. Para $\lambda = -1$, de las cinco raíces reales, una es impropia.

G 66- Discutir según los valores de λ, el número de raíces reales del polinomio $P(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x+4} - \lambda = 0$.

Solución: Si $\lambda > 0$, P tiene 5 raíces reales en los intervalos: $(-4,-3)$, $(-3,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,+\infty)$. Si $\lambda < 0$, P tiene 5 raíces reales en los intervalos: $(-\infty,-4)$, $(-4,-3)$, $(-3,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$.

G 67- Discutir según los valores de λ el número de raíces reales del polinomio $P(x) = \frac{x^7}{7} - \frac{7x^6}{6} + \frac{7x^5}{5} + \frac{35x^4}{4} - \frac{56x^3}{3} - 14x^2 + 48x + \lambda = 0$.

Solución: Derivando $P(x)$ se tiene: $P'(x) = x^6 - 7x^5 + 7x^4 + 35x^3 - 56x^2 - 28x + 48 =$ $= (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0$. Para $\lambda = 0$, los valores de $P(x)$ para las raíces de $P'(x) = 0$, son los siguientes:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(x)$	191,6	$-37,3$	0	24,5	$-36,9$	24,9	$-131,2$

En el cuadro siguiente se expone el número de raíces reales de $P(x)$ según los valores de λ:

x	$P(x) \downarrow\ \lambda \rightarrow$	$-\infty$		$-191,6$		$-24,9$		$-24,5$		36,9		37,3		131,2		$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
-2	$191,6+\lambda$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
-1	$-37,3+\lambda$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
1	$24,5+\lambda$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
2	$-36,9+\lambda$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
3	$24,9+\lambda$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
4	$-131,2+\lambda$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$+\infty$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	Raíces reales simples	1	1	1	3	3	5	5	7	5	5	3	3	1	1	1
	Raíces reales dobles	$-$	$-$	1	$-$	1	$-$	1	$-$	1	$-$	1	$-$	1	$-$	$-$

G 68- Discutir según los valores de λ el número de raíces reales del polinomio $P\ (x) = x^5 - 3x + 1 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\ (x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12) = 0$.

Solución:

Valores de $\lambda \rightarrow$	$< -2,3$	$-2,3$	$-2,3 < \lambda < 5,3$	5,3	$> 5,3$
Raíces reales simples	5	3	3	3	5
Raíces reales dobles	$-$	1	$-$	1	$-$

G 69- Discutir según los valores de λ el número de raíces reales del polinomio
$P(x) = x^5 + 5x^4 + \lambda x^3 + 5x^2 + x = 0$.

Solución: $P(x) = x(x^4+5x^3+\lambda x^2+5x+1) = x^3\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+\lambda\right] = 0$. Haciendo: $u = x+\frac{1}{x}$, se tiene: $u^2+5u+\lambda-2 = 0$. De donde, tras obtener el valor de u, se tiene que: $x = \dfrac{-5\pm\sqrt{33-4\lambda}\pm\sqrt{42\mp 10\sqrt{33-4\lambda}-4\lambda}}{4}$.

Valores de λ $\longrightarrow$	<-12	-12	$-12<\lambda<8$	8	$8<\lambda<\frac{33}{4}$	$\frac{33}{4}$	$>\frac{33}{4}$
Raíces reales simples (a)	5	3	3	3	5	1	1
Raíces reales dobles	–	1 (b)	–	1 (c)	–	2 (d)	–
Raíces imaginarias	–	–	2	–	–	–	4

(a): Una raíz real simple es $x = 0$; (b): La raíz doble es $+1$; (c): La raíz doble es -1; (d): Las raíces dobles son -2 y $-\frac{1}{2}$.

G 70- Se compran 50 acciones de 3 euros de valor nominal al 116%. El comprador quiere venderlas ganando 9 euros netos tras pagar un corretaje del 1 por mil. Hallar el menor cambio al que deben venderse.

Solución: Coste de la compra: $50\cdot 3\cdot 1,16\cdot 1,001 = 174,174$ euros. Importe neto de la venta: $50\cdot 3\cdot x\%\cdot\frac{999}{1000} = 183,174$ euros. El cambio pedido es: $x = 122,24\%$.

G 71- Un banco ha otorgado un préstamo de C euros el 1 de enero de 2003, amortizable en dos plazos iguales de a euros, con vencimientos en 1 de enero de 2004 y 1 de enero de 2006. Determinar entre qué límites estará comprendido $\frac{C}{a}$, para que el tipo de interés compuesto anual al que se ha negociado el préstamo esté comprendido entre 3% y 5%.

Solución: $C(1+i)^4 = a(1+i)^2+a$; $\frac{C}{a} = \frac{(1+i)^2+1}{(1+i)^4}$. Por tanto, dando a i los valores dados, se tiene: $1,72973 < \frac{C}{a} < 1,83108$.

G 72- Dada la ecuación $ax^3+bx^2+cx+d = 0$, hallar la relación entre sus coeficientes para que la suma de dos de sus raíces sea p. Cumplida la condición, hallar las raíces.

Solución: La tercera raíz es: $\frac{-b}{a}-p$. Sustituido el valor de esta raíz en la ecuación, se obtiene la condición: $a^2p^3+2b(a-1)p^2+(3b^2+ac)p+bc^2-ad = 0$. Las otras dos raíces son: $\dfrac{p\pm\sqrt{p^2+\frac{4d}{ap}}}{2}$.

G 73- Dada la ecuación $x^3-24x-72 = 0$, hallar dos números a y b, de forma que la ecuación se pueda poner en la forma $\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3 = \frac{a}{b}$, y hallar sus raíces.

Solución: Desarrollando la segunda ecuación, se tiene: $x^3-3abx+ab(a+b) = 0$. Por tanto: $ab = 8$, $a+b = -9$. De donde: $a = -8$, $b = -1$. Las raíces son: 6 y $-3\pm\sqrt{-3}$.

G 74- Un móvil da 27 vueltas a un circuito en 14 horas. Otro móvil da 45 vueltas a dicho circuito en 35 horas. Hallar el tiempo en que volverán a encontrarse en el punto de partida y en qué lugares del circuito pueden producirse encuentros, bien cuando van en el mismo sentido, bien en sentido opuesto.

Solución: 1º) Circulando en el mismo sentido: sólo se encuentran en el punto de salida cada $\frac{14}{9}$ h $= 1\,\text{h}\,33\,\text{min}\,20\,\text{s}$. 2º) Circulando en sentido opuesto: además de encontrarse en el punto de partida también cada $1\,\text{h}\,33\,\text{min}\,20\,\text{s}$, se encuentran cada $\frac{3}{5}$del circuito en el sentido del primer móvil (cada $\frac{2}{5}$ en el sentido del segundo móvil), es decir, cada $\frac{14}{45}$ h $= 18\,\text{min}\,40\,\text{s}$.

G 75- Tres comerciantes invierten la misma cantidad de euros en la compra de distintas mercancías.

Vendidas totalmente, cada uno divide el importe invertido en la compra, por el beneficio obtenido, resultando para el primero 4 de cociente y 3 de resto, para el segundo 7 y 6, y para el tercero 10 y 1 por exceso. Hallar el importe de la compra y el beneficio de cada uno, sabiendo que la suma de estos beneficios está comprendida entre 200 y 250 euros.

Solución: Importe de la compra de cada uno: 419 euros. Beneficios obtenidos: 104, 59 y 42 euros.

G 76- Halla las soluciones enteras y positivas de $2x + 3y + 4z = 21$, $4x - 5y + 6z = 5$.

Solución: $x = 2$, $y = 3$, $z = 2$.

G 77- Hallar los valores de m para los que las raíces de $2x^2 + (m-3)x + 3 - m = 0$ están comprendidas en el intervalo $-2 < x < 3$.

Solución: $x = \dfrac{3 - m \pm \sqrt{m^2 + 2m - 15}}{4}$. Para $x = 0$, se tiene: $-6 < m < \dfrac{17}{3}$. Para que el discriminante no sea negativo: $m^2 + 2m - 15 \geq 0$, es decir: $m \leq -5$, o bien: $m \geq 3$. Por tanto los valores de m deben encontrarse en el intervalo: $-6 < m \leq -5$, o en el intervalo: $3 \leq m < \dfrac{17}{3}$.

G 78- Un inversor compra 1200 acciones A de 5 euros cada una al cambio de 380%, 2500 acciones B de 5 euros cada una al cambio de 170%, y 2000 acciones C de 2 euros cada una al cambio de 1380%. Posteriormente las vende a las cotizaciones respectivas de 395%, 168% y 1410%. Hallar el beneficio obtenido, sabiendo que hay un corretaje de compra y otro de venta, ambos del 1 por mil.

Solución: $1200 \cdot 5(3,95 \cdot \dfrac{999}{1000} - 3,8 \cdot \dfrac{1001}{1000}) + 2500 \cdot 5(1,68 \cdot \dfrac{999}{1000} - 1,7 \cdot \dfrac{1001}{1000}) +$ $+2000 \cdot 2(14,1 \cdot \dfrac{999}{1000} - 13,8 \cdot \dfrac{1001}{1000}) = 1649,65$ euros.

G 79- Se ha concedido un préstamo de 12.500 euros amortizable en 20 años al 6%. Hallar la parte del vencimiento 15º, destinada a interés y a amortización.

Solución: La anualidad es: $\dfrac{12500 \cdot 0,06 \cdot 1.06^{20}}{1,06^{20} - 1} = 1089,81$ euros. La parte destinada a amortización de la anualidad nº 15 es: $\dfrac{12500 \cdot 0,06 \cdot 1,06^{14}}{1,06^{20} - 1} = 768,27$ euros. Por tanto, la parte destinada a interés es: $321,54$ euros.

G 80- Se tienen tres aleaciones de plata y cobre, de leyes 0,700, 0,820 y 0,900 de plata. Se quiere tener una barra de ley 0,850, que tenga $730\,g$ de la segunda aleación y que pese $2130\,g$. Hallar el peso que hay que tomar de cada una de las otras dos aleaciones.

Solución: La barra tendrá $1810,5\,g$ de plata y $319,5\,g$ de cobre, de los que $598,6\,g$ de plata y $131,4\,g$ de cobre corresponden a la segunda aleación. Se plantea el sistema: $0,7x + 0,9y = 1810,5 - 598,6 = 1211,9$; $0,3x + 0,1y = 319,5 - 131,4 = 188,1$, en el que x e y son los pesos a tomar de la 1ª y 3ª aleación. La solución es: $x = 240,5\,g$, $y = 1159,5\,g$.

G 81- Un préstamo de 10.000 euros se amortiza anualmente con una anualidad de 1.200 euros durante 12 años. 1º) Hallar el interés. 2º) Hallar qué parte de la 6ª anualidad se dedica a amortización. 3º) Calcular la deuda extinguida tras la 7ª anualidad.

Solución: 1º) $10000(1+r)^{12} = 1200\dfrac{(1+r)^{12} - 1}{r}$. De donde: $r = 6,11\%$.
2º) $10000\dfrac{0,0611 \cdot 1,0611^5}{1,0611^{12} - 1} = 792,28$ euros. 3º) $10000\dfrac{1,0611^7 - 1}{1,0611^{12} - 1} = 4960,36$ euros.

G 82- Se pignoran 325.000 euros nominales de un valor que se cotiza al 74%, recibiéndose un préstamo del 80%, con interés vencido por 60 días al 5%. El corretaje es del 1,5 por 1.000 sobre el principal del préstamo. Hallar el importe neto del préstamo.

Solución: Importe del principal del préstamo: $325000 \cdot 0,74 \cdot 0,8 = 192.400$ euros. Importe neto: $192400 - 192400\dfrac{0,05 \cdot 60}{365} - 192400\dfrac{1,5}{1000} = 190.530,03$ euros.

G 83- Un inversor ha entregado 300.000 euros en un banco que da el 5%, para recibir una anualidad de 49.585,28 euros durante 10 años. ¿Cuánto tiempo se ha de diferir el cobro de la primera anualidad?

Solución: $1,05^n = 49585,28\dfrac{1,05^{10}-1}{300000 \cdot 0,05 \cdot 1,05^{10}}$, $n = 5$ años.

G 84- Sean α y β las raíces de $x^2-2x+\lambda = 0$. Sean γ y δ los valores que toma el trinomio $y = x^2+\lambda x+\lambda^2$, cuando x toma los valores α y β. Calcular en función de λ el valor de la expresión $E = \dfrac{\gamma}{\alpha^3}+\dfrac{\delta}{\beta^3}+2\left(\dfrac{\gamma}{\alpha^2}+\dfrac{\delta}{\beta^2}\right)+4\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}+\dfrac{\delta}{\beta}\right)$.

Solución: Operando se tiene: $\alpha = 1+\sqrt{\lambda}$, $\beta = 1-\sqrt{\lambda}$, $\gamma = \lambda^2+\lambda\sqrt{1-\lambda}+2+2\sqrt{1-\lambda}$, $\delta = \lambda^2-\lambda\sqrt{1-\lambda}+2-21-\lambda$. Operando y sustituyendo estos valores en E, se tiene: $E = \dfrac{\gamma}{\alpha}\left[\left(\dfrac{1}{\alpha}+1\right)^2+3\right]+\dfrac{\delta}{\beta}\left[\left(\dfrac{1}{\beta}+1\right)^2+3\right] = 12\lambda+16+\dfrac{14}{\lambda}$.

G 85- Tres ciclistas han partido en el mismo momento y desde el mismo punto, para recorrer una distancia de 910 km. El 1º ha recorrido 70 km diarios. El 2º ha hecho 10 km el primer día, pero ha aumentado cada día su trayecto en un número igual de km. El 3º ha disminuido su marcha en 5 km cada día. Sabiendo que han llegado todos el mismo día, se pide: 1º) ¿Cuántos días han tardado? 2º) ¿Cuántos km han hecho el último día, el 2º y el 3º ciclista?

Solución: 1º) $\dfrac{910}{70} = 13$ días. 2º) El 2º ciclista aumenta a km cada día, con lo que se plantea la ecuación: $10+(10+a)+\ldots+(10+12a) = 130+78a = 910$, $a = 10$, $10+12a = 130$ km el último día. El 3º ciclista ha realizado b km el primer día, luego se tiene que: $b+(b-5)+\ldots+(b-5\cdot 12) = 910$, $b = 100$, $b-5\cdot 12 = 40$ km el último día.

G 86- Un señor dispuso en su testamento que se entregaran a tres sobrinos la cantidad de 19.695 euros para que se repartieran proporcionalmente a las edades que cada uno de ellos tuvieran a su muerte. Uno de ellos tenía 36 años y le correspondieron 7.020 euros, pero renunció a ellos, por lo que el reparto se hizo entre los otros dos, recibiendo uno de ellos 2.700 euros más de lo que le hubiese correspondido. Se pide: 1º) Edad de los sobrinos a la muerte del testador. 2º) Cantidades que correspondieron a estos otros dos sobrinos.

Solución: Sean x e y las edades pedidas. Se tiene: $\dfrac{19695\cdot 36}{36+x+y} = 7020$. Luego: $x+y = 65$; $\dfrac{19695x}{x+y} = \dfrac{19695x}{36+x+y}+2700$. De donde: $x = 25$ años, $y = 40$ años. El de 25 años recibió 7.575 euros y el de 40 años recibió 12.120 euros.

G 87- El cm^3 de oro pesa 19,3 g y el de plata 10,5 g. Se quieren fundir 250 g de oro con un determinado peso de plata de forma que la aleación resultante pese $13,6\,g/cm^3$. Se pide el peso de la plata utilizada, primero en el caso de que no haya alteraciones, y segundo suponiendo que existe una contracción en la aleación final del 0,02%.

Solución: 1º) Se tiene que: $\dfrac{250+x}{\dfrac{250}{19,3}+\dfrac{x}{10,5}} = 13,6$. De donde: $x = 250,08$ g de plata. 2º) $\dfrac{250+x}{\left(\dfrac{250}{19,3}+\dfrac{x}{10,5}\right)0,9998} = 13,6$; $x = 250,42$ g de plata.

G 88- Sabiendo que la diferencia entre el descuento comercial y el matemático es de 0,08 euros en una letra a 90 días, al tipo de interés del 2,5%, hallar el valor nominal de la letra.

Solución: $\dfrac{N\cdot 2,5\cdot 90}{100\cdot 360}-\dfrac{N\cdot 2,5\cdot 90}{100\cdot 360+2,5\cdot 90} = 0,08$; $N = 2.060,80$ euros.

G 89- Hallar las dos dimensiones de un rectángulo sabiendo que se expresan en dm por números enteros, y en metros por números decimales. El perímetro se expresa en metros y la superficie en m^2 por el mismo número decimal.

Solución: Sean a y b las dimensiones en dm. Por tanto: $\dfrac{2a+2b}{10} = \dfrac{ab}{100}$. Luego se tiene que:

$ab = 20(a+b) = \dot{20}$. Pero como ni a ni b pueden terminar en cero, uno de ellos terminará en 5 y el otro en 4. Y como además han de ser > 20, se prueban los valores $25,\ 35,\ 45$,.siendo la solución $45\,\mathrm{dm}$ y $36\,\mathrm{dm}$.

G 90- Dada la ecuación $3x^4 + 24x^3 + 72x^2 + 85x + 31 = 0$, suprimir si es posible el 2º y el 3º término disminuyendo convenientemente las raíces.

Solución: Sustituyendo x por $x+a$ en la ecuación dada, se tiene: $3(x+a)^4 + 24(x+a)^3 + 72(x+a)^2 + 85(x+a) + 31 = 3x^4 + (12a+24)x^3 + (18a^2+72a+72)x^2 + \ldots = 0$. Luego: $12a + 24 = 0$ y $18a^2 + 72a + 72 = 0$. Estas ecuaciones tienen común la raíz $a = -2$. Luego es posible anular los términos indicados restando 2 a las raíces, con lo que la ecuación queda: $3x^4 - 11x + 5 = 0$.

G 91- Hallar la renta vitalicia diferida 5 años, calculada al 3,7%, que puede adquirir por 85.000 euros una persona cuya vida probable es de 14 años.

Solución: $85.000 \cdot 1,037^{14} = a \cdot 1,037^9 + a \cdot 1,037^8 + \ldots + a = a\dfrac{1,037^{10} - 1}{0,037}$, de donde se obtiene: $a = 11.938,64$ euros.

G 92- Una herencia de 45.000 euros ha de repartirse entre tres hermanos de 15, 11 y 8 años, de forma que cuando cada uno cumpla 18 años, tengan los tres igual suma a su disposición, Hallar la suma entregada a cada uno, aplicando un interés del 5% anual compuesto.

Solución: Sean $x,\ y,\ z$ las cantidades que reciben hoy cada uno de ellos, respectivamente. Se tiene: $1,05^3x = 1,05^7y = 1,05^{10}z$, $x+y+z = 45000 = 1,05^7z + 1,05^3z + z$. De donde: $z = 12.623,70$, $x = 17.762,80$, $y = 14.613,50$ euros.

G 93- Un empréstito formado por obligaciones de 500 euros de valor nominal, con interés del 5%, se amortiza en 10 años mediante anualidades en progresión geométrica de razón 1,1, siendo la primera de 1.000.000 euros. Determinar el número de títulos a poner en circulación.

Solución: $N \cdot 500 \cdot 1,05^{10} = 1000000(1,05^9 + 1,1 \cdot 1,05^8 + 1,1^2 \cdot 1,05^7 + \ldots + 1,1^9) =$
$= 1000000 \cdot \dfrac{1,1^9 \cdot \dfrac{1,1}{1,05} - 1,05^9}{\dfrac{1,1}{1,05} - 1}$; $N = 23.693$ títulos.

G 94- Resolver la ecuación $x^2 + ax + b = 0$, siendo $\log a = 1,6537012$ y $\log b = 1,8759135$.

Solución:
$x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\dfrac{a}{2}(1 \mp \cos\theta)$, $\sin^2\theta = \dfrac{4b}{a^2}$, $\theta = 22º38'2''8$, $x_1 = -\dfrac{b}{a}\sin^2\dfrac{\theta}{2} = -1,734872$

G 95- Siendo $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ las raíces de $x^3 + px + q = 0$, hallar la ecuación que tiene por raíces $\alpha + \beta\gamma$, $\beta + \gamma\alpha$, $\gamma + \alpha\beta$.

Solución: Representando por S las sumas correspondientes a las incógnitas de la ecuación dada, y por $\sum$ las de la ecuación pedida, se tiene:
$\sum_1 = \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = S_1 + S_{1,1} = 0 + p = p$.
$\sum_{1,1} = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + (\alpha^2\gamma + \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\beta + \gamma^2\alpha) + \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) =$
$= S_{1,1} + S_{2,1} + S_{1,1,1}S_1 = p + (S_2S_1 - 3S_3) + 0 = p + (S_2 \cdot 0 + 3q) = p + 3q$.
$\sum_{1,1,1} = \alpha\beta\gamma + \alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 + \alpha\beta\gamma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) =$
$= -q + q^2 + \dfrac{1}{2}(S_2^2 - S_4) - qS_2 = -q + q^2 + p^2 + 2pq = (p+q)^2 - q$.
Luego la ecuación pedida es: $x^3 - px^2 + (p+3q)x - (p+q)^2 + q = 0$.

G 96- Dado el sistema $(m-2)x - (m-1)y = 3$, $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{(m+2)(m-1)}{(m-2)(m+1)}$, resolverlo y hallar los límites de m para que las incógnitas sean: 1º) las dos positivas, 2º) las dos negativas, y 3º) una positiva y la otra negativa.

Solución: Resolviendo el sistema: $x = \dfrac{4m^2+2m-8}{(m-2)(m+1)} = \dfrac{4(m-\frac{-1+\sqrt{33}}{4})(m-\frac{-1-\sqrt{33}}{4})}{(m-2)(m+1)}$, $y = \dfrac{4m^2-m-11}{(m+1)(m-1)} = \dfrac{4(m-\frac{1+\sqrt{177}}{8})(m-\frac{1-\sqrt{177}}{8})}{(m+1)(m-1)}$. El signo de x corresponde al del producto: $(m-\frac{-1+\sqrt{33}}{4})(m-\frac{-1-\sqrt{33}}{4})(m-2)(m+1)$. Y el de y, al del producto: $(m-\frac{1-\sqrt{177}}{8})(m+1)(m-1)$. Por tanto: 1º) Son positivas las dos raíces en los intervalos: $m < \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$, $-1 < m < +1$, $m > 2$. 2º) Son negativas las dos raíces en los intervalos: $\frac{1-\sqrt{177}}{8} < m < -1$, $\frac{-1+\sqrt{33}}{4} < m < \frac{1+\sqrt{177}}{8}$. 3º) Una raíz positiva y la otra negativa en los intervalos: $\frac{-1-\sqrt{33}}{4} < m < \frac{1-\sqrt{177}}{8}$, $1 < m < \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$, $\frac{1+\sqrt{177}}{8} < m < 2$.

En el cuadro siguiente se resume lo anterior:

m		$\frac{-1-\sqrt{33}}{4}$		$\frac{1-\sqrt{177}}{8}$		-1		$+1$		$\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{177}}{8}$		$+2$	>2
x	+	0	−	−	−	∞	+	+	+	0	−	−	−	∞	+
y	+	+	+	0	−	∞	+	∞	−	−	−	0	+	+	+
Caso	1º		3º		2º		1º		3º		2º		3º		1º

G 97- Se imponen 10.000 euros al 3,9%. Hallar la cantidad que ha de retirarse al final de cada año para que después de 5 años queden 5.000 euros.

Solución: $10000 \cdot 1{,}039^5 = a \cdot 1{,}039^4 + a \cdot 1{,}039^3 + \ldots + a + 5000$, $a = 1.314{,}98$ euros.

G 98- Una empresa constructora sitúa en los muelles de una estación de ferrocarril para ser transportados, cemento y ladrillo con un peso conjunto de 270 t. Las dificultades del transporte obligan al ferrocarril a que sólo puede aceptar el transporte de un R% del peso del cemento y de un R'% del peso de ladrillo, lo que supone un peso total de 86 t. La constructora, a la vista de esta situación, solicita al ferrocarril que se le autorice a transportar el R'% del cemento y un R% de ladrillo, lo que equivale a transportar 88 t de cemento y 15 t de ladrillo, a lo que accede el ferrocarril. Se desea conocer el peso de cada material que situó la constructora en los muelles y los porcentajes R y R'.

Solución: Sean x e y los pesos de ladrillo y cemento situados en los muelles. Se tiene: $x+y = 270$, $\frac{R}{100}y + \frac{R'}{100}x = 86$, $\frac{R'}{100}y = 88$, $\frac{R}{100}x = 15$. Resolviendo el sistema, se obtienen dos soluciones:

x	y	R	R'
50	220	30	40
$115{,}71$	$154{,}28$	$12{,}\widehat{962}$	$57{,}\widehat{037}$

G 99- Dos aleaciones de plata y cobre tienen la misma ley. Se funde cada una con una cantidad de cobre igual a la que contiene la otra, obteniéndose dos nuevas aleaciones cuyos pesos están en la relación 1/2 y sus leyes en la relación 2/3. ¿Cuál es la ley común de las dos primeras aleaciones?

Solución: Sean: x la ley buscada, y el peso de la 1ª aleación, z el de la 2ª aleación. Se tiene el siguiente cuadro:

	Aleaciones iniciales		Aleaciones finales	
	1ª aleación	2ª aleación	1ª aleación	2ª aleación
Peso total	y	z	$y+z-xz$	$z+y-xy$
Peso plata	xy	xz	xy	xz
Peso cobre	$y-xy$	$z-xz$	$y+z-xz-xy$	$z+y-xy-xz$

Luego: $\dfrac{y+z-xz}{z+y-xy} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{xy}{y+z-xz} \div \dfrac{xz}{z+y-xy} = \dfrac{2}{3}$. Multiplicando las dos relaciones se tiene: $z = 3y$, lo que da: $x = 0{,}8$.

G 100- Siendo t entero y par, se depositan $2t$ anualidades de valor $3t$ cada una de ellas, al objeto de recibir durante $4t$ años siguientes una anualidad $5t$. El rédito es próximo a $6t$ por cada $100t$ euros. Calcularlo teniendo en cuenta la corrección propia del problema con un error relativo $\varepsilon < \dfrac{1}{7t}$.

Solución: Se tiene: $3t(1+r)^{6t-1} + 3t(1+r)^{6t-2} + \ldots + 3t(1+r)^{4t} = 5t(1+r)^{4t-1} + \ldots + 5t$. Luego: $3(1+r)^{4t}\left[(1+r)^{2t}-1\right] = 5\left[(1+r)^{4t}-1\right]$. Dividiendo por: $\left[(1+r)^{2t}-1\right]$, se obtiene: $3(1+r)^{4t} - 5(1+r)^{2t} - 5 = 0$. Luego: $(1+r)^{2t} = \dfrac{5+\sqrt{85}}{6}$. Sustituyendo r por $0{,}06$, se obtiene 8 como valor aproximado de t. Hay que calcular el rédito con $\varepsilon < \dfrac{1}{56}$. Luego: $1+r = \left(\dfrac{5+\sqrt{85}}{6}\right)^{\frac{1}{16}}$, $r = 0{,}055\dot{4}1$. El rédito por cada $100t$ euros es $44{,}\dot{3}3$ euros.

G 101- La ecuación $9x^4 - 27x^3 + 47x^2 - 42x + 18 = 0$ tiene cuatro raíces imaginarias: $a \pm bi$ y $a' \pm b'i$. Sabiendo que $a^2 + b^2 = 1$ y $a'^2 + b'^2 = 2$, calcularlas.

Solución: $(x-a-bi)(x-a+bi) = x^2 - 2ax + 1$, $(x-a'-b'i)(x-a'+b'i) = x^2 - 2a'x + 2$, $(x^2-2ax+1)(x^2-2a'x+2) = x^4 - 2(a+a')x^3 + (3+4aa')x^2 - 2(2a+a')x + 2 = 0$, $1 = \dfrac{-2(a+a')}{-3} = \dfrac{3+4aa'}{47/9} = \dfrac{2(2a+a')}{14/3}$. De donde: $a = \dfrac{5}{6}$, $a' = \dfrac{2}{3}$. Por tanto: $b = \dfrac{\pm\sqrt{11}}{6}$, $b' = \dfrac{\pm\sqrt{14}}{3}$. Las raíces son: $\dfrac{5}{6} \pm \dfrac{\sqrt{11}}{6}i$, $\dfrac{2}{3} \pm \dfrac{\sqrt{14}}{3}i$.

G 102- Una persona ahorra 1.250 euros al año durante 10 años, invirtiéndolos en valores que rentan 4,5% al año. También invierte los intereses recibidos en la misma clase de valores. De este modo actúa durante 10 años, a partir de los cuales sólo invierte los intereses recibidos y siempre en la misma clase de valores. La persona fallece al cumplirse los 16 años desde la última inversión de 1.250 euros. ¿Cuál es el capital formado a su fallecimiento?

Solución: $1250\dfrac{1{,}045^{10}-1}{0{,}045}1{,}045^{16} = 31.064{,}13$ euros.

G 103- Hallar la cantidad que debe añadirse a un capital C para que, colocado a interés simple al r% anual, sumen los intereses durante t años lo mismo que habría aumentado el mismo capital C si se hubiera colocado a interés compuesto al mismo r% y durante el mismo tiempo. Aplíquese para $C = 5.000$ euros, $r = 3$, $t = 15$ años.

Solución: Se plantea: $\dfrac{(C+x)\,r\,t}{100} = C\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^t - C$, $x = C\dfrac{100\left[\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^t - 1\right] - r\,t}{rt}$.
Aplicación: $x = 5000\dfrac{100(1{,}03^{15}-1) - 3 \cdot 15}{3 \cdot 15} = 1.199{,}64$ euros.

G 104- Resolver la ecuación $\dfrac{\left(\sqrt[3]{250}\,\sqrt[-\frac{6}{7}]{2^{\frac{1}{12/21}}}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 10}}\log(x-3) - 2\dfrac{\ln 2}{\ln 10}}{\log[x^2-6(x-1)]} = \text{antilog}\left(-\dfrac{\ln 2}{\ln 10}\right)$.

Solución: $\left(\sqrt[3]{250}\,\sqrt[-\frac{6}{7}]{2^{\frac{1}{12/21}}}\right) = 5 \cdot 2^{1/3} \cdot 2^{2/3} = 10$, $\dfrac{\ln 2}{\ln 10} = \log 2$, $\text{antilog}(-\log 2) = 10^{-\log 2}$. Luego operando se obtiene que: $\dfrac{10^{\log 2}\log(x-3) - 2\log 2}{\log[x^2-6(x-1)]} = 10^{-\log 2}$, $\dfrac{2\log(x-3) - \log 4}{\log[x^2-6(x-1)]} = \dfrac{1}{2}$, $2\log(x-3) = \dfrac{1}{2}\log(x^2-6x+6) + \log 4$, $(x-3)^2 = 4\sqrt{x^2-6x+6}$. Haciendo: $y = (x-3)^2$, se tiene: $y^2 = 16(y-3)$. De donde: $y^2 - 16y + 48 = 0$. Por tanto: $y = 4$, $y = 12$. Luego hay cuatro raíces de x: 1, 5, $3 \pm 2\sqrt{3}$.

G 105- Determinar las condiciones para que un número simétrico (capicúa) de cinco cifras tenga su raíz cuadrada también simétrica. Aplicando dichas condiciones, hallar todos los números que las satisfagan.

Solución: La raíz cuadrada está comprendida entre 100 y 316 (el cuadrado de 317 tiene 6 cifras). Por tanto, adopta tres formas: $100+10x+1$, $200+10y+2$, $300+10z+3$. En el 1º caso: $(100+10x+1)^2 = 10000+2000x+100x^2+200+20x+1$, obteniéndose las dos siguientes condiciones: $2x<10$, $x^2+2<10$, por lo que $x\leq 2$. En el 2º caso: $(200+10y+2)^2 = 40000+4000y+100y^2+800+40y+4$, siendo en este caso las condiciones: $4y<10$, $y^2+8<10$, por lo que $y\leq 1$. En el 3º caso se tiene que: $(300+10z+3)^2 = 90000+6000z+1800+100z^2+60z+9$, de donde se obtiene: $6z+1=6z$. Luego no hay solución en este caso. Los números pedidos son: 10.201, 12.321, 14.641, 40.804, 44.944.

G 106- El valor de un diamante es proporcional al cubo de su peso (si se parte el diamante en dos trozos, la suma de los valores de los dos trozos es inferior al valor de la piedra original). Demostrar que la pérdida de valor es máxima cuando los dos trozos tienen el mismo peso. En este caso, hallar el valor que se pierde.

Solución: Sea el peso original P y su valor kP^3. El peso de uno de los dos trozos es x, por tanto el valor de los dos trozos es: $kx^3+k(P-x)^3 = kP(P^2-3Px+3x^2)$, y la pérdida de valor es: $3kPx(P-x)$, cuyo valor máximo corresponde a: $x=P-x$, es decir, $x=\frac{P}{2}$. El valor perdido es: $3kP\frac{P}{2}\frac{P}{2} = \frac{3}{4}kP^3$, es decir, los 3/4 del valor inicial.

G 107- Un comerciante presta a otro 20.000 euros, que se cancelan del siguiente modo: el deudor paga durante 4 años la anualidad necesaria al 5% para reducir la deuda a la mitad; al finalizar el 4º año convienen en que la deuda restante se liquide mediante la entrega de una cantidad de aceite tal que vendida a 2,50 euros el litro (incluido un sobreprecio de 0,50 euros), el importe de la venta equivalga a la cantidad adeudada incrementada en los intereses al 6% correspondientes a un año. Para ello, el deudor dispone de diversas partidas de aceite a 1,80, 1,90, 2,30, 2,60 y 3 euros/litro. 1º) Hallar el valor de la anualidad de los cuatro primeros años, 2º) Hallar las cantidades de cada partida de aceite que el deudor debe entregar.

Solución: 1º) $20000\cdot 1,05^4-10000 = a\frac{1,05^4-1}{0,05}$, $a=3.320,12$ euros. 2º) Siendo L el número de litros, $2,50L = 10000\cdot 1,06$, $L=4.240$. Se pueden hacer infinidad de mezclas: siendo x, y, z, t, u, las cantidades de cada partida, se debe cumplir que: $x+y+z+t+u=4240$, y que: $1,8x+1,9y+2,3z+2,6t+3u = 4240\cdot 2 = 8480$, siendo positivas las cinco incógnitas. Eliminando u, se tiene: $12x+11y+7z+4t=42400$. Una solución es: 3.000, 500, 100, 50 y 590 litros de cada partida, respectivamente. Otra sería, por ejemplo: 3.180 litros de la primera partida, y 1.060 litros de la cuarta.

G 108- Demostrar que $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$. *Solución:* Siendo: $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}}$, se tiene: $x=\sqrt{1+x}$, luego: $x^2-x-1=0$. Siendo: $y=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$, se tiene: $y=1+\frac{1}{y}$, luego: $y^2-y-1=0$. Por tanto: $x=y$.

G 109- Calcular en euros el valor atribuible hoy a una máquina comprada nueva hace siete años por 2650 £, sabiendo que una máquina idéntica acaba de ser vendida por 1944 FS después de 20 años de uso y admitiendo que al fin de cada año el valor intrínseco de la máquina es un % fijo de su valor en el año anterior. Cotización de la £ hace siete años: 1£ = 1,25 euros. Cotización actual del FS: 1FS = 0,65 euros. Se admitirá que el valor adquisitivo en mercancías del euro actual es aproximadamente 0,94 del que tenía hace siete años. Se supone que no existe obsolescencia técnica.

Solución: $1944FS = 1263,6$ euros, $2650£ = 3312,5$ euros de "hace 7 años" $= 3523,94$ euros "actuales". Luego: $3523,94 \cdot r^{20} = 1263,6$ (siendo r el valor intrínseco de un año con relación al del año anterior), $r = 0,95$. Luego el valor pedido es: $3523,94 \cdot 0,95^7 = 2.460,9$ euros.

G 110- Una persona compra en fechas sucesivas 2, 8, 14, 20,...,62 títulos de 500 euros nominales cada título, a cotizaciones 70%, 70%•1,02, 70%•1,02^2,..., 70%•1,02^{10}, respectivamente. Hallar el nominal adquirido, el importe de la compra y el cambio medio resultante.

Solución: Nominal adquirido: $500(2+8+\ldots+62) = 176.000$ euros. Valor de la compra: $500(2 \cdot 0,7 + 8 \cdot 0,7 \cdot 1,02 + 14 \cdot 0,7 \cdot 1,02^2 + \ldots + 62 \cdot 0,7 \cdot 1,02^{10}) =$
$= 500 \cdot 2 \cdot 0,7(1 + 4 \cdot 1,02 + 7 \cdot 1,02^2 + \ldots + 31 \cdot 1.02^{10}) = 700 \cdot S$.
Siendo: $S = (1 + 1,02 + 1,02^2 + \ldots + 1,02^{10}) + 3 \cdot 1,02(1 + 2 \cdot 1,02 + \ldots + 10 \cdot 1,02^9) =$
$= \dfrac{1,02^{11}-1}{0,02} + 3,06 \cdot \dfrac{(11x^{10}-1)\,(x-1) - x^{11} + x}{(x-1)^2}$. Luego el valor de la compra es: $700\left[\dfrac{1,02^{11}-1}{0,02} + 3,06\dfrac{(111,02^{10}-1)\,(1,02-1) - 1,02^{11} + 1,02}{(1,02-1)^2}\right] = 141.346$ euros. El cambio medio es: $\dfrac{141.346}{176.000} = 80,31\%$.

G 111- Hace años el volumen de madera de un monte era de $1000\,\mathrm{m}^3$ que valían 50.000 euros. Años después se volvió a cubicar y valorar dicha madera, resultando que durante n años el volumen había aumentado a razón de un 2% cada año con relación al año anterior y que su precio unitario lo había hecho en un 3% cada año en relación al año anterior. Suponiendo que en la fecha de la segunda medición el valor fuera 134.189,32 euros, se pide: 1º) El valor de n. 2º) El valor del interés compuesto anual al que habría que colocar los 50.000 euros para que durante los n años se hubieran convertido en los 134.189,32 euros.

Solución: Volumen de madera al cabo de los n años: $1000 \cdot 1,02^n$. Precio unitario al cabo de n años: $50 \cdot 1,03^n$. Valor total al cabo de n años: $50000 \cdot 1,02^n \cdot 1,03^n = 50000 \cdot 1,0506^n =$ $= 134.189,32$. De donde: $n = \dfrac{\log 134189,32 - \log 50000}{\log 1,0506} = 20$ años.
Por tanto: $50.000(1+r)^{20} = 134.189,32$; $\log(1+r) = 0,13418932$, $r = 5,0613\%$.

G 112- Un préstamo de 10.000 euros al 5% se amortiza en 5 años con anualidades variables en progresión aritmética cuyo primer término y su razón son iguales. Hallar la 1ª anualidad y construir el cuadro de amortización.

Solución: Si la 1ª anualidad es a, las restantes anualidades son: $2a$, $3a$, $4a$, $5a$. Se tiene: $a(1,05^4 + 2 \cdot 1,05^3 + \ldots + 5) = 10000 \cdot 1,05^5$. De donde: $a = \dfrac{10000 \cdot 1,05^5 \cdot 0,05^2}{1,05^6 - 6 \cdot 0,05 - 1} = 795,77$.

Años	Anualidad	Intereses	Amortización	Capital amortizado	A amortizar
1	795,77	500,00	295,77	295,77	9.704,23
2	1.591,54	485,21	1.106,33	1.402,10	8.597,90
3	2.387,31	429,90	1.957,41	3.359,51	6.640,49
4	3.183,08	332,02	2.851,06	6.210,57	3.789,43
5	3.978,85	189,42	3.789,43	10.000,00	0

G 113- Determinar el área de una finca sabiendo que se ha comprado con un préstamo a amortizar en 25 años al 4% con una anualidad de $86.767,54$ euros, y que el precio actual de la *Ha* se obtiene de la ecuación resultante de igualar a $1821,824$ el resto de la división de $f(x)$ por $(x-1)(x+2)(x-3)$, siendo $f(x)$ un polinomio entero en x, y que los restos de dividirlo por $(x-1)$, $(x+2)$ y $(x-3)$ son, respectivamente, $-1/2$, 4 y $6,5$.

Solución: Sea V el valor de la finca: $V \cdot 1,04^{25} = 86767,54\dfrac{1,04^{25}-1}{0,04}$, $V = 1355489,45$. Sea el resto: $ax^2 + bx + c$. Se tiene: $a + b + c = -0,5$, $4a - 2b + c = 4$, $9a + 3b + c = 6,5$. De donde: $a = 1$, $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = -1$. Luego: $x^2 - \dfrac{1}{2}x - 1 = 1821,824$, $x = 42,9453$. El área de la finca es:

$\dfrac{1355489,45}{42,9453} = 31.563,16\ Ha.$

G 114- Dada la ecuación $(m^2+6m+5)x^2+(m^2+6m+5)x+m^2 = 0$, hallar los valores límites entre los que debe estar comprendido m para que el número -2 quede a su vez comprendido entre las raíces de la ecuación.

Solución: Se plantea: $x^2+x+\dfrac{m^2}{m^2+6m+5} = 0$, $x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{m^2+6m+5}}}{2} = -2$, $\dfrac{4m^2}{m^2+6m+5}+8 = 0$, $12m^2+48m+40 = 0$, $m = -2\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $m^2+6m+5 = (m+1)(m+5)$. Por tanto los signos que toma el polinomio dado son:

Valor de m	<-5	-5		$-2-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$-2+\sqrt{\frac{2}{3}}$		-1	>-1
Signo de m^2+6m+5	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Signo del polinomio	$+$	$+$	$+$		$-$		$+$	$+$	$+$

Por lo que los límites pedidos son: $-5 < m < -2-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $-2+\sqrt{\dfrac{2}{3}} < m < -1$.

G 115- Una persona entra en una iglesia con una cantidad de dinero compuesta sólo por monedas de 0,20 euros. Da a los pobres una cierta cantidad representada por tantas monedas de 0,01 euros como piezas de 0,20 euros tenía, y observa que seguidamente se ha realizado el milagro de convertirse las monedas de 0,20 euros que le quedaban en monedas de 2 euros. Por ello, vuelve a dar a los pobres 15 monedas de 2 euros y regresa a casa con el doble de dinero del que llevaba cuando entró en la iglesia. Hallar el dinero que tenía inicialmente.

Solución: Inicialmente tenía x monedas de 0,20 euros. Da a los pobres: $0,01x$. Luego: $(0,20x-0,01x)\dfrac{2}{0,2}-15\cdot 2 = 2\cdot 0,2x$, $x = \dfrac{30}{1,5} = 20$ monedas de 0,20 euros. Por tanto, inicialmente tenía 4 euros.

G 116- Una entidad emite un empréstito a 15 años al 6% anual, a amortizar al final del periodo, pagando los intereses al final de cada año. Para ello, dedica en sus presupuestos 100.000 euros anuales, imponiendo en un banco al 5% anual, el exceso entre esta cantidad y los intereses anuales pagados. A cuánto asciende el empréstito.

Solución: Sea E el importe del empréstito. Los intereses anuales son: $0,06\,E$. El exceso anual: $100000-0,06E$. Luego: $E = (100000-0,06\,E)(1,05^{14}+\ldots+1)$. Operando, se tiene: $E = 940.359,68$ euros.

G 117- Se encarga a un proveedor la instalación de un taller. Para ello, importa un equipo por valor de 235.000 £, siendo el coste de su transporte 14.000 euros. Al resto de la inversión corresponde el 30% de la inversión total. El pago se hará en 10 anualidades, siendo la primera al año de terminar la instalación, con un interés del 4%. Calcular el importe de la anualidad. Se utilizará el siguiente cambio: 1 euro = 0,69 £.

Solución: Inversión total: $C = 235000\cdot\dfrac{1}{0,69}+14000+0,3C$, $C = 506.542,44$ euros. $a(1,04^9+\ldots+1) = 506542,44\cdot 1,04^{10}$. La anualidad es: $a = \dfrac{506542,44\cdot 1,04^{10}.}{1,04^{10}-1}\cdot 0,04 =$ $= 62.452,10$ euros.

G 118- Un inversor adquiere 100 acciones de una empresa, de 50 euros nominales cada una, al 390 %. Al cabo de seis meses, la compañía amplía capital a razón de una acción nueva por cada dos antiguas emitidas a la par (al 100 %), cobrando el banco gestor un corretaje del 1,5 por mil sobre el efectivo de la inversión. Seis meses después, la compañía da un dividendo del 6% para las acciones antiguas y del 3% para las nuevas. Cobrado el dividendo, el inversor vende todas las acciones a la cotización de 370 %. Hallar el % de beneficio que obtuvo el inversor sobre la inversión inicial, sabiendo que el banco que le prestó el dinero para la ampliación cobra el 5% anual por intereses.

Solución: Inversión inicial: $C = 100 \cdot 50 \cdot 3,9 = 19.500$ euros. Dividendos que recibe: $100 \cdot 50 \cdot 0,06 + 50 \cdot 50 \cdot 0,03 = 375$ euros. Préstamo del banco: $50 \cdot 50 \cdot 1,0015 = 2.503,75$ euros. Intereses del préstamo: $2503,75 \cdot 0,02 = 50,08$ euros. Importe de la venta: $150 \cdot 50 \cdot 3,7 = 27.750$ euros. Por tanto, el cálculo del beneficio obtenido es: $27750 - 19500 - 2503,75 + 375 - 50,08 = 6.071,17$ euros. Luego el % del beneficio sobre la inversión inicial es: $\frac{6071,17}{19500} = 31,1342\%$.

G 119- Dados dos lingotes de leyes t y t', si se toma un peso x del 1º, y un peso y del 2º, se forma una aleación de ley doble que la que se obtendría tomando un peso y del 1º y un peso x del 2º. Hallar x e y conociendo t, t' y que $xty = p$.

Solución: $\frac{xt + yt'}{x + y} = 2\frac{xt' + yt}{x + y}$, $x(t - 2t') = y(2t - t')$. Como $y = \frac{p}{x\,t}$, sustituyendo se tiene: $x = \sqrt{\frac{p}{t} \cdot \frac{2\,t - t'}{t - 2\,t'}}$, $y = \sqrt{\frac{p}{t} \cdot \frac{t - 2\,t'}{2\,t - t'}}$.

G 120- Se toma a préstamo por 20 años a interés compuesto del 4% anual una cierta suma y se conviene en amortizarla mediante la entrega de la correspondiente anualidad constante. Satisfechas las nueve primeras anualidades, ¿qué porcentaje de la deuda inicial está pendiente de pago?

Solución: Siendo C la deuda inicial y a la anualidad, se tiene: $a = C\frac{1,04^{20} \cdot 0,04}{1,04^{20} - 1}$, $C \cdot 1,04^{10} - a\frac{1,04^{10} - 1,04}{0,04} = 0,6704C$. La deuda pendiente es el $67,04\%$ de la inicial.

G 121- Una compañía minera tiene dos instalaciones para el tratamiento de su mineral. Siendo x e y el número de horas que funcionan sin interrupción dichas instalaciones, se cumple $7x - 3y = 297$. 1º) Hallar estos valores sabiendo que son enteros y que $x \leq 54$. 2º) Hallarlos, suponiendo que además de la ecuación anterior se cumple esta otra: $2x + 5y = 120$, resolviendo el sistema por el método de los coeficientes indeterminados y seguidamente por la regla de Cramer. 3º) Con independencia de lo anterior, hallar dichos valores con los siguientes datos: a) las instalaciones funcionan simultáneamente durante 18 horas alimentadas por el contenido íntegro de un único depósito de agua; b) si el contenido íntegro de este depósito se consume en la 1ª instalación, y vuelto a llenar se consume íntegro en la 2ª instalación, los números de horas que han trabajado las instalaciones siguen relacionadas por la ecuación mencionada inicialmente.

Solución: 1º) Introduciendo el parámetro t, se tiene: $x = 3t$, $y = 7t - 99$, con $15 \leq t \leq 18$, obteniéndose el siguiente conjunto de soluciones:

x	45	48	51	54
y	6	13	20	27

2ºa) $7x - 3y = 297$, $14x - 6y = 594$, $2x + 5y = 120$, $14x + 35y = 840$. Luego: $41y = 246$, $y = 6$. Similarmente se obtiene: $35x - 15y = 1485$, $6x + 15y = 360$. Luego: $41x = 1845$, $x = 45$. 2ºb) Por Cramer: $x = \frac{\begin{vmatrix} 297 & -3 \\ 120 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = 45$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 297 \\ 2 & 120 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = 6$. 3º) $7x - 3y = 297$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18}$. De donde: $y^2 + 39y - 1782 = 0$, $y = 27$, $x = 54$.

G 122- Hallar la eliminante y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a + b + c \\ ax & + & by & + & cz & = & a^2 + b^2 + c^2 \\ bx & + & cy & + & az & = & a^2 + b^2 + c^2 \\ cx & + & ay & + & bz & = & 4ab \end{array}$$

Solución: Para que el sistema sea compatible, ha de producirse que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a+b+c \\ a & b & c & a^2+b^2+c^2 \\ b & c & a & a^2+b^2+c^2 \\ c & a & b & 4ab \end{vmatrix} = 0.$$

Operando: $\Delta = \begin{vmatrix} a-b & b-c & a^2+b^2+c^2 \\ b-c & c-a & a^2+b^2+c^2 \\ c-a & a-b & 4ab \end{vmatrix} - (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b & b-c & c \\ b-c & c-a & a \\ c-a & a-b & b \end{vmatrix} = 0.$

Luego: $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc = (a+b-c)^2 = 0$. La eliminante es: $a+b-c = 0$.
Resolviendo el sistema, se obtiene: $x = 0,\ y = 2b,\ z = 2a$.

G 123- Establecer el cuadro de amortización de una deuda de 400.000 euros en 3 años al 5%.

Solución: $a = 400000\dfrac{0,05 \cdot 1,05^3}{1,05^3-1} = 146.883,42$ euros.

Años	Anualidad	Intereses	Amortización	Capital amortizado	A amortizar
1	146.883,42	20.000,00	126.883,42	126.883,42	273.116,58
2	146.883,42	13.655,83	133.227,59	260.111,01	139.888,99
3	146.883,42	6.994,43	139.888,99	400.000,00	0

G 124- La construcción de un ferrocarril de 312 km ha costado 84.000.000 euros. Los 6/10 de la inversión se ha financiado con acciones de 1000 euros de nominal cada una, y el resto con la emisión de un empréstito por obligaciones emitidas a la par de 500 euros nominales cada título. En un determinado año la compañía pagó por intereses 28 euros por título y dedicó 80.640 euros para la amortización del principal del empréstito. Hallar la cantidad que ingresó por km ese año, sabiendo además que la compañía repartió un dividendo a sus accionistas por importe del 6% del nominal de las acciones. Los gastos de explotación ascendieron al 40% de los ingresos. Nota: La compañía no retiene beneficios.

Solución: Valor de las acciones emitidas: $C = 0,6 \cdot 84.000.000 = 50.400.000$ euros. Importe del empréstito: $E = 0,4 \cdot 84.000.000 = 33.600.000$ euros. Intereses pagados a los obligacionistas dicho año: $28 \cdot \dfrac{E}{500} = 1.881.600$ euros. Total del dividendo pagado: 6% $\cdot\, C = 3.024.000$ euros. Total de los pagos por financiación: $1.881.600 + 3.024.000 + 80.640 = 4.986.240$ euros. Ingresos de explotación: $\dfrac{4.986.240}{0,6} = 8.310.400$. Ingreso por km: $\dfrac{8.310.400}{312} = 26.635,90$ euros.

G 125- Los pesos de dos lingotes de acero están en la relación 3 a 4,25. Contienen respectivamente 0,76% y 0,50% de carbono. Se toman 93 kg del primero y se añaden al segundo, con lo que los dos lingotes tienen la misma cantidad de carbono. Hallar el peso inicial de cada lingote.

Solución: Sean x e y los pesos pedidos. Se tiene: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4,25}$. Además se tiene: $0,005y + 0,0076 \cdot 93 = 0,0076(x-93)$. Resolviendo el sistema se obtienen los pesos pedidos: $2.736\,\text{kg}$ y $3.876\,\text{kg}$ respectivamente.

G 126- Dada la ecuación $\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix} = 0$, hallar la ecuación que tenga por raíces los cuadrados de las raíces de la dada y que tenga la forma $\begin{vmatrix} b_{11}-x & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-x & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-x \end{vmatrix} = 0.$

Solución: Representando por $S_n(a_{ij})$ las distintas sumas de los coeficientes de la ecuación dada, ésta queda como sigue: $-x^3+S_1(a_{ii})x^2-S_{11}(a_{ij})x+S_{111}(a_{ij})=0$. La ecuación pedida es: $x^3+[S_1^2(aii)-2S_{11}(a_{ij})]x^2+[S_{11}^2(a_{ij})-2S_1(a_{ii})S_{111}(a_{ij})]x+S_{111}^2(a^{ij})=0$, que proviene de un determinante cuadrado del de los coeficientes dados, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^2+a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}-x & a_{12}(a_{11}+a_{22})+a_{13}a_{32} & a_{13}(a_{11}+a_{33})+a_{12}a_{23} \\ a_{21}(a_{11}+a_{22})+a_{23}a_{31} & a_{22}^2+a_{12}a_{21}+a_{23}a_{32}-x & a_{23}(a_{22}+a_{33})+a_{21}a_{13} \\ a_{31}(a_{11}+a_{33})+a_{21}a_{32} & a_{32}(a_{22}+a_{33})+a_{31}a_{12} & a_{33}^2+a_{13}a_{31}+a_{23}a_{32}-x \end{vmatrix} = 0.$$

Nota: Otra forma de llegar a la solución consiste en multiplicar la ecuación dada por su transformada en $-x$, y seguidamente sustituir x^2 por x.

G 127- Se ponen en movimiento dos trenes sobre dos vías paralelas y en la misma dirección. El 1º recorre a km en la 1ª hora, $a+x$ en la 2ª, $a+2x$ en la 3ª, etc. El 2º tren parte b horas más tarde y recorre c km por hora. ¿Al cabo de cuántas horas se encontrarán los dos trenes? Aplicar la solución al caso: $a=1$, $x=2$, $b=6$, $c=32$.

Solución: Se encontrarán al cabo de t horas. El 1º habrá recorrido hasta ese momento: $a+(a+x)+(a+2x)+\ldots+\left[a+(t-1)\,x\right]=\dfrac{2a+(t-1)\,x}{2}t$. El 2º habrá recorrido: $(t-b)c$. Igualando y operando, se obtiene: $xt^2+(2a-x-2c)t+2bc=0$. Por tanto: $t=\dfrac{2c+x-2a\pm\sqrt{4c^2+x^2+4a^2+4cx-8ac-4ax-8bcx}}{2x}$. Aplicando la solución al caso dado, se obtiene: $t=16\pm 8$, luego se encontrarán a las $8\,\text{h}$ y a las $24\,\text{h}$ de haber salido el 1º.

G 128- Un contratista se compromete a realizar una obra en un cierto plazo, con la condición de indemnizar al cliente con 500 euros por cada día que se retrase. Comienza la obra con 30 obreros. Al terminar el 5º día decide tomar 6 más para terminar en plazo, lo que le representará una pérdida de 17.400 euros. Al terminar el 6º día observa que los nuevos trabajan un 20% menos que los primeros, por lo que la pérdida aumentará en 4.600 euros. Hallar 1º) los días que duró la obra, 2º) los días que debiera haber durado, y 3º) el jornal.

Solución: Sea x el número de días previstos inicialmente; y, el número de días que duró la obra; z, el jornal de los obreros. El coste previsto inicialmente es: $30xz$. El coste estimado al acabar el 5º día es: $[30x+6(x-5)]z=30xz+17400$. El coste real es: $[30y+6(y-5)]z+(y-x)500=$ $=30xz+17400+4600$. El rendimiento de los trabajadores es: $30x+6(x-5)=$ $=30y+6(y-5)\cdot 0,8$. Resolviendo el sistema formado por estas tres ecuaciones, se tiene: $y=65$ días que duró la obra; $x=63$ días que debió durar; $z=50$ euros el jornal.

G 129- Dos lingotes A y B se componen de plata y cobre. Añadiendo $100\,\text{g}$ de cobre a A y $200\,\text{g}$ de cobre a B, los dos lingotes pesan igual. Añadiendo $200\,\text{g}$ de cobre a A y $100\,\text{g}$ de cobre a B, los dos tienen la misma ley. Fundiendo la mitad de A con 1/3 de B, se obtiene una aleación de ley de plata de $0,875$, cuyo peso es $800\,\text{g}$. Hallar los pesos y las leyes de A y B.

Solución: Lingote A: peso x, cantidad de plata p. Lingote B: peso y, cantidad de plata q. Por tanto: $x+100=y+200$, $\dfrac{p}{x+200}=\dfrac{q}{y+100}$, $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=800$, $\dfrac{\frac{p}{2}+\frac{q}{3}}{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}}=0,875$. Resolviendo el sistema, se tiene: Lingote A: peso $1000\,\text{g}$, ley $0,900$. Lingote B: peso $900\,\text{g}$, ley $0,8\widehat{3}$.

G 130- Hallar la relación racional que debe existir entre p y q (siendo $q\neq 0$), para que las ecuaciones $x^3+3px+2q=0$ y $x^2+2px+q=0$, tengan una raíz común. Partiendo de esta relación se expresará q en función de p. Tomando para p el menor número entero positivo par que dé para q un número racional, resolver para este valor de p y cada uno de los correspondientes valores de q, las ecuaciones dadas.

Solución: Se plantea que: $(x^3+3px+2q)-2(x^2+2px+q)=x(x^2-2x-p)=0$, $(x^2-2x-p)-(x^2+2px+q)=2(p+1)x+p+q=0$, $x=-\dfrac{p+q}{2(p+1)}$. Luego se tiene que: $\left[-\dfrac{p+q}{2(p+1)}\right]^2-2\left[-\dfrac{p+q}{2(p+1)}\right]-p=0$. Operando: $q^2+q(4+6p)-3p^2-4p^3=0$. Por tanto, resolviendo esta ecuación, se obtiene: $q=-3p-2\pm 2(p+1)^{\frac{3}{2}}$. El menor entero positivo par para p, que hace racional a q, es $p=8$, obteniéndose para q los valores 28 y -80. Para $q=28$, las raíces son, para la 1ª ecuación, -14 y -2, y para la 2ª ecuación, -2 y $1\pm 3\sqrt{3}\,i$. Para $q=-80$, las raíces son, para la 1ª ecuación, 4 y -20, y para la 2ª ecuación, 4 y $-2\pm 6i$.

G 131- Se extrae mineral de hierro de dos minas diferentes: uno contiene el 72% de hierro y el otro el 58%. Se mezclan pesos desconocidos de ambos, obteniéndose un mineral con 62% de hierro. Si se hubiesen mezclado 15 toneladas más de cada uno de los dos minerales, la ley obtenida sería del 62,25%. Hallar las cantidades que se mezclaron.

Solución: Peso mezclado del 1º mineral: x toneladas. Peso mezclado del 2º mineral: y toneladas. Luego: $\dfrac{0,72x+0,58y}{x+y}=0,62$, $\dfrac{0,72(x+15)+0,58(y+15)}{x+y+30}=0,6225$. Resolviendo el sistema, se tiene: $x=94\dfrac{2}{7}$ toneladas, $y=235\dfrac{5}{7}$ toneladas.

G 132- Una obra de hormigón armado se contrata a tanto alzado en 645.000 euros. En la obra entran $2.324\,\mathrm{m}^3$ de hormigón y 122 t de hierro. El coste para el contratista del m^3 de hormigón es de 200 euros y el de la t de hierro puesta en obra 600 euros. Cuando lleva realizados $1162\,\mathrm{m}^3$ de hormigón y empleadas 61 t de hierro, sobreviene un aumento de precios, elevándose el precio del hormigón en 10% y el de la t de hierro en 200 euros. En vista de ello, el contratista solicita un aumento del precio contratado, de forma que el % de su beneficio sobre el total que gaste en la obra, se mantenga. ¿A cuánto asciende el aumento solicitado?

Solución:

	Coste inicial	Aumento
Hormigón	$2324\cdot 200=464.800$	$(2324-1162)\,200\cdot 0,1=23.240$
Hierro	$122\cdot 600=73.200$	$(122-61)\,200=12.200$
Total	538.000	35.440

El aumento solicitado asciende a: $\dfrac{645.000}{538.000}\cdot 35.440=42.488,48$ euros

G 133- En base a que $(1+x+x^2+x^3+x^4)^n=1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{4n}x^{4n}$, calcular las sumas: $S_1=a_1+a_5+\ldots+a_{4n-3}$, $S_2=a_2+a_6+\ldots+a_{4n-2}$, $S_3=a_3+a_7+\ldots+a_{4n-1}$, $S_4=a_4+a_8+\ldots+a_{4n}$.

Solución: Para $x=1$, se tiene en la expresión dada: $5^n=1+a_1+a_2+\ldots+a_{4n}$, es decir: $a_1+a_2+\ldots+a_{4n}=5^n-1$ $[\mathbf{A}]$. Para $x=-1$, se tiene: $1=1-a_1+a_2-a_3+\ldots+a_{4n}$, es decir: $-a_1+a_2+\ldots+a_{4n}=0$ $[\mathbf{B}]$. Para $x=i$, se tiene: $1=1+a_1i-a_2-a_3i+\ldots+a_{4n}$, lo que da, para la parte real: $-a_2+a_4-a_6+\ldots+a_{4n}=0$ $[\mathbf{C}]$, y para la imaginaria: $a_1-a_3+a_5-\ldots=0$ $[\mathbf{D}]$. Por tanto las sumas pedidas son: $S_1=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\mathbf{A}-\mathbf{B}}{2}+\mathbf{D})=\dfrac{5^n-1}{4}$, $S_2=\dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2}=\dfrac{5^n-1}{4}$, $S_3=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\mathbf{A}-\mathbf{B}}{2}-\mathbf{D})=\dfrac{5^n-1}{4}$, $S_4=A-S_1-S_2-S_3=\dfrac{5^n-1}{4}$, $S_1=S_2=S_3=S_4=\dfrac{5^n-1}{4}$.

G 134- En la ecuación $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ se sustituye x por $(1-x)$. 1º) Hallar las relaciones entre los coeficientes para que la ecuación no varíe, indicando la forma general de dicha ecuación. 2º) Mediante un cambio de variable, transformar la forma general obtenida, en una ecuación de 2º grado. Aplicar a $4x^4-8x^3-47x^2+51x+36=0$, hallando sus raíces.

Solución: 1º) Sustituyendo en la ecuación inicial x por $(1-x)$, se obtiene: $ax^4-(4a+b)x^3+(6a+3b+c)x^2-(4a+3b+2c+d)x+a+b+c+d+e=0$. Luego las relaciones pedidas son: $a=c+d$ y $b=-2a$, y la forma general de la ecuación dada es: $(c+d)x^4-2(c+d)x^3+cx^2+dx+e=0$. 2º) Haciendo el cambio: $y=x^2-x$, se tiene: $(c+d)y^2+dy+e=0$. Aplicándolo al ejemplo, se obtiene: $4y^2+51y+36=0$, cuyas raíces son: $-\dfrac{3}{4}$ y -12. Las raíces buscadas son: -3, 4, $\dfrac{3}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$.

G 135- Una fábrica convierte en hierro anualmente $10.000\ t$ de mineral, gastando 183 euros por t de hierro obtenida, incluyendo el precio del mineral (para producir 100 t de hierro se necesitan 135 t de mineral). El hierro se vende a 210 euros la t. Para la explotación de la fábrica se necesitan 450.000 euros anuales, a los que se supone un interés del 6,5%. En qué cantidad se puede comprar la fábrica, si se quiere que el capital invertido produzca el 8%.

Solución: La fábrica produce anualmente: $\frac{100}{135}\cdot 10000 = \frac{200000}{27}$ t de hierro. El beneficio obtenido es: $\frac{200000}{27}(210-183) - 450000\cdot 0,065 = 170.750$ euros. La fábrica se puede comprar por: $\frac{170750}{8}\cdot 100 = 2.134.375$ euros.

G 136- Se dispone de tres lingotes de oro cuyas leyes son: $0,900,\ 0,800$ y $0,600$. Se funde el 1º lingote con 300 g del 2º. Seguidamente se sustituyen 200 g de esta última aleación por 200 g del 3º lingote, obteniéndose una aleación final de ley $0,8565$. ¿Cuál es el peso del 1º lingote?

Solución: Peso del 1º lingote: x g. Tras la fusión citada, el peso del lingote obtenido es: $x+300$ y su ley: $\frac{0,9x+0,8\cdot 300}{x+300}$. Tras la sustitución descrita, el peso no varía, siendo la cantidad de oro la siguiente: $0,9x+240-200\cdot\frac{0,9x+240}{x+300}+120 = 0,8565(x+300)$. Resolviendo la ecuación, se tiene: $x = 1.700$ g.

G 137- Discutir el sistema según los valores de a y b:

$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{aligned}$$

Solución: $x = z = \frac{a-b}{(a-1)\ (a+2)}$, $y = \frac{ab+b-2}{b(a-1)\ (a+2)}$. Para $a=1$, el sistema es incompatible para cualquier valor de b, excepto para $b=1$, para el que es indeterminado, pues $x+y+z=1$. Para $a=-2$, el sistema es incompatible para cualquier valor de b, excepto para $b=-2$, para el que es indeterminado, pues $2y+z+1=0$. Para $b=0$, el sistema es incompatible para cualquier valor de a.

G 138- Para amortizar un préstamo a interés compuesto al 5%, se entregan t anualidades, cada una inferior en 80 euros a la anterior. La 1ª se entrega a los 7 años de realizado el préstamo y su valor es a. Hallar el préstamo, sabiendo que 1º) a es en euros la cantidad de números distintos de cinco cifras que pueden escribirse con los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5. 2º) el interés r al que se colocan las anualidades, es el verdadero valor de la expresión $\sqrt{4x^2+17x-5}-\sqrt{4x^2+x-2}$, cuando $x\to\infty$. 3º) t es la raíz cuadrada del cociente que resulta al dividir la suma de los cubos de los 20 primeros números pares por la suma de los cubos de los números dígitos pares.

Solución: 1º) Las variaciones con repetición de 5 elementos tomados de 5 en 5, son: $a = V'_{5,5} = 5^5 = 3125$. 2º) para calcular el verdadero valor de la expresión dada, se tiene:

$$\sqrt{4x^2+17x-5}-\sqrt{4x^2+x-2} = 2x\left(1+\frac{17}{4x}-\frac{5}{4x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 2x\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2x^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{17}{4x}\ldots\right)\ldots\right] - 2x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4x}\ldots\right)\ldots\right] = 2x-2x+\frac{17}{4}-\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{x}+\frac{\mu}{x^2}+\ldots$$

Para $x\to\infty$, su valor es: $\frac{16}{4}=4$. 3º) $t = \sqrt{\frac{2^3(\frac{20\cdot 21}{2})^2}{2^3(\frac{4\cdot 5}{2})^2}} = 21$. Luego siendo C el empréstito, se cumple:

$$C\cdot 1,05^{27} = a\cdot 1,04^{20}+(a-80)1,04^{19}+\ldots+(a-20\cdot 80) =$$

$$= a\cdot 1,04^{20}+a\cdot 1,04^{19}+\ldots+a-80(1,04^{19}+2\cdot 1,04^{18}+\ldots+20) =$$

$$= a\frac{1,04^{21}-1}{0,04}-80\left(\frac{1,04^{21}-1,04}{0,04^2}-\frac{20}{0,04}\right).$$

De donde: $C = 20.882,89$ euros.

G 139- Dada la ecuación $x^2-bx+c=0$, se pide 1º) Relación entre b y c para que la diferencia de las raíces sea d. 2º) Cumplida esa condición, hallar el valor mínimo de $y=x^2-bx+c$. 3º) Determinar los valores de b y c y las raíces de la ecuación cuando $b-c=1$ y $d=1$.

Solución: 1º) $d = \sqrt{b^2 - 4c}$. Luego: $d^2 = b^2 - 4c$. 2º) $c = \dfrac{b^2 - d^2}{4}$. Por tanto: $y = x^2 - bx + \dfrac{b^2 - d^2}{4}$, siendo su valor mínimo $\dfrac{-d^2}{4}$, para $x = \dfrac{b}{2}$. 3º) Con los datos indicados, se tiene: $b^2 - 4c = 1,\ b - c = 1$. Resolviendo este sistema y la ecuación dada, se obtienen los datos pedidos:

b	c	x_1	x_2
3	2	2	1
1	0	1	0

G 140- Se compra mineral cuya riqueza en cobre es 12% a 0,18 euros el kg. Los gastos para extraer el cobre de 1 tonelada de mineral son 57,50 euros, perdiéndose en la operación el 2% del cobre que tenía el mineral. Hallar 1º) Coste del kg de cobre 2º) Precio de la tonelada de mineral para que el cobre resulte a 2 euros el kg.

Solución: 1º) $\dfrac{180 + 57,5}{120 \cdot 0,98} = 2,02$ euros el kg de cobre. 2º) Siendo x el precio pedido de la tonelada de mineral, se tiene: $\dfrac{x + 57,5}{120 \cdot 0,98} = 2$. De donde: $x = 177,7$ euros la t de mineral.

G 141- Se han de repartir 5.000 euros entre cuatro personas de 18, 16, 14 y 12 años, de modo que tengan la misma cantidad al cumplir los 21 años. La cantidad se coloca al 5% de interés simple. Hallar el reparto.

Solución: Las cantidades repartidas son: a, b, c y d . Luego debe cumplirse que: $a(1 + 3 \cdot 0,05) = b(1 + 5 \cdot 0,05) = c(1 + 7 \cdot 0,05) = d(1 + 9 \cdot 0,05) = x$. Como $a + b + c + d = $ $= 5.000$, $x\left(\dfrac{1}{1,15} + \dfrac{1}{1,25} + \dfrac{1}{1,35} + \dfrac{1}{1,45}\right) = 5000$, $x = 1.612,92345$. Por tanto, los importes repartidos son: $1.402,54$; $1.290,34$; $1.194,76$; $1.112,36$ euros.

G 142- Se realiza una película de una rueda que gira a la velocidad de $1650°$ por segundo. Se proyecta la película a velocidad triple de la que se tomó y la rueda se ve girando en sentido contrario a $450°$ por segundo. Hallar el número de imágenes por segundo que se tomaron al realizar la película.

Solución: Siendo n el número de imágenes por segundo, se tiene: $\dfrac{1650}{n} - \dot{\overline{360}} + \dfrac{450/3}{n} = \dot{\overline{360}}$, $n = 1800/\dot{\overline{360}} = 5$.

G 143- Un ayuntamiento ha emitido un empréstito de 600.000 euros por el que paga un interés del 4% anual. Calcular: 1º) La anualidad constante que debe incluir en su presupuesto para atender al pago de intereses y a la amortización del empréstito, sabiendo que puede colocar al 5% las cantidades que dedica a la amortización y que desea amortizarlo de una sola vez al cabo de 15 años. 2º) Cuál será dicha anualidad constante, si amortiza el empréstito en pagos parciales al finalizar los años 3º, 6º, 9º,12º y 15º. 3º) A cuánto se elevaría cada una de estas amortizaciones.

*Solución:*1º) $a = 600000 \cdot 0,04 + \dfrac{600000 \cdot 0,05}{1,05^{15} - 1} = 51.805,37$ euros. 2º) Los intereses de cada uno de los tres años del 1º trienio, son: $600000 \cdot 0,04 = 24000$. Luego para amortizar al final del 3º año, quedan: $(a - 24000)(1,05^2 + 1,05 + 1) = 3,1525a - 75660$. Los intereses para cada uno de los tres años del 2º trienio, son: $(600.000 - 3,1525a + 75660)0,04 = 27026,4 - 0,1261a$. Para amortizar al final del 6º año, quedan: $(a - 27026,4 + 0,1261a)0,04 = 3,55003025a - 85200,726$. Procediendo de forma similar para los siguientes trienios, se tiene: amortización al final del 9º año: $3,997689065a - 95944,53755$; al final del 12º año: $4,501797657a - 108043,1437$; y al finalizar el 15º año: $5,069474341a - 121667,3842$. Este importe ha de ser igual al saldo por amortizar que es: $964848,4073 - 15,20201698a$. Por tanto: $a = 53.598,22$ euros 3º) Sustituyendo el valor de a en las fórmulas anteriores, se obtiene: $a_3 = 93.308,38$ euros; $a_6 = 105.074,57$ euros; $a_9 = 118.324,47$ euros; $a_{12} = 133.245,18$ euros; $a_{15} = 150.047,40$ euros.

G 144- Resolver el sistema
$$\begin{aligned} x + ay + a^2z + a^3t &= -a^4 \\ x + by + b^2z + b^3t &= -b^4 \\ x + cy + c^2z + c^3t &= -c4 \\ x + dy + d^2z + d^3t &= -d^4 \end{aligned}$$

Solución: Las soluciones son las siguientes: $x = abcd$, $y = -abc - abd - acd - bcd$, $z = ab + ac + ad + bc + bd + cd$, $t = -a - b - c - d$.

G 145- Si se pignoran por 60 días, 20.000 euros nominales de acciones de la compañía A, que se cotizan a 117%, determinar el importe neto que se recibe, sabiendo que el nominal del préstamo es el 80% del valor real cotizado, que se descuenta al 4,5% de interés y que se devengan gastos por el 1,5 por mil del nominal del préstamo recibido.

Solución: Valor cotizado: 23.400 euros. Importe del préstamo: 18.720 euros. Intereses: $\frac{18720 \cdot 0,045 \cdot 60}{360} = 140,40$. Gastos: $0,0015 \cdot 18720 = 28,08$ euros. Importe neto recibido: $18.551,52$ euros.

G 146- Encontrar cuatro enteros tales que su suma sea igual a la suma obtenida añadiendo al producto del mayor por el menor, el producto de los otros dos.

Solución: $a + b + c + d = ad + bc$. Suponiendo que el menor sea $a = 1$, la ecuación queda: $1 + b + c + d = d + bc$. Siendo $b + c = m$, se tiene: $x^2 - mx + m + 1 = 0$, $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m - 4}}{2}$. Para $m = 5$, se tiene $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Luego los números pedidos son: $1, 2, 3, 4$.

G 147- Un comerciante entrega a un acreedor dos pagarés, uno de 650 euros con vencimiento a los 65 días, y el otro de 725 euros con vencimiento a los 220 días. Pasados 40 días, ofrece reemplazar los dos pagarés por uno solo con vencimiento a los 360 días. El acreedor acepta con la condición de que este pagaré sea de 1.426 euros. ¿A qué % colocó el acreedor el dinero?

Solución: Haciendo el cálculo a interés simple se tiene la siguiente ecuación: $650 - \frac{650 \cdot r \cdot 65}{360} + 725 - \frac{725 \cdot r \cdot 220}{360} = 1426 - \frac{1426 \cdot r \cdot 400}{360}$. De donde: $r = 4,98\%$. Haciéndolo a interés compuesto: $650(1 + i)^{-65} + 725(1 + i)^{-220} = 1426(1 + i)^{-400}$. De donde: $i = 0,0001436$. Siendo: $1 + r = (1 + i)^{360}$, $r = 5,3\%$.

G 148- Se sabe que la suma de los términos extremos del desarrollo del binomio $(x + y)^4$ es 4.112 y que el término central vale 1.536. Calcular x e y, sabiendo que ambos son positivos.

Solución: Se tiene: $x^4 + y^4 = 4.112$, $6x^2y^2 = 1536$. Luego: $(x^2 + y^2)^2 = 4112 + \frac{1536}{3} = 4.624$, $x^2 + y^2 = 68$, $x^2y^2 = 256$. Siendo x e y las raíces de la ecuación: $z^2 - 68z + 256 = 0$, $z_1 = 64$, $z_2 = 4$. Luego los valores de x e y son: 8 y 2.

G 149- Un automovilista pasa ante un punto kilométrico en que está escrita una distancia con un número de dos cifras. Continúa con la misma velocidad y al cabo de una hora pasa por otro punto kilométrico, que tiene las mismas cifras pero en orden inverso. Continúa con la misma velocidad y al cabo de otra hora pasa por otro punto que tiene las mismas cifras que el 1º, pero con un cero en medio. Calcular la velocidad y los kilómetros indicados en los tres mojones.

Solución: Los kilómetros indicados en los mojones son correlativamente: $10x + y$, $10y + x$, $100x + y$. Luego: $10y + x - 10x - y = 100x + y - 10y - x$. De donde: $6x = y$. El único valor posible para x es 1, por lo que los mojones indican: $16\,\text{km}$, $61\,\text{km}$, $106\,\text{km}$. La velocidad es: $45\,\text{km/h}$.

G 150- Encontrar un número de dos cifras sabiendo que escribiéndolo tres veces seguidas y a continuación la cifra 1, el número de siete cifras resultante es cubo perfecto.

Solución: Sea $100x + 10y + 1$, la raíz cúbica del número de siete cifras Su cubo es: $1000000x^3 + 300000x^2y + 30000x(x + y) + 6000xy + 1000y^3 + 300x + 300y^2 + 30y + 1$. Pero x sólo puede valer 1 ó 2 (el cubo de 300 tiene 8 cifras). Para $x = 2$, se tiene:

$(10y+201)^3 = 8120601 + 1212030y + 60300y^2 + 1000y^3$. Sólo puede ser un número de siete cifras si $y \leq 2$. La solución es 211, que elevado al cubo da 9.393.931. Para $x = 1$, no hay solución.

G 151- Transcurrido un año de su corta, las maderas de roble y pino pierden por desecación los 6/13 del agua que contienen. Tras este año, la madera contiene todavía los 21/82 de su peso en agua. Dichas maderas, desecadas y labradas, se venden a razón de 30 euros los 50 kg. Se sabe que $3\,\mathrm{m}^3$ de roble y $2\,\mathrm{m}^3$ de pino cuestan en conjunto 2.040 euros y que el m^3 de pino pesa 3/4 del m^3 de roble. Averiguar: 1º) Porcentaje de agua en la madera verde. 2º) Peso del m^3 de roble y de pino secos.3º) Peso del m^3 de roble y de pino verdes.

Solución: 1º) Sea A el agua que contienen inicialmente por kg. Por tanto: $A - \frac{6}{13}A = \frac{21}{82}(1 - \frac{6}{13}A)$. Luego, $A = 39\%$. 2º) Sea x el peso del m^3 de roble seco. Se tiene: $(3x + 2 \cdot \frac{3}{4}x)\frac{30}{50} = 2.040$. Por tanto: $x = 755,\widehat{5}\,\mathrm{kg/m^3}$ de roble seco y $\frac{3}{4} \cdot 755,\widehat{5} = 566,\widehat{6}\,\mathrm{kg/m^3}$ de pino seco. 3º) El m^3 de roble verde pesa: $\frac{755,\widehat{5}}{0,61} = 1238,615\,\mathrm{kg}$, y el de pino verde pesa: $\frac{3}{4} \cdot 1238,615 = 928,962\,\mathrm{kg}$.

G 152- Resolver el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & z & & & = & -8 \\ x & + & y & & & + & t & = & 2 \\ & - & y & - & z & + & 2t & = & -13 \\ x & & & - & 2z & + & 3t & = & -17 \end{array}$$

Solución: $x = 1$, $y = 3$, $z = 6$, $t = -2$.

G 153- Un horno alto se carga con una mezcla de dos minerales de hierro compuesta por 15 t de mineral de 30% de hierro y $5,5$ t de otro de riqueza desconocida, obteniéndose 5.800 kg de lingote. Un 2º horno se carga con 8t de mineral de $16,5\%$ de hierro y con 18t de 36%, obteniéndose 7.800 kg de lingote. Sabiendo que la t de mineral cuesta 15, 12, 19 y 20 euros respectivamente, se pide: 1º) ¿Cuál de las mezclas proporciona un lingote más barato? 2º) ¿Cuál es el % de hierro de la mezcla formada por partes iguales de los cuatro minerales, a qué precio saldría la t de lingote y qué cantidades de mineral serían necesarias para obtenerla?

Solución: 1º) El coste de la t de lingote del 1º horno es: $\frac{15 \cdot 15 + 5,5 \cdot 12}{5,8} = 50,17$ euros. El del 2º horno es: $\frac{8 \cdot 19 + 18 \cdot 20}{7,8} = 65,64$ euros. El 1º es más barato. 2º) Se supone que la recuperación del hierro en el 1º horno es igual que en el 2º, es decir, del 100% (en efecto: $8 \cdot 0,165 + 18 \cdot 0,36 = 7,8$). Siendo x la ley del 2º mineral, se tiene que: $x = \frac{5,8 - 15 \cdot 0,3}{5,5} = 23,\widehat{63}\%$. La ley de la mezcla formada por partes iguales de los cuatro minerales, es: $\frac{0,3 + 0,2\widehat{363} + 0,165 + 0,36}{4} = 26,5341\%$. El precio a que saldría la t de lingote, sería: $\frac{15 + 12 + 19 + 20}{4 \cdot 0,265341} = 62,18$ euros. Se necesitarían: $\frac{1}{0,265341} = 3,7687$ t de la mezcla.

G 154- Hallar el valor de m para que el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -m & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & -2 \\ x & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 4 \end{vmatrix}$, sea positivo para cualquier valor de x.

Solución: $\Delta = 2(1-m)x^2 - (68+7m)x + 130 + 17m > 0$. El discriminante δ de $\Delta = 0$, ha de ser negativo, luego: $185m^2 + 1856m + 3584 < 0$. Es decir: $\frac{-928 - 48\sqrt{86}}{185} < m < \frac{-928 + 48\sqrt{86}}{185}$. Para estos valores de m, el coeficiente $2(1-m)$ de x^2 es > 0, luego son la solución buscada.

G 155- Resolver el sistema $x^2+y^2+z^2=14,\ x+y+z=6,\ xy=6.$

Solución: De la 2ª y 3ª ecuación se obtiene: $y=\frac{6}{x},\ z=6-x-\frac{6}{x}$. Sustituyendo estos valores en la 1ª ecuación se tiene: $x^4-6x^3+17x^2-36x+36=(x-2)(x-3)(x^2-x+6)=0$. Por tanto, las raíces son:

x	2	3	$\frac{1+\sqrt{-23}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{-23}}{2}$
y	3	2	$\frac{1-\sqrt{-23}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{-23}}{2}$
z	1	1	5	5

G 156- Dada la ecuación $ax^2+bx+c=0$, formar otra cuyas raíces sean: 1º) iguales y de signo opuesto; 2º) inversas; 3º) las dadas multiplicadas por m; 4º) las dadas más h; 5º) los cuadrados de las dadas; 6º) las inversas de los cuadrados.

Solución: Las transformaciones son: 1º) $x=-y,\ ay^2-by+c=0.$ 2º) $x=\frac{1}{y},\ cy^2+by+a=0.$ 3º) $x=\frac{y}{m},\ \ ay^2+bmy+cm^2=0.$ 4º) $x=y-h,\ \ ay^2+(b-2ah)y+ah^2-bh+c=0.$ 5º) $x=\sqrt{y},\ a^2y^2-(b^2-2ac)y+c^2=0.$ 6º) $x=\frac{1}{\sqrt{y}},\ c^2y^2-(b^2-2ac)\,y+a^2=0.$

G 157- Una sociedad tiene un capital social de 5 millones de euros, representado por 50.000 acciones de 100 euros. Emite obligaciones por valor de 1.500.000 euros, al 4%, amortizables en 20 anualidades iguales. En el ejercicio siguiente, ha obtenido una tesorería de 578.182,80 euros, de la que dedica un 10% a inversiones, y el resto, después de atender los intereses y la amortización de las obligaciones, lo reparte como dividendo entre los accionistas. Si las acciones se cotizan a 160% ¿qué rendimiento efectivo reciben los accionistas?

Solución: Dividendo: $578182{,}8-57818{,}28-0{,}04\cdot1500000-\frac{1500000}{20}=385.364{,}52$ euros, que representa el $7{,}7073\%$ del capital y el $4{,}817\%$ de rendimiento efectivo para los accionistas.

G 158- Dada la ecuación $(a_1+a_2i)z^2+(b_1+b_2i)z+c_1+c_2i=0$, hallar la condición que deben cumplir los coeficientes para que: 1º) una de las raíces sea real y la otra imaginaria; 2º) las dos raíces sean reales.

Solución: 1º) Haciendo: $m+ni=\frac{b_1+b_2i}{a_1+a_2i},\ p\cdot qi=\frac{c_1+c_2i}{a_1+a_2i}$, siendo A la raíz real y $B+iC$ la raíz imaginaria, se tiene: $m=-A-B,\ n=-C,\ p=AB,\ q=AC$. De este sistema se obtiene: $mnq-q^2-n^2p=0$, siendo: $m=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{a_1^2+a_2^2}$, $n=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+a_2^2}$, $p=\frac{a_1c_1+a_2c_2}{a_1^2+a_2^2}$, $q=\frac{a_1c_2-ac_1}{a_1^2+a_2^2}$. 2º) Haciendo $C=0$, se tiene: $n=q=0$, de donde: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

G 159- Una sociedad constructora de material ferroviario repara, durante un año, un cierto número de vagones a un ferrocarril, cobrando por la reparación el importe de los jornales más su 50%, el importe de los materiales más su 25%, y además el 50% sobre dichos dos importes totales. Al comenzar el 1º año, la sociedad recibe un préstamo amortizable al 5% en 34 años. Al final del primer año, obtiene una tesorería de 61.755,45 euros, igual precisamente a la anualidad que ha de reembolsar a la entidad financiera que le concedió el préstamo. Suponiendo que lo que gastó en materiales es igual a los 10/25 de lo que gastó en jornales, y los demás gastos iguales a 1/4 de lo que gastó en materiales, se desea saber el préstamo que recibió y la cantidad que gastó en materiales.

Solución: Préstamo $=61.755{,}45\cdot\frac{1{,}05^{34}-1}{0{,}05\cdot1{,}05^{34}}=1.000.000$ euros. Siendo J lo que gastó en jornales, M en materiales y V los restantes gastos, se tiene que el importe cobrado es: $1{,}5(1{,}5\cdot2{,}5M+1{,}25M)=7{,}5M$, y el importe pagado es: $2{,}5M+M+0{,}25M=3{,}75M$. Por tanto: $3{,}75M=61.755{,}45,\ M=16.468{,}12$ euros.

G 160- Un librero liquida hoy a un editor una partida de libros de dos clases, cuyos precios de venta son 23 y 19 euros cada libro. Después de quedarse con el 20% de comisión, entrega al editor una letra a 5 meses vista, por la que le corresponde cobrar hoy, descontada al 6%, la cantidad de 485,16 euros. Hallar el número de libros de cada clase vendidos por el librero.

Solución: Siendo N el nominal de la letra: $N - \frac{N \cdot 5 \cdot 0,06}{12} = 485,16$. Luego: $N = 497,60$. El librero vendió: $\frac{497,6}{0,8} = 622 = 23x + 19y$. De donde: $x = 13$ libros de 23 euros, $y = 17$ libros de 19 euros.

G 161- Las igualdades $x_1 = 5x + 12y$, $y_1 = 2x + 5y$, hacen depender a x_1, y_1 de x, y. 1º) Si x, y son enteros, demostrar que el $m.c.d.(x,y) = m.c.d.(x_1,y_1)$. Si x, y no son enteros, x_1, y_1 no pueden ser ambos, números enteros. 2º) De x_1, y_1 se deducen x_2, y_2 por medio de: $x_2 = 5x_1 + 12y_1$, $y_2 = 2x_1 + 5y$, y así sucesivamente. Calcular x_n en función de x_{n-1} y de x_{n-2}, e y_n en función de y_{n-1} y de y_{n-2}. Probar que si $n \geq 2$, se tiene que: $x_n > 9,8x_{n-1}$, e $y_n > 9,8y_{n-1}$. 3º) Demostrar que si x, y verifican $x^2 - 6y^2 = 1$, se verifica lo mismo con x_1, y_1, x_2, y_2, etc. Deducir a partir de la solución evidente $x = 1$, $y = 0$, que la ecuación $x^2 - 6y^2 = 1$ tiene infinitas soluciones y establecer que se obtienen todas las soluciones enteras o racionales de dicha ecuación.

Solución: 1º) $x = ad$, $y = bd$, siendo $m.c.d.(a,b) = 1$, $x_1 = d(5a + 12b)$, $y_1 = d(2a + 5b)$, siendo $m.c.d.[(5a + 12b),(2a + 5b)] = 1$. Luego: $m.c.d.(x_1,y_1) = d = m.c.d.(x,y)$. Sea: $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$, $m.c.d.(m,n) = m.c.d.(p,q) = 1$, $x_1 = \frac{5mq + 12np}{nq}$, $y_1 = \frac{2mq + 5np}{nq}$. Si ambos fueran : $5mq + 12np = \dot{\overline{nq}}$ y $2mq + 5np = \dot{\overline{nq}}$; luego: $10mq + 24np = \dot{\overline{nq}}$ y $10mq + 25np = \dot{\overline{nq}}$, $np = \dot{\overline{nq}}$; luego, $n = \dot{q}$. Similarmente, eliminando np, se tiene: $mq = \dot{\overline{np}}$, luego $q = \dot{n}$. Por tanto, o bien: $n = \dot{q}$, o bien: $q = \dot{n}$, luego no pueden ser enteros los dos a la vez. 2º) $x_2 = 5(5x + 12y) + 12(2x + 5y) = 49x + 120y = 49x + 10x_1 - 50x = 10x_1 - x$. Luego se tiene: $x_n = 10x_{n-1} - x_{n-2}$. Igualmente: $y_2 = 10y_1 - y$, $y_n = 10y_{n-1} - y_{n-2}$. De estas fórmulas se deduce que: $\frac{x_n}{x_{n-1}} = 10 - \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}$. Por tanto, siendo r la razón entre dos términos consecutivos: $r = 10 - \frac{1}{r}$, $r^2 - 10r + 1 = 0$, $r = 5 \pm \sqrt{24} = 9,89 > 9,8$. 3º) Como: $(5x + 12y)^2 - 6(2x + 5y)^2 - 1 =$ $= x^2 - 6y^2 - 1 = 0$, queda demostrado que se verifica para x_1, y_1. Las soluciones son infinitas:

$x = 1$	$x_1 = 5$	$x_2 = 49$	$x_3 = 435$	$x_4 = 4801$	...
$y = 0$	$y_1 = 2$	$y_2 = 20$	$y_3 = 198$	$y_4 = 1960$	...

Partiendo de la ecuación de recurrencia: $u_{n+2} - 10u_{n+1} + u_n = 0$, se obtiene la ecuación: $z^2 - 10z + 1 = 0$, cuyas raíces son: $z = 5 \pm 2\sqrt{6}$. Por tanto se tiene que: $x_n = a(5 + 2\sqrt{6})^{n-1} + b(5 - 2\sqrt{6})^{n-1}$. Obteniendo los valores de a y b para $n = 0$ y $n = 1$, se tiene: $x_n = \frac{1}{2}(5 + 2\sqrt{6})^{n-1} + \frac{1}{2}(5 - 2\sqrt{6})^{n-1}$, $y_n = \frac{\sqrt{6}}{12}(5 + 2\sqrt{6})^{n-1} - \frac{\sqrt{6}}{12}(5 - 2\sqrt{6})^{n-1}$.

G 162- Resolver la ecuación: $x^2 + (2 - i)x - (3 + 3i) = 0$.

Solución: $x = \frac{-2 + i \pm \sqrt{(2 - i)^2 - 4(3 + 3i)}}{2} = \frac{i - 2 \pm (4 + i)}{2}$. Las raíces son: -3 y $1 + i$.

G 163- Se trata de construir un puente por valor de 141.800 euros, repartiéndose su importe entre cuatro pueblos, proporcionalmente al número de habitantes e inversamente proporcional a las distancias de cada pueblo al puente. Hallar el número de obligaciones de valor nominal de 100 euros que debe vender cada ayuntamiento para sufragar la inversión, sabiendo que los títulos se cotizan a 80,50%, que el número de habitantes es 5.250, 4.800, 2.100 y 1.500, y que las distancias son 900, 2.700, 1.800 y 3.060 metros, respectivamente.

Solución: $\frac{5250}{900} + \frac{4800}{2700} + \frac{2100}{1800} + \frac{1500}{3060} = 5,8\widehat{3} + 1,\widehat{7} + 1,1\widehat{6} + 0,4902 = 9,268$. El 1º ayuntamiento debe vender: $\frac{141800 \cdot 5,8\widehat{3}}{9,268 \cdot 80,50} = 1.108,69 \to 1.109$ títulos. El 2º: $\frac{141800 \cdot 1,\widehat{7}}{9,268 \cdot 80,50} = 337,89 \to 338$ títulos. El 3º: $\frac{141800 \cdot 1,1\widehat{6}}{9,268 \cdot 80,50} = 221,74 \to 222$ títulos. Y el 4º: $\frac{141800 \cdot 0,4902}{9,268 \cdot 80,50} = 93,17 \to 94$ títulos.

G 164- Con el importe de la venta de 10 títulos de la deuda A, de 500 euros nominales, que se cotizan al 101%, se compran 6 títulos de la deuda B, también de 500 euros nominales, ¿Cuál es su cotización?

Solución: $\frac{10 \cdot 1,01}{6} = 168,\widehat{3}\%$.

G 165- Hallar el importe A que debe añadirse a un capital C, para que colocado a interés simple r%, sumen los intereses de n años, lo mismo que habría aumentado el mismo capital C si se hubiese colocado a interés compuesto del r%, durante el mismo tiempo de n años. Aplicarlo a $C = 5.000$ euros, $r = 3\%$, $n = 15$ años.

Solución: $A = \frac{C[(1+i)^n - 1] - Cni}{in} = C\left[\frac{(1+i)^n - 1}{in} - 1\right]$, siendo: $i = \frac{r}{100}$. Aplicación: $5000\left(\frac{1,03^{15} - 1}{0,03 \cdot 15} - 1\right) = 1.199,64$ euros.

G 166- Hallar un número de tres cifras, múltiplo de 11, tal que intercambiando las cifras de las decenas y de las unidades, se obtenga un número cuyas tres cifras estén en progresión aritmética.

Solución: Sea el segundo número: $a \pm d, a, a \mp d$. El primero será: $a \pm d, a \mp d, a$, y como es múltiplo de 11, se debe cumplir: $a \pm d + a - (a \mp d) = a \pm 2d = \dot{11}$. Las soluciones son:

a	2	4	5	6	7
d	1	2	–3	3	–2
Número	132	264	825	396	957

G 167- Hace unos años, una factoría fabricaba productos que vendía por el triple de su capital social. De esta forma cubría gastos, dedicaba a reservas el 5% del capital, y daba un dividendo a sus accionistas del 8% del capital. Hoy en día, vende el 80% de las unidades que vendía anteriormente, las materias primas han aumentado sus precios en un 50%, los gastos de personal y el resto de gastos han crecido un 80%. El capital social se ha aumentado en un 50%. Sabiendo que anteriormente el consumo de materias primas era equivalente al 80% de su anterior capital, averiguar en qué proporción debe aumentar el precio de sus productos, si se quiere repartir un dividendo del 6% del capital actual, dotando las reservas con un 4% de dicho capital.

Solución: Llamando C al capital y G al resto de gastos, se cumplía en la situación anterior la siguiente relación: $3C - 0,8C - G = 0,13C$. Luego: $G = 2,07C$. En la situación actual, siendo R la relación entre el precio de venta que se propone y el anterior, y que el rendimiento de las materias primas no varía, se tiene: $0,8 \cdot 3CR - 0,8 \cdot 0,8C \cdot 1,5 - 1,8 \cdot 2,07C = 0,1 \cdot 1,5C$, cuya solución es: $R = 2,015$. Luego el precio debe aumentar en el $101,5\%$.

G 168- Un préstamo concedido al 5% se debe amortizar en 15 años. Para ello, el deudor se compromete a entregar anualmente durante los 5 primeros años, el 5% del capital recibido, y en los restantes años el 12,5% de dicho capital, con excepción del décimo año en el que entregará el 17,5%, y del último, en el que, para cancelar la deuda, deberá pagar 117.850 euros. Hallar el importe del préstamo.

Solución: Se plantea: $0,05C\frac{1,05^{15} - 1,05^{10}}{0,05} + 0,125C\frac{1,05^{10} - 1,05^{6}}{0,05} + 0,175C \cdot 1,05^{5} +$ $+0,125C\frac{1,05^{5} - 1,05}{0,05} + 117850 = 1,05^{15}C$. De donde se obtiene: $C = 1.000.051,05$ euros.

G 169- Hallar el capital acumulado en 100 años con la imposición inicial de 0,01 euros al 5% de interés compuesto anual.

Solución: $0,01 \cdot 1,05^{100} = 1,315$ euros.

G 170- Un banco tiene que cobrar a un cliente las siguientes letras: 7.500 euros el 6 de abril, 3.250 euros el 4 de mayo, y 5.500 euros el 7 de junio; y tiene que abonarle 4.000 euros el 13 de mayo y 1.200 euros el 9 de septiembre. Con fecha 6 de abril se quiere conocer el vencimiento medio (importe y fecha).

Solución: $\dfrac{3250 \cdot 28 + 5500 \cdot 62 - 4000 \cdot 37 - 1200 \cdot 156}{7500 + 3250 + 5500 - 4000 - 1200} = \dfrac{96800}{11050} = 8,76$ días. Es decir, el 15 de abril. El importe que el banco debe cobrar, es de 11.050 euros.

G 171- Una empresa, con un capital social de 20 millones de euros representado por 200.000 acciones de 100 euros cada una, explota un salto de agua que produce anualmente 30,9 millones de kW h, que vende a 0,07 euros/kW h. Sus gastos de explotación representan el 20% de las ventas y paga por impuesto de sociedades un 35% sobre el beneficio. Dedica a reservas un 40% del beneficio neto, y el resto del beneficio lo distribuye como dividendo. Con fecha 1 de enero de 2000, compra por 6.500.000 euros, un 2º salto de agua que produce 12 millones de kW h, y cuyos gastos de explotación son también del 20% de las ventas. Financia la compra mediante una emisión de obligaciones por dicho importe, de 100 euros de nominal cada título, a un interés del 6%, amortizables mediante 30 anualidades iguales. Un inversor ha comprado el 1 de enero de 1995, 100 acciones de la compañía a su valor nominal y las vende el 31 de diciembre de 2001, al 128% de su valor nominal, tras cobrar el dividendo de dicho año. ¿Cuál es el total de los dividendos recibidos y qué rentabilidad ha conseguido de su inversión?

Solución: En cada uno de los cinco años 1995/1999, la compañía repartió como dividendo un total de: $30.900.000 \cdot 0,07 \cdot 0.8 \cdot 0,65 \cdot 0,60 = 674.856$ euros, es decir, $3,37428$ euros por acción. La anualidad constante que dedica a intereses y a amortizar las obligaciones importa: $a = \dfrac{6500000 \cdot 1,06^{30} \cdot 0,06}{1,06^{30} - 1} = 472.217,92$ euros. El año 2000 dedica a intereses: $6.500.000 \cdot 0,06 = 390.000$ euros, y a amortización: $82.217,92$ euros, con los que amortiza 822 obligaciones. El año 2001, dedica a intereses: $(65.000 - 822)100 \cdot 0,06 = 385.068$ euros. Por tanto, en 2000, el dividendo es: $0,60 \cdot 0,65(42.900.000 \cdot 0,07 \cdot 0,8 - 390.000) = 784.836$ euros, es decir: $3,92418$ euros por acción. En 2001, el importe del dividendo es: $0,60 \cdot 0,65(42.900.000 \cdot 0,07 \cdot 0,80 - 385.068) = 786.759,48$ euros, es decir, $3,93380$ euros por acción. Por tanto, el total de los dividendos recibidos por el inversor, son: $100(5 \cdot 3,37428 + 3,92418 + 3,93380) = 2.472,938$ euros. La rentabilidad del inversor se obtiene calculando r en la siguiente ecuación: $10.000(1+r)^7 = 337,428[(1+r)^6 + \ldots + (1+r)^2] +$ $+392,418(1+r) + 393,38 + 12.800$. De donde se obtiene que: $r = 6,76\%$.

G 172- Una empresa emite 300.000 obligaciones de 100 euros cada una, con un interés del 5%, amortizables en 30 anualidades iguales. Un inversor adquiere 8.620 títulos, percibiendo el 1º año, sólo los intereses, mientras que en el 2º año le correspondió la amortización de un número de títulos que estaban en la misma proporción con los 8.620, que los amortizados dicho año en relación al total de los que estaban sin amortizar al principio de dicho año. ¿Qué importe recibió en dicho 2º año?

Solución: La anualidad constante es: $\dfrac{30.000.000 \cdot 1,05^{30} \cdot 0,05}{1,05^{30} - 1} = 1.951.543$ euros. Los intereses del 1º año son: $0,05 \cdot 30.000.000 = 1.500.000$ euros, quedando para amortizar 451.543 euros, con los que se amortizan 4.515 obligaciones. En el 2º año se devengan: $0,05(300.000 - 4.515)100 = 1.477.425$ euros por intereses, quedando para amortizar 474.118 euros, con los que se amortizan 4.741 títulos. Como la relación entre los títulos es: $\dfrac{4.741}{300.000 - 4515} = 0,016045$, el inversor recibe la amortización de $0,016045 \cdot 8.620 = 138$ títulos, cobrando en total en dicho 2º año: $8.620 \cdot 100 \cdot 0,05 + 138 \cdot 100 = 56.900$ euros.

G 173- Un comerciante adquiere cierto número de botellas de vino de cierta calidad para venderlas con un aumento del 10% sobre el precio de compra. Un dependiente realiza la venta en tres días. Pero el 1º día sustrae el importe de la venta de una botella y el resto lo ingresa en caja. El 2º día, sustrae la ganancia correspondiente a la venta de una botella y el resto lo ingresa en caja. Por la noche, el comerciante cuenta las botellas que le quedan y deduce que el importe de su venta será de 264 euros. El 3º día, el dependiente sustrae el importe de la venta de una botella y además la ganancia correspondiente a la venta de otra, ingresando el resto en caja. Liquidada la operación, el comerciante comprueba que la suma entregada por el dependiente supone ganancias iguales diarias y que la ganancia por botella sólo es de 0,60 euros. Se pide calcular el número de botellas compradas sabiendo que es múltiplo de cinco, el precio de compra y el número de botellas vendidas cada día.

Solución: Sean $x,\ y,\ z$ las botellas vendidas en los tres días, y t el precio unitario de compra. Lo ingresado en caja el 1º día es: $1,1xt-1,1t.$ El 2º día: $1,1yt-0,1t.$ Y el 3º: $1,1zt-1,1t-0,1t.$ La ganancia del 1º día es: $0,1xt-1,1t.$ La del 2º día: $0,1yt-0,1t.$ Y la del 3º día: $0,1zt-1,2t.$ Como estas ganancias son iguales entre sí, siendo su suma igual a $0,60(x+y+z)$, se tiene: $x=\dfrac{11t-18}{t-6},\ y=\dfrac{t+42}{t-6},\ z=\dfrac{12t-24}{t-6}.$ El número total de botellas es: $x+y+z=\dfrac{24t}{t-6}.$ Además: $1,1zt=264.$ Resolviendo el sistema, el número de botellas compradas es 60, el precio de compra es 10 euros por botella, y el número de botellas vendidas cada día: 23, 13 y 24.

G 174- La diferencia de áreas del exágono regular y del cuadrado inscritos en el mismo círculo es $3,629547\,\text{cm}^2$. Hallar el área del círculo circunscrito.

Solución: $\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}-2R^2=3,629547.$ Área del círculo: $\pi\dfrac{3,629547}{\frac{3}{2}\sqrt{3}-2}=19,065\,\text{cm}^2.$

G 175- Hallar la diferencia entre el capital formado con 100 euros colocados a interés del 5%, durante cuatro años con capitalización continua en un caso y con capitalización anual en el otro.

Solución: $100(e^{0,05\cdot 4}-1,05^4)=0,5896508$ euros.

G 176- El 1º día de este año se han comprado cierto número de obligaciones al 62,20% con un interés del 3%. Estas obligaciones quedan amortizadas a la par en 20 años. Calcular la rentabilidad anual de la inversión.

Solución: Inversión inicial por 100 euros nominales: $62,20.$ Intereses anuales: 3 euros por 100. Importe de la amortización: 100 euros. Luego: $62,2(1+r)^{20}=3\left[(1+r)^{19}+\ldots+1\right]+100.$ De donde se obtiene que: $r=6,40\%.$

G 177- Una persona impone en una cuenta bancaria que renta el 5%, al principio de un año, 3.000 euros, y cada año sucesivo impone una cantidad que excede en 1.000 euros a la del anterior. Al final del 1º año retira 100 euros, y cada año retira una cantidad un 10% menor que la del anterior. Averiguar qué capital tendrá en la cuenta después de cobrar al final del 5º año la cantidad correspondiente.

Solución: Se plantea: $C=3000\cdot 1,05^5+(3000+1000)\cdot 1,05^4+\ldots+(3000+4000)\cdot 1,05-$ $-100(1,05^4+0,9\cdot 1,05^3+\ldots+0,9^4)=27.986,80$ euros.

G 178- Un inversor compra con 3/8 de su capital, un terreno a 3.520 euros la *Ha*. Con los 3/8 del resto, compra una casa. El resto de su capital le renta 2.805 euros anuales, habiendo colocado sus 3/5 al 4,5% y sus 2/5 al 6%. Averiguar cuántas *Ha* tiene el terreno, cuál era su capital, cuánto costó la casa y cuáles fueron las cantidades colocadas.

Solución: $C\left(\dfrac{\frac{15}{64}\cdot 4,5}{100}+\dfrac{\frac{10}{64}\cdot 6}{100}\right)=2.805,$ de donde: $C=140.800$ euros. El terreno tiene: $\dfrac{\frac{3}{8}140.800}{3.520}=15Ha.$ La casa costó: $\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}140.800=33.000$ euros. Las cantidades colocadas son: 33.000 al 4,5% y 22.000 al 6%.

G 179- Se compra una finca en P euros, acordándose que se satisfaría este importe en 20 anualidades consecutivas, siendo la 1ª de a euros abonada al año de la compra. Cada una de las anualidades restantes excedió de la anterior en 637 euros. Si las anualidades se hubiesen pagado un año antes, la finca hubiera costado 6.412,23 euros más. Hallar P y a, suponiendo un interés del 3%.

Solución: Se tiene que: $1,03P=P+6412,23.$ Luego: $P=213.741$ euros. $1,03^{20}P=1,03^{19}a+1,03^{18}(a+637)+1,03^{17}(a+2\cdot 637)+\ldots+(a+19\cdot 637)=$ $=a\dfrac{1,03^{20}-1}{0,03}+637\left(\dfrac{1,03^{20}-1,03}{0,03}-19\right).$ De donde se tiene que: $a=8.937,69$ euros.

G 180- Una sociedad española que tiene acciones cotizadas en Inglaterra por valor nominal de 2 millones de libras esterlinas, quiere comprarlas, para lo que emite en España obligaciones al 5%. La cotización de dichas acciones es del 127%, el cambio de la libra es de 1,40 euros. Hallar el importe mínimo de las obligaciones a emitir, sabiendo que a los accionistas ingleses habrá que darles una prima del 15% sobre el nominal.

Solución: $2.000.000 \cdot 1,40(1,27+0,15) = 3.976.000$ euros.

G 181- Con 600.432 euros se hicieron en el año 2000 las siguientes operaciones: En marzo se compró un cierto número de obligaciones A y de obligaciones B, del 4% de interés, a los cambios respectivos de 86,90% y 91,20%, pagándose por gastos el 1,25 por mil del efectivo, más 112,50 euros. De esta operación quedó un sobrante de 24.000 euros, con los que se suscribieron el 10 de julio, sin gastos, obligaciones C del 3%, con intereses pagaderos sin retención, por trimestres vencidos en 10 de enero, abril, julio, octubre, con cupón 10 de octubre. Si durante dicho año y hasta el 8 de enero de 2001 se habían cobrado por intereses 20.980 euros, cuál es el dinero invertido en A y en B, sabiendo que pagan sus intereses por trimestres vencidos el 1 de abril, julio, octubre y enero con una retención del 20%.

Solución: Sean x e y los importes invertidos en A y B. Se plantea la siguiente ecuación: $24.000 \cdot 0,03 \cdot 0,25 + 0,032(x+y) = 20.980$, obteniéndose: $x+y = 650.000$ euros, Como se tiene el sistema: $1,00125(0,869x + 0,912y) + 112,5 = 576.432$, $869x + 912y = 575.600.000$, su solución es: $x = 400.000$ euros, $y = 250.000$ euros.

G 182- Se moldea una pieza de bronce que contiene 85% de cobre, 8% de zinc, 7% de estaño. La pieza cubica $0,52\,\mathrm{m}^3$. La densidad del bronce es $8,9\,\mathrm{kg/dm}^3$. Se desea saber el peso de bronce a fundir, teniendo en cuenta que sólo el 92% de la fundición es utilizable. Conocido el peso del bronce, calcular las cantidades de los minerales correspondientes que se cargarán en el crisol, contando con una pérdida de zinc por volatilización del 3%. La riqueza de cada mineral es: 99,94% el de cobre, 99,90% el de zinc, 99,50% el de estaño.

Solución: Peso del bronce: $\dfrac{0,52 \cdot 8,9}{0,92} = 5,030435$ t. Peso del mineral de cobre: $5,030435 \cdot \dfrac{0,85}{0,9994} = 4,2784$ t. Peso del mineral de zinc: $5,030435 \cdot \dfrac{0,08}{0,93 \cdot 0,999} = 0,4332$ t. Peso del mineral de estaño: $5,030435 \cdot \dfrac{0,07}{0,995} = 0,3539$ t.

G 183- El 1 de enero de 1990, un señor deposita en un banco un capital igual al valor absoluto de $100 \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$, y el 1 de enero de 1991, 1992, 1993 y 1994 deposita la misma cantidad. El 1 de enero de 1997 compra 30 acciones de la sociedad S, de 100 euros nominales, al cambio del 400%, con una comisión del 1 por mil del nominal. El importe de esta operación lo paga con dinero que tenía en el banco. Hallar el dinero que queda en el banco tras la operación. El interés del banco es del 4% compuesto. A_1, B_1, C_1 son las soluciones enteras positivas mínimas del sistema: $3x-2y+4z = 3$, $x+2y-z = 4$, $18x-20y+31z = 9$; A_2 y B_2 se deducen de $A_2 + B_2 i + e^{-L\frac{1}{(1-i)^3}} = 1+i$; A_3 y B_3 corresponden a $2x$ y $2y$, siendo x e y los valores que cumplen $\sqrt{6+\sqrt{-13}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}\,i$; $C_2 = E(\ln 7)$; $C_3 =$ número de cifras de la parte no periódica de $\dfrac{1}{2^3 \cdot 5^5 \cdot 37}$.

Solución: La inversión en acciones de S, es: $30 \cdot 100 \cdot 4 + 3 = 12.003$ euros. El sistema es homogéneo, siendo: $x = \dfrac{7-3z}{4}$, $y = \dfrac{9+7z}{8}$. Para $z = 1$, $x = 1$, $y = 2$, que dan: $A_1 = 1$, $B_1 = 2$, $C_1 = 1$. $A_2 + B_2 i + (1-i)^3 = 1+i$. De donde: $A_2 = B_2 = 3$. Como: $6 + i\sqrt{13} = x - y + 2\sqrt{xy}\,i$, se tiene que: $x - y = 6$, $xy = \dfrac{13}{4}$. Luego: $x = \dfrac{13}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$. Por tanto: $A_3 = 13$, $B_3 = -1$. $E(\ln 7) = E(1,94)$. Luego: $C_2 = 1$. Como: $\dfrac{1}{2^3 \cdot 5^5 \cdot 37} = 0,00000\widehat{108}$, se tiene que, $C_3 = 5$. El valor absoluto de $100 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 13 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ es 3.000. Por tanto, el dinero que queda en el banco es: $3.000(1,04^7 + \ldots + 1,04^3) - 12.003 = 6.274,88$ euros.

G 184- Un individuo suscribe un seguro el 1 de enero de 2000, comprometiéndose a abonar durante los 20 años siguientes, el día 1 de enero de cada uno de ellos, una determinada cantidad. A partir del final del año vigésimo, cobrará una renta vitalicia de 10.000 euros anuales. Calcular la anualidad, con un interés del 4,5%. La aseguradora estima su fallecimiento en el transcurso de 2032.

Solución: $a(1,045^{20} + 1,045^{19} + \ldots + 1,045) = 10000(1 + \frac{1}{1,045} + \ldots + \frac{1}{1,045^{11}})$, de donde se obtiene: $a = (10000\frac{\frac{1}{1,045^{12}} - 1}{\frac{1}{1,045} - 1}) \div (\frac{1 - 1,045^{20}}{\frac{1}{1,045} - 1}) = 2.906,65$ euros.

G 185- Resolver la ecuación $x^2 + ax + b = 0$, siendo $\log a = 1,6537012$ y $\log b = 1,8759135$.

Solución: Siendo: $\sin\theta = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, $x_1 = -\sqrt{2}\tan\frac{\theta}{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}\cot\frac{\theta}{2}$, $\theta = 22°38'02''8$. Luego las raíces son: $-1,734871165$ y $-43,31579321$.

G 186- Resolver $ax^4 + (b-4a)x^3 - (11a+4b)x^2 + (30a-11b)x + 30b = 0$, sabiendo que el producto de dos de sus raíces es 10.

Solución: Por el enunciado se tiene que la ecuación dada es igual al siguiente producto: $(x^2 + mx + 10)(x^2 + nx + \frac{3b}{a}) = x^4 + (m+n)x^3 + (10 + mn + \frac{3b}{a})x^2 + (10n + \frac{3bm}{a})x + \frac{30b}{a} = 0$ Obteniendo las razones de los coeficientes de esta ecuación con los de la dada, se tiene: $\frac{1}{a} = \frac{m+n}{b-4a} = \frac{10 + mn + \frac{3b}{a}}{-(11a+4b)} = \frac{10n + \frac{3bm}{a}}{30a - 11b} = \frac{\frac{30b}{a}}{30b}$. De donde: $m = -7$ y $n = 3 + \frac{b}{a}$. Resolviendo las dos ecuaciones de 2º grado, se tienen las raíces: $2,\ 5,\ -3,\ -\frac{b}{a}$.

G 187- Dada la ecuación $y = x^2 - mx + 12 = 0$, 1º) Determinar m de modo que siendo ambas raíces positivas, la diferencia de sus cuadrados sea 7. 2º) Sustituido el valor obtenido de m, obtener los valores de x de forma que $12 < y < 20$.

Solución: La diferencia de los cuadrados de las raíces es: $m\sqrt{m^2 - 48} = 7$, de donde: $m = \pm 7$. Para que las raíces sean positivas: $m = +7$. Por tanto: $y = x^2 - 7x + 12$. Para $y = 12$, las raíces son: 0 y 7. Para $y = 20$, las raíces son: -1 y 8. Luego los valores pedidos son: $-1 < x < 0$ y $7 < x < 8$.

G 188- Dada la ecuación $(m-2)x^2 + 2(m-1)x + m - 3 = 0$, hallar qué valores hay que dar a m para que las dos raíces sean mayores que 1.

Solución: Haciendo la sustitución: $x = y + 1$, se tiene: $(m-2)y^2 + 2(2m-3)y + 4m - 7 = 0$, cuyas raíces han de ser positivas, por lo que su suma y su producto también lo son. Para ello: $\frac{3-2m}{m-2} > 0$; $\frac{4m-7}{m-2} > 0$. Es decir: $\frac{3}{2} < m < \frac{7}{4}$. Además se ha de cumplir que: $(2m-3)^2 - (m-2)(4m-7) \geq 0$, $m \geq \frac{5}{3}$. Por tanto: $\frac{5}{3} \leq m < \frac{7}{4}$.

G 189- Dada la ecuación $x^4 - 4x^2 + 4ax - 1 = 0$, hallar el valor de a para que haya una raíz doble, y resolver la ecuación.

Solución: Siendo b la raíz doble, se tiene: $x^4 - 4x^2 + 4ax - 1 = (x^2 + mx + p)(x^2 - 2bx + b^2) =$ $= x^4 + (m-2b)x^3 + (b^2 - 2bm + p)x^2 + (mb^2 - 2bp)x + pb^2 = 0$. Igualando los coeficientes, se tiene: $m - 2b = 0$, $b^2 - 2bm + p = -4$, $mb^2 - 2bp = 4a$, $pb^2 = -1$. Resolviendo el sistema, se obtienen los siguientes valores de a y de las raíces de la ecuación dada:

a	Raíz doble (b)	$x^2 + mx + p = 0$	Las otras dos raíces
$+1$	$+1$	$x^2 + 2x - 1 = 0$	$-1 \pm \sqrt{2}$
-1	-1	$x^2 - 2x - 1 = 0$	$1 \pm \sqrt{2}$
$\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$x^2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x - 3 = 0$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1 \pm \sqrt{10})$
$\dfrac{-5\sqrt{3}}{9}$	$\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$	$x^2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x - 3 = 0$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1 \pm \sqrt{10})$

G 190- Dada la ecuación $(m-2)x^2 - 2(m+3)x + 4m = 0$, hallar entre qué límites debe estar m para que una raíz sea superior a 3 y la otra inferior a 2.

Solución: $x = \dfrac{m+3 \pm \sqrt{-3m^2+14m+9}}{m-2}$. Para que una de las raíces sea mayor que 3, ha de tenerse que: $\dfrac{m+3 \pm \sqrt{-3m^2+14m+9}}{m-2} > 3$, $m+3 \pm \sqrt{-3m^2+14m+9} > 3(m-2)$. Por tanto: $2 < m < \dfrac{36}{7}$. Para que la segunda raíz sea menor que 2, ha de cumplirse que: $\dfrac{m+3 \pm \sqrt{-3m^2+14m+9}}{m-2} < 2$, $m+3 \pm \sqrt{-3m^2+14m+9} < 2\,(m-2)$. Luego: $2 < m < 5$. El intervalo común es el pedido: $2 < m < 5$.

G 191- Dado $y = \dfrac{x^2 - 11x + 22}{x^2 - 7x + 10}$, determinar los valores enteros, positivos o negativos, de x, tales que y sea entero, positivo o negativo.

Solución: $y = 1 - \dfrac{4(x-3)}{(x-5)(x-2)} = 1 - Q$.

x	< -1	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	> 9
Q	$-1 < Q < 0$	$-16/18$	$-12/10$	-2	–	0	-2	–	3	$8/5$	$10/9$	$6/7$	$1 > Q > 0$
y	–	–	–	3	–	1	3	–	-2	–	–	–	–

Luego las soluciones para x, y son: 1, 3; 3, 1; 4, 3; 6, –2.

G 192- Dada la ecuación $4x^2 - 10(2m+1)x + 14m + 5 = 0$, 1º) Demostrar que tiene dos raíces reales distintas para todo m real. 2º) Hallar el valor de m que hace mínima la diferencia de las raíces y calcular el valor de este mínimo. 3º) Determinar m para que la suma de los cuadrados de las raíces sea 1, y calcularlas.

Solución: 1º) $x = \dfrac{10m + 5 \pm \sqrt{100m^2 + 44m + 5}}{4}$. El discriminante $\Delta = 100m^2 + 44m + 5$, siempre es positivo, por lo que siempre hay dos raíces reales distintas para todo m real. 2º) Siendo d la diferencia de las raíces, se tiene: $d = \dfrac{\sqrt{100m^2 + 44m + 5}}{2}$. Despejando m, se obtiene: $m = \dfrac{-22 \pm \sqrt{400d^2 - 16}}{100}$, $d^2 = \dfrac{16}{400}$, $d_{\min} = \pm 0,2$, $m = \pm\dfrac{11}{50} = \pm\, 0,22$. 3º) Siendo S la suma de las raíces y P su producto, se tiene que la suma de los cuadrados de las raíces es igual a: $S^2 - 2P = \dfrac{10^2(2m+1)^2}{4^2} - 2\dfrac{14m+5}{4} = 1$. En el cuadro siguiente se exponen los valores de m y de las correspondientes raíces:

m	x_1	x_2
$-\dfrac{11}{50}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{4}{5}$
$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

G 193- Se considera la ecuación $mx^2 - (8m+1)\,x + 4(4m+1) = 0$. 1º) Resolverla. 2º) Determinar m

para que el cociente de sus raíces sea $-\frac{1}{4}$. 3º) Se considera la función $y = mx^2 - (8m+1)x + 4(4m+1)$. Demostrar que pasa por un punto fijo y hallarlo.

Solución: 1º) $x = \frac{8m+1 \pm 1}{2m}$, $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4m+1}{m}$. 2º) $m_1 = -\frac{1}{20}$, $m_2 = -\frac{1}{5}$. 3º) Despejando x, se tiene: $x = \dfrac{8m+1 \pm \sqrt{1+4my}}{2m}$. El punto fijo es $(4,0)$.

G 194- Sean a y b las raíces de $x^2 - 2mx + m^2 = 0$, y sean c y d los valores que toma el trinomio $y = z^2 + mz + m^2$ cuando se dan a z los valores a y b. Calcular en función de m el valor de la expresión: $E = \left(\frac{c}{a^3} + \frac{d}{b^3}\right) + 2\left(\frac{c}{a^2} + \frac{d}{b^2}\right) + 4\left(\frac{c}{a} + \frac{d}{b}\right)$.

Solución: $a = b = m$, $c = d = 3m^2$, $E = \frac{6}{m} + 12 + 24m$.

G 195- Se da la ecuación $x^2 + px + q = 0$, cuyas raíces a y b son distintas de 1. Hallar la ecuación cuyas raíces sean: $\frac{a+1}{a-1}$ y $\frac{b+1}{b-1}$. La nueva ecuación tiene dos raíces: c y d. Aplicar a esta ecuación la misma transformación que a la primera.

Solución: $\frac{a+1}{a-1} + \frac{b+1}{b-1} = \frac{2ab-2}{ab-(a+b)+1} = \frac{2q-2}{q+p+1}$, pues: $a+b = -p$, $ab = q$, Procediendo de la misma forma: $\frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{b+1}{b-1} = \frac{ab+a+b+1}{ab-a-b+1} = \frac{q-p+1}{q+p+1}$. Luego la nueva ecuación es: $x^2 - \frac{2q-2}{q+p+1}x + \frac{q-p+1}{q+p+1} = 0$, Aplicando la misma transformación, se tiene: $\frac{c+1}{c-1} + \frac{d+1}{d-1} = \frac{2cd-2}{cd-(c+d)+1} = \dfrac{2\,\frac{q-p+1}{q+p+1} - 2}{\frac{q-p+1}{q+p+1} + \frac{2q-2}{q+p+1} + 1} = -p$ y de forma similar: $\frac{c+1}{c-1} \cdot \frac{d+1}{d-1} = q$. Luego la transformada de la nueva ecuación es la ecuación original: $x^2 + px + q = 0$.

G 196- Se considera la función $y = (1-2m)x^2 + (1-3m)x + 5m - 2$. Demostrar que cualquiera que sea m, los puntos $(1,0)$ y $(-\frac{5}{2}, \frac{7}{4})$ pertenecen a la curva, y que ésta corta a $y = -1$ en dos puntos de abscisas a y b, tales que son conjugados armónicos con respecto a dos puntos fijos que se hallarán.

Solución: $y(1) = 1 - 2m + 1 - 3m + 5m - 2 = 0$. De forma similar: $y(-\frac{5}{2}) = \frac{7}{4}$. Luego son independientes de m. Para $y = -1$, se tiene: $(1-2m)x^2 + (1-3m)x + 5m - 1 = 0$. Luego: $a + b = \frac{3m-1}{1-2m}$ y $ab = \frac{5m-1}{1-2m}$. La relación que cumplen las abscisas de cuatro puntos conjugados armónicos, viene dada por la expresión: $2(ab+cd) = (a+b)(c+d)$. Luego: $2(\frac{5m-1}{1-2m} + cd) = (\frac{3m-1}{1-2m})(c+d)$. Operando: $c = \frac{(10-3d)m + d - 2}{(3+4d)m - 2d - 1}$; para que sea independiente de m, ha de ser: $\frac{10-3d}{3+4d} = \frac{d-2}{-2d-1}$, de donde: $d = 3 \pm \sqrt{11}$ y $c = 3 \mp \sqrt{11}$.

G 197- Se plantan árboles en todos los vértices de una cuadrícula limitada por un perímetro rectangular de dimensiones a, b siendo $a > b$. El lado mayor comprende p intervalos iguales y el menor, q. 1º) Hallar el número n de árboles. 2º) En función de a, b, n, hallar el lado x de los cuadrados. 3º) Deducir el valor de x correspondiente a los valores: $a = 140$, $b = 60$, $n = 377$.

Solución: 1º) $n = (p+1)(q+1) = (\frac{a}{x} + 1)(\frac{b}{x} + 1)$. 2º) $nx^2 = (a+x)(b+x)$, de donde se obtiene que: $x = \dfrac{a+b+\sqrt{(a+b)+4ab(n-1)}}{2(n-1)}$ (el signo $-$ de la raíz no es válido, pues se obtendría un valor negativo para x). 2º) Siendo: $377 = 13 \cdot 29$, $p+1 = 29$, $q+1 = 13$, $x = \frac{140}{28} = 5$, $y = \frac{60}{12} = 5$.

G 198- El precio unitario y la cantidad disponible de cierta mercancía han estado con los correspondientes al año anterior, en la relación $k = 1,1$, idéntica para uno y otra, a partir de 1980. En cierto año múltiplo de 13, el valor es 1.000 euros. Determinar el primer año siguiente, múltiplo de 7, en que dicho valor es 3.138,43 euros.

Solución: $1000 \cdot 1,1^{2n} = 3138,43$; $n = 6$; $13x + 6 = 7y$; $x = 153$; $y = 285$. Luego el año pedido es: $285 \cdot 7 = 1995$.

G 199- Se tiene un tubo de $4\,\mathrm{cm}$ de diámetro interior, cerrado por sus extremos, que contiene aire a presión de $7\,\mathrm{kg/cm^2}$. El tubo está inclinado $22°30'$ respecto a la horizontal, salvando un desnivel de $50\,\mathrm{m}$. Se abre un grifo situado en el tubo. Averiguar el volumen de aire que sale del tubo, sabiendo que la presión atmosférica en el exterior del tubo es de $1\,\mathrm{kg/cm^2}$.

Solución: Volumen del interior del tubo: $2^2\pi \cdot \dfrac{5000}{\sin 22°30'} = 164.187,54\ \mathrm{cm^3}$. Volumen de aire que sale del tubo: $6 \cdot 164.187,54 = 985.125,266\ \mathrm{cm^3} = 985,125$ litros.

G 200- Dos segmentos iguales de l m de longitud, están divididos en p y q partes iguales respectivamente. Están colocados de forma que coinciden los extremos. Probar que la mínima distancia entre divisiones no es inferior a l/pq, y que existen dos grupos de divisiones a esa distancia. Aplicar al caso de $p = 150$, $q = 253$.

Solución: Sea d la distancia que existe entre x divisiones del 1º segmento e y divisiones del 2º. Por tanto: $x\dfrac{l}{p} - y\dfrac{l}{q} = d = \dfrac{l}{pq}(qx - py)$. Por lo que d será mínima cuando: $qx - py = 1$, quedando demostrado que: $d \not< \dfrac{l}{pq}$. Existen dos grupos de divisiones correspondientes a: $qx - py = 1$, y a: $px - qy = 1$. Para $p = 150$, $q = 253$, la menor distancia es: $\dfrac{l}{150 \cdot 253}$ correspondiendo a: 1º) $253x - 150y = 1$, es decir: $x = 150t + 67$, $y = 253t + 113$; luego 67 divisiones del 1º segmento y 113 del 2º segmento. 2º) $150y - 253x = 1$, es decir: $x = 150t - 67$, $y = 253t - 113$. Lo que da: $150 - 67 = 83$ divisiones del primer segmento y $253 - 113 = 140$ del segundo.

G 201- Dos motoristas A y B parten al mismo tiempo, uno de Madrid y el otro de Zaragoza, dirigiéndose A a Zaragoza y B a Madrid, recorriendo con velocidad uniforme la distancia d entre las dos ciudades, A en a horas y B en b horas. Se cruzan m horas antes de la llegada de A a Zaragoza y n horas antes de que B llegue a Madrid. Hallar la relación $\dfrac{a}{b}$.

Solución: $a - m = b - n$, $(a - m)\dfrac{d}{a} + (b - n)\dfrac{d}{b} = d$, $ab = bm + an$. Resolviendo el sistema, se tiene: $a = m \pm \sqrt{mn}$, $b = n \pm \sqrt{mn}$. Luego: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m \pm \sqrt{mn}}{n \pm \sqrt{mn}} = \sqrt{\dfrac{m}{n}}$.

G 202- Se extrae mineral de hierro de dos minas diferentes. Uno contiene 72% de hierro y el otro 58%. Se mezclan cantidades desconocidas de ambos minerales y se obtiene una mezcla de 62% de hierro. Si para hacer la mezcla se hubieran tomado $15\,\mathrm{kg}$ más de cada uno, se hubiera obtenido una mezcla con 63,25% de hierro. Calcular los pesos que se tomaron de cada mineral.

Solución:

	Mineral 1º	Mineral 2º	Mezcla	Mezcla hipotética
Peso	x	y	$x + y$	$x + 15 + y + 15$
Hierro	$0,72x$	$0,58y$	$0,72x + 0,58y$	$0,72(x + 15) + 0,58(y + 15)$

$0,72x + 0,58y = 0,62(x + y)$, $0,72(x + 15) + 0,58(y + 15) = 0,6325(x + y + 30)$. Resolviendo el sistema, se tiene: $x = 12\,\mathrm{kg}$, $y = 30\,\mathrm{kg}$.

G 203- Resolver el sistema $x^{\frac{2}{5}} + y^{\frac{2}{5}} = 34$; $0,4(\log x + \log y) = 2 + \log 2,25$.

Solución: Operando en la 2ª ecuación: $\log(x^{0,4} \cdot y^{0,4}) = \log 225$. Luego: $x^{0,4} \cdot y^{0,4} = 225$. Y como: $x^{0,4} + y^{0,4} = 34$, se tiene que: $x^{0,4}$ e $y^{0,4}$ son las raíces de: $z^2 - 34z + 225 = 0$, que son 9 y 25. Por tanto, la solución pedida es: $x = \sqrt{9^5} = 243$, $y = \sqrt{25^5} = 3.125$, o viceversa.

G 204- Resolver el sistema $x^9+y^9=513$, $x^3+y^3=9$.

Solución: Se hace: $x^3=A$, $y^3=B$. Luego: $B=9-A$, $A^3+(9-A)^3=513$. Operando, se tiene: $A^2-9A+8=0$, cuyas soluciones son 1 y 8. Por tanto, la solución pedida es: $x=1$, $y=2$, o viceversa.

G 205- Tres motoristas A, B, C parten del mismo punto y a la vez, en una pista circular de $2.520\,\text{m}$, a la que deben dar 18 vueltas. Termina la carrera cuando el ganador, A, llega a la meta. Simultáneamente con él, llegan también a la meta B y C, pero B sólo ha dado 16 vueltas y C sólo 14. Los cronometradores de meta no tomaron la hora de salida ni la de llegada. Pero un cronometrador de ruta, anotó que cuando A alcanzó por 1ª vez a C, eran las $4\,\text{h}\,43\,\text{min}\,20\,\text{s}$, y que cuando alcanzó por 1ª vez a B, eran las $4\,\text{h}\,51\,\text{min}\,44\,\text{s}$. Se desea saber 1º) A qué hora comenzó la carrera y a qué hora llegó A a la meta. 2º) Las velocidades de los tres. 3º) Cuántas veces alcanzó A a los otros dos y a qué horas.

Solución: Siendo t el tiempo de duración de la carrera, las velocidades son: $V(A)=\dfrac{18\bullet 2520}{t}$, $V(B)=\dfrac{16\bullet 2520}{t}$, $V(C)=\dfrac{14\bullet 2520}{t}$. Siendo $e(AC)$ el espacio recorrido por A hasta alcanzar por primera vez a C, la igualdad de tiempos transcurridos da: $\dfrac{e(AC)}{\frac{18\bullet 2520}{t}}=\dfrac{e(AC)-2520}{\frac{14\bullet 2520}{t}}$, de donde: $e(AC)=11.340\,\text{m}$, equivalente a $4,5$ vueltas (la cuarta parte de la carrera), por lo que A alcanzó a C cuatro veces. Y siendo $e(AB)$ el espacio recorrido por A hasta alcanzar por primera vez a B, el tiempo transcurrido es: $\dfrac{e(AB)}{\frac{18\bullet 2520}{t}}=\dfrac{e(AB)-2520}{\frac{16\bullet 2520}{t}}$, de donde: $e(AB)=22.680\,\text{m}$, equivalente a 9 vueltas (la mitad de la carrera), por lo que A alcanzó a B dos veces. Entre los dos alcances, el tiempo transcurrido es: $8\,\text{min}\,04\,\text{s}=0,14\,\text{h}$. Luego: $V(A)=\dfrac{22680-11340}{0,14}=81.000\,\text{m/h}=81\,\text{km/h}$, y las velocidades de B y C, vienen dadas por: $V(B)=\dfrac{81}{2}=40,5\,\text{km/h}$ y $V(C)=\dfrac{81}{4}=20,25\,\text{km/h}$. La hora de comienzo de la carrera fue a las $4\,\text{h}\,43\,\text{min}\,20\,\text{s}-8\,\text{min}\,24\,\text{s}=4\,\text{h}\,34\,\text{min}\,56\,\text{s}$, siendo la hora de su terminación las $4\,\text{h}\,43\,\text{min}\,20\,\text{s}+3(8\,\text{min}\,24\,\text{s})=5\,\text{h}\,08\,\text{min}\,32\,\text{s}$.

G 206- Un lingote de oro y plata pesa $2\,\text{kg}$. Sumergido en agua, su peso disminuye en $125\,\text{g}$. Cuál es la composición del lingote sabiendo que los pesos específicos del oro y de la plata son 19 y $10,5\,\text{kg/dm}^3$.

Solución: Siendo x el peso de oro del lingote, el peso de la plata es: $2-x$. Por tanto, se plantea que: $\dfrac{x}{19}+\dfrac{2-x}{10,5}=0,125$. Luego: $x=1,536764706\,\text{kg}$ de oro y $0,463235294\,\text{kg}$ de plata.

G 207- Dadas las ecuaciones $x^3-5x-2=0$, $x^3-3x^2+ax+1=0$, determinar a para que tengan dos raíces comunes y hallarlas.

Solución: Dividiendo las dos ecuaciones por $x^2+px+q=0$, y anulando los restos, se tiene: $p^2-q-5=0$, $pq=2$, $a=q-p^2-3p$, $pq+3q+1=0$. Resolviendo el sistema, se tiene: $p=-2$, $q=-1$, $a=1$. Las raíces comunes son las de $x^2-2x-1=0$. Es decir: $1\pm\sqrt{2}$.

G 208- Se consideran las tres ecuaciones siguientes: $x^2-px+q=0$ (cuyas raíces son A y B), $x^2-p'x+q'=0$ (cuyas raíces son B y C), $x^2-p''x+q''=0$ (cuyas raíces son C y A). Hallar las relaciones entre los coeficientes (conociéndose p, p', p'' se conocen q, q', q''). Aplicar a $p=3$, $p'=5$, $p''=9$.

Solución: Se tiene: $p=A+B$, $p'=B+C$, $p''=C+A$. Sumando dos cualesquiera y restando la tercera, se obtiene: $A=\frac{1}{2}(p-p'+p'')$, $B=\frac{1}{2}(p+p'-p'')$, $C=\frac{1}{2}(-p+p'+p'')$. Además se tiene: $q=AB$, $q'=BC$, $q''=CA$. Multiplicando dos cualesquiera y dividiendo por la tercera, se obtiene: $A=\sqrt{\dfrac{qq''}{q'}}$, etc. Por tanto, se tiene que: $\frac{1}{2}(p-p'+p'')=\sqrt{\dfrac{qq''}{q'}}$, obteniéndose los valores pedidos: $q=AB=\frac{1}{4}(p-p'+p'')(p+p'-p'')$, $q'=BC=\frac{1}{4}(p+p'-p'')(-p+p'+p'')$,

$q'' = CA = \frac{1}{4}(-p+p'+p'')(p-p'+p'')$, $p = A+B = \sqrt{\frac{qq''}{q'}} + \sqrt{\frac{qq'}{q''}}$, etc. Para los valores dados, se tiene: $A = \frac{1}{2}(3-5+9) = \frac{7}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{11}{2}$, siendo: $q = -\frac{7}{4}$, $q' = -\frac{11}{4}$, $q'' = \frac{77}{4}$.

G 209- Resolver y discutir según los valores de a, b, c el sistema $x = cy+bz$, $y = az+bx$, $z = cx+ay$.

Solución: El sistema es homogéneo, luego (con independencia de la solución $0,0,0$) para ser compatible, el determinante de los coeficientes ha de ser nulo: $\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ -b & 1 & -a \\ -c & -a & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1-ab^2-ac^2-2bc-a^2 = 0$. Luego: $(1-bc)^2 = (a+b^2)(a+c^2)$, es decir que: $(1-bc)$ es media proporcional entre $(a+b^2)$ y $(a+c^2)$. Cumpliéndose esa condición, y no siendo nulo ninguno de los tres binomios, las soluciones son, por ejemplo: $x = (b+ac)\lambda$, $y = (a+b^2)\lambda$, $z = (1-bc)\lambda$. En los cuadros siguientes, se exponen las soluciones para situaciones particulares de a, b, c. a) Los tres binomios son distintos de cero:

				x	y	z
$a = 0$	$b \neq 0$	$c \neq 0$	$2bc = 1$	λ	$b\lambda$	$\frac{\lambda}{2b}$
"	"	"	$2bc \neq 1$	0	0	0
$a \neq 0$	$b = 0$	$c \neq 0$	$a^2+ac^2 = 1$	$\pm\sqrt{a(1-a^2)}\,\lambda$	$a\lambda$	λ
"	"	"	$a^2+ac^2 \neq 1$	0	0	0
$a \neq 0$	$b \neq 0$	$c = 0$	$a^2+ab^2 = 1$	$\pm\sqrt{a(1-a^2)}\,\lambda$	λ	$a\lambda$
"	"	"	$a^2+ab^2 \neq 1$	0	0	0

b) Dos binomios son nulos:

				x	y	z
$a+b^2 = 0$	$1-bc = 0$	$a+c^2 \neq 0$	$b = 1$	$\lambda+\mu$	λ	μ
"	"	"	$b = -1$	$-\lambda-\mu$	λ	μ
"	"	"	$b \neq \pm1$	0	0	0
$a+b^2 \neq 0$	$1-bc = 0$	$a+c^2 = 0$	$c = 1$	$\lambda+\mu$	λ	μ
"	"	"	$c = -1$	$-\lambda-\mu$	λ	μ
"	"	"	$c \neq \pm1$	$c\lambda$	λ	0

c) Los tres binomios son nulos:

			x	y	z
$a = -1$	$b = 1$	$c = 1$	$\lambda+\mu$	λ	μ
$a = -1$	$b = -1$	$c = -1$	$-\lambda-\mu$	λ	μ

d) Otros casos:

			x	y	z
$a=0$	$b=0$	$c\neq 0$	0	0	0
$a=0$	$b\neq 0$	$c=0$	0	0	0
$a=1$	$b=0$	$c=0$	0	λ	λ
$a=-1$	$b=0$	$c=0$	0	$-\lambda$	λ
$a\neq\pm 1$	$b=0$	$c=0$	0	0	0
$a=0$	$b=0$	$c=0$	0	0	0

G 210- Hallar el valor de m que hace compatible el sistema:

$$\begin{aligned} 9x &- (3+i)y + mz = 0\\ x &+ (3+i)y + z = 0\\ (3-i)x &+ 2y + (3-i)z = 0\end{aligned}$$

Hallado m, calcular su logaritmo en el sistema cuya base sea el antilogaritmo del valor de la expresión: $2n\cdot 10^{-1}[\log(n+5)-\log n]$, cuando $n\rightarrow\infty$.

Solución: $\begin{vmatrix} 9 & -3-i & m\\ 1 & 3+i & 1\\ 3-i & 2 & 3-i\end{vmatrix}=0$, $m=9$. La solución es: $x=t$, $y=0$, $z=-t$. La base es el antilog$(2n\cdot 10^{-1}[\log(n+5)-\log n])=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+5}{n}\right]^{\frac{n}{5}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{5}{n}\right]^{\frac{n}{5}}=e$. Luego la base es el número e, teniéndose que $\ln 9=2,197224577$.

G 211- Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-x-y&=48\\ xy+x+y&=31\end{aligned}$$

Solución: Operando, se tienen las ecuaciones: $x^2+y^2+xy=79$, $(x+y)^2-xy=79$, $(x+y)^2=(31-xy)^2=79+xy$, $x^2y^2-63xy+882=0$, $xy=21$ ó $xy=42$. Luego: $x+y=31-21=10$, o bien: $x+y=31-42=-11$. Con $x+y=10$, se tiene: $x^2-10x+21=0$, cuyas soluciones son 3 y 7. Con $x+y=-11$, se tiene: $x^2+11x+42=0$, cuyas soluciones son: $\dfrac{-11\pm\sqrt{-47}}{2}$.

G 212- Dado el sistema

$$\begin{aligned} x+y&=-1\\ y+2z&=9\\ ax-y+z&=7\\ ax-2by&=1\\ x-az&=8\end{aligned}$$

hallar a y b para que sea compatible sabiendo que a es entero. Una vez obtenido un sistema de valores de a, b, x, y, z que verifique el sistema, calcular $E=\dfrac{2^{\log b}}{0,5^{\log x}\left[(-y)^{\frac{1}{x}}-\frac{2}{x}\sqrt{-a}\right]}$.

Solución: Con las ecuaciones 1ª, 2ª, 3ª y 5ª, se obtiene: $5a^2+16a+11=0$. De donde: $a=-1$ (el otro valor de a es $\frac{-11}{5}$, no entero). Para $a=-1$, el sistema es compatible si $b=\frac{1}{2}$, siendo la solución: $x=2$, $y=-3$, $z=6$. Luego: $E=\dfrac{2^{\log 0,5}}{0,5^{\log 2}[3^{0,5}-1]}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

G 213- Resolver $x^6+(a+b)x^3-c=0$, siendo a el valor que anula al determinante

$\begin{vmatrix} a+b & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2a-11 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, b es el valor de la parte entera de $A = \dfrac{4 \cdot 3^{\frac{4}{7}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{7 \cdot 3^{\frac{1}{14}}}$, y c es el número de números impares comprendidos entre 13.541 y 13.983.

Solución: El valor del determinante es: $b - a + 10 = 0$. Luego: $a = b + 10$. Operando en la expresión de A, se tiene: $A = \dfrac{4 \cdot 3^{\left(\frac{4}{7}+\frac{1}{2}-\frac{1}{14}\right)}}{7} = \dfrac{4 \cdot 3}{7} = \dfrac{12}{7}$. Luego: $b = 1$, $a = 11$. El número de impares es: $c = \dfrac{983 - 1 - (541+1)}{2} = 220$. Por tanto, la ecuación dada queda: $x^6 + 12x^3 - 220 = 0$. Luego, $x^3 = -6 \pm \sqrt{256}$, es decir: $x_1^3 = 10$, $x_2^3 = -22$. Por tanto: x tiene dos valores reales: $\sqrt[3]{10}$ y $-\sqrt[3]{22}$, y cuatro imaginarios: $\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}\left(-1 \pm \sqrt{3}\,i\right)$, $\sqrt[3]{\dfrac{11}{4}}\left(1 \pm \sqrt{3}\,i\right)$.

G 214- En una localidad ha llovido sin interrupción y con la misma intensidad, día y noche, durante 30 días seguidos. Al empezar el temporal, tres aljibes tenían la misma altura de agua, Se sabe que el 1º, de $60\,\mathrm{m}^2$ de sección, ha servido para abastecer a 20 personas durante 30 días, quedando luego vacío. El 2º, de $15\,\mathrm{m}^2$ de sección, a 6 personas durante 20 días, quedando vacío. ¿A cuántas personas abastecerá el 3º, de $75\,\mathrm{m}^2$ de sección, que se ha vaciado en 25 días? No se debe tener en cuenta el agua que recogen pasado el instante de nivel cero.

Solución: Sea h la altura inicial en los tres depósitos. Cada día se recogen x metros de altura del agua caída. Cada persona consume $y\,\mathrm{m}^3$ de agua diariamente. En el 1º aljibe se tiene: $60h + 30 \cdot 60x - 20 \cdot 30y = 0$. En el 2º aljibe: $15h + 20 \cdot 15x - 6 \cdot 20y = 0$, Siendo P el número de personas pedido, en el 3º aljibe se tiene: $75h + 25 \cdot 75x - P \cdot 25y = 0$. Para que sea compatible este sistema homogéneo, el determinante de los coeficientes ha de ser nulo: $\begin{vmatrix} 60 & 1800 & -600 \\ 15 & 300 & -120 \\ 75 & 1875 & -25P \end{vmatrix} = 0$, obteniéndose: $P = 27$.

G 215- Aplicar Sturm a $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 2 = 0$.

Solución: $f = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 2$, $f' = 5x^4 - 20x^3 + 27x^2 - 18x + 5$.

Dividiendo f por f' :

f	1	-5	9	-9	5	-2
$-\frac{1}{5}f'$	-1	4	$-5,4$	$3,6$	-1	
		-1	$3,6$	$-5,4$	4	-2
$\frac{1}{5}f'$		1	-4	$5,4$	$-3,6$	1
$-f_2$			$-0,4$	0	$0,4$	-1

Dividiendo f' por $f_2 = 0,4x^3 - 0,4x + 1$:

f'	5	-20	27	-18	5
$\frac{-5}{0,4}f_2$	-5	0	5	$-12,5$	
		-20	32	$-30,5$	5
$\frac{20}{0,4}f_2$		20	0	-20	50
$-f_3$			32	$-50,5$	50

Dividiendo f_2 por $f_3 = -32x^2 + 50,5x - 50$:

f_2	$0,4$		$-0,4$	1
$\frac{0,4}{32}f_3$	$-0,4$	$0,63$	$-0,62$	
		$0,63$	$-1,12$	1
$\frac{0,63}{32}f_3$		-0.63	$0,99$	$-0,98$
$-f_4$			$-0,13$	$0,02$

Dividiendo f_3 por $f_4 = 0,13x - 0,02$:

f_3	-32	$50,5$	-50
$\frac{32}{0,13}f_4$	32	$-4,9$	
		$45,6$	-50
$\frac{-45,6}{0,13}$		$-45,6$	7
$-f_5$			-43

Cuadro de variaciones:

	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$5\,x^4 - 20x^3 + 27x^2 - 18x + 5$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
$0,4x^3 - 0,4x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-32x^2 + 50,5x - 50$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$0,13x - 0,02$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
43	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Número de variaciones	3	3	3	3	2

Luego hay una raíz real > 1. Las otras cuatro raíces son imaginarias.

G 216- Dada la ecuación $2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 = 0$, demostrar que sus tres raíces son reales y calcularlas con error menor de 1/100.

Solución:

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	9	2	-11	$+$

. Luego las tres raíces son reales y están en los intervalos: $-\infty < x < -1$, $0 < x < 1$, $1 < x < +\infty$. Para calcular la raíz $0 < x < 1$, se tiene que: $f(0,1) > 0$ y $f(0,2) < 0$, y que: $f(0,16) > 0$ y $f(0,17) < 0$. Por tanto: $x = 0,16$. Eliminando esta raíz en la ecuación dada, se tiene: $x^2 - 1,34x - 6,21 = 0$, cuyas raíces son: $-1,91$ y $3,25$.

G 217- Calcular la suma de los cuadrados de las raíces de $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -5x^2 & x^4 \\ 4 & -5x^2 & x^4 & 0 \\ -5x^2 & x^4 & 0 & 4 \\ x^4 & 0 & 4 & -5x^2 \end{vmatrix} = 0.$

Solución: Desarrollando el determinante, se tiene: $f(x) = ax^{16} + bx^8 + \ldots = 0$. Derivando, se tiene: $f'(x) = 16ax^{15} + 8bx^7 + \ldots$ Por tanto: $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{16}{x} - \dfrac{8b}{ax^9} + \ldots$ Luego: $S_2 = 0$.

G 218- Determinar la raíz positiva de $x^3 + x^2 - 27,48 = 0$, con tres decimales, aplicando el método de Newton.

Solución: $f(2) < 0$, $f(3) > 0$, $f' = 3x^2 + 2x$, $f'' = 6x + 2$, $f''(2) > 0$, $f''(3) > 0$. Por tanto, se sustituye: $x = 3 + x_1$, $x_1 = \dfrac{-f(3)}{f'(3)} = \dfrac{-8,52}{33} = -0,258$. Luego: $x_2 = 3 - 0,258 = 2,741$. Al aplicar los cálculos anteriores a x_2, se tiene: $x_3 = \dfrac{-f(2,741)}{f'(2,741)} = \dfrac{-0,626436}{28,021243} = -0,0223557.$

Luego: $x = 2,741 - 0,022 = 2,719$.

G 219- Formar una ecuación que tenga por raíces las potencias sextas de las raíces de $x^2 + px + q = 0$.

Solución: La ecuación pedida es: $x^2 + ax + b = 0$. La derivada de la ecuación dada es: $f' = 2x + p$. Dividiendo f' por f, se tiene el siguiente cociente: $\frac{2}{x} - \frac{p}{x^2} + \frac{p^2 - 2q}{x^3} + \frac{3pq - p^3}{x^4} + \ldots + \frac{p^6 - 6p^4q + 9p^2q^2 - 2q^3}{x^7} + \ldots$

Luego: $a = -S_6 = -(p^6 - 6p^4q + 9p^2q^2 - 2q^3)$. El producto de las sextas potencias de las raíces de la ecuación dada es q^6. Por tanto, de acuerdo con esos resultados, la ecuación pedida es: $x^2 - (p^6 - 6p^4q + 9p^2q^2 - 2q^3)x + q^6 = 0$.

G 220- Formar una ecuación que tenga por raíces las potencias sextas de las raíces de la ecuación $x^4 + px + q = 0$.

Solución: La derivada de la ecuación dada es: $f' = 4x^3 + p$. Dividiendo f' por f, se tiene: $\frac{4}{x} - \frac{3p}{x^4} - \frac{4q}{x^5} + \frac{3p^2}{x^7} + \frac{7pq}{x^8} + \frac{4q^2}{x^9} - \frac{3p^3}{x^{10}} - \frac{10p^2q}{x^{11}} - \frac{11pq^2}{x^{12}} + \frac{3p^4 - 4q^3}{x^{13}} + \ldots$ Sea la ecuación pedida: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Se tienen las siguientes igualdades: $a = -S_6 = -3p^2$, $b = S_{6,6} = \frac{1}{2}(S_6^2 - S_{12}) = 3p^4 + 2q^3$, $c = -S_{6,6,6} = \frac{-1}{6}(S_6^4 - S_{18} - 3S_{12,6})$, por lo que: $c = \frac{1}{6}(3p^6 - 36p^2q^3 + 18p^6 + 72p^2q^3 - 81p^6) = -10p^6 + 6p^2q^3$, $d = S_{6,6,6,6} = q^6$. La ecuación pedida es: $x^4 - 3p^2x^3 + (3p^4 + 2q^3)x^2 + (-10p^6 + 6p^2q^3)x + q^6 = 0$.

Nota: Para calcular S_n se puede utilizar la ecuación de recurrencia: $S_n + pS_{n-3} + qS_{n-4} = 0$. Utilizándola se obtiene: $S_{13} = 13p^3q$, $S_{14} = 21p^2q^2$, $S_{15} = -3p^5 + 15pq^3$, $S_{18} = 3p^6 - 36p^2q^3$. Para calcular $S_{12,6}$ se utiliza la fórmula: $S_{m,n} = S_m \cdot S_n - S_{m+n}$, es decir: $S_{12,6} = S_{12} \cdot S_6 - S_{18}$.

G 221- Hallar la suma de las potencias quintas de las raíces de $x^4 + px + q = 0$.

Solución: En el problema anterior G 220, se ha obtenido al dividir f' por f, que el coeficiente de $\frac{1}{x^6}$ es cero, luego: $S_5 = 0$.

G 222- Hallar la suma de los productos binarios de las potencias h-simas de las raíces de $x^n + x^a + x + 1 = 0$, siendo $n > a + 2h$ y $h > a$.

Solución: Dividiendo $f' = nx^{n-1} + ax^{a-1} + 1$, por $f = x^n + x^a + x + 1$, se obtiene el cociente: $\frac{n}{x} + \frac{a-n}{x^{n+1-a}} + \frac{1-n}{x^n} + \ldots$ Por tanto, los coeficientes de $\frac{1}{x^{h+1}}$ y de $\frac{1}{x^{2h+1}}$ son nulos. Luego la suma pedida es: $S_{h,h} = \frac{1}{2}(S_h^2 - S_{2h}) = 0$.

G 223- Dada la ecuación $x^3 + px + q = 0$, hallar la condición que deben cumplir los coeficientes para que la relación de dos de las raíces sea igual a m.

Solución: Siendo: $\frac{x_1}{x_2} = m$, se tiene que: $m^3x^3 + pmx + q = 0$, de donde, eliminando q, se tiene: $m^3x^3 + pmx = x^3 + px$. Por tanto: $x = \pm\sqrt{\frac{p\,(1-m)}{m^3 - 1}}$. Sustituyendo este valor en la ecuación dada, se tiene: $p^3m^3(m+1)^2 + q^2(m^2 + m + 1)^3 = 0$.

G 224- Dada la ecuación $x^5 + 4x^4 + 2x + 9 = 0$, calcular $\sum \frac{1}{(x_i^3 + 1)^3}$.

Solución: Se realizan las siguientes sustituciones sucesivas: primero, $y = x^3$, obteniéndose: $y^5 + 64y^4 + 8y + 512 = 0$; a continuación, $z = y + 1$, con lo que se tiene la ecuación: $z^5 + 59z^4 - 246z^3 + 374z^2 - 243z + 567 = 0$; y por fin, $t = \frac{1}{z}$, lo que da la ecuación: $f = 567t^5 - 243t^4 + 374t^3 - 246t^2 + 59t + 1$. Derivando esta última ecuación, se tiene: $f' = 2835t^4 - 972t^3 + 1122t^2 - 492t + 59$. Se obtiene el cociente de dividir f' por f, que es el siguiente: $\frac{5}{t} + \frac{0,4286}{t^2} - \frac{1,1356}{t^3} + \frac{0,5322}{t^4} + \ldots$ Por tanto, la suma pedida es: $0,5322$.

G 225- Dada la ecuación $x^7 + x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x + 2 = 0$, hallar la suma de las potencias cuartas de los productos binarios de sus raíces.

Solución: La suma pedida $S_{4,4}$ es igual a: $\frac{1}{2}(S_4^2 - S_8)$. La derivada f' de la ecuación dada f, es: $f' = 7x^6 + 6x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1$. El cociente de dividir f' por la ecuación dada es: $\frac{7}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{7}{x^4} + \frac{7}{x^5} + \ldots + \frac{143}{x^9} + \ldots$ Luego: $S_{4,4} = \frac{1}{2}(49 - 143) = -47$.

G 226- Dada la ecuación $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$, hallar en función de n, $\sum x_i^n$ y $\sum x_i^{-n}$.

Solución: Se tiene la ecuación de recurrencia: $S_{n+4} - 5S_{n+3} + 10S_{n+2} - 10S_{n+1} + 4S_n = 0$, cuyas raíces son: 1, 2, $1 \pm i$. Por tanto: $\sum x_i^n = S_n = 1 + 2^n + (1+i)^n + (1-i)^n$. Desarrollando este término, se tiene: $S_n = 1 + 2^n + 2\left[(1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} \ldots)\right] = 1 + 2^n + 2^{\frac{n+2}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}$. Para $-n$, se tiene: $\sum x_i^{-n} = S_{-n} = 1 + 2^{-n} + 2^{\frac{-n+2}{2}} \cos\frac{-n\pi}{4} = 1 + \frac{1}{2^n} + 2^{\frac{-n+2}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}$.

G 227- Resolver por el método de Gräffe, la ecuación $x^3 + 5x^2 - 3x - 1 = 0$.

Solución:

1	5	–3	1
1	31	19	1
1	923	299	1
1	851.331	87.555	1
1	$7,247642 \cdot 10^{11}$	7.664.175.363	1

Por tanto: $-x^{16} = 7,247642 \cdot 10^{11}$. Luego: $x = -5,5114$. Eliminando esta raíz en la ecuación dada, se tiene: $x^2 - 0,5114x - 0,18147 = 0$, cuyas raíces son: $0,75254$ y $-0,24114$.

G 228- Resolver por el método de Gräffe la ecuación $x^3 - 7x + 7 = 0$.

Solución:

1	0	–7	7
1	14	49	49
1	98	1.029	2.401
1	7.546	588.245	5.764.801
1	55.765.626	…	…

Por tanto: $-x^{16} = 55.765.626$. Luego: $x = -3,04893$. Eliminando esta raíz de la ecuación dada, se tiene: $x^2 - 3,04893x + 2,296 = 0$, cuyas raíces son: $1,35715$ y $1,69178$.

G 229- Dada la ecuación $x^4 - 4x^3 + 18 = 0$, determinar por Newton la raíz comprendida entre 2 y 3.

Solución: $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 2 - \frac{2}{-16} = 2,125$, $x = 2,125 - \frac{f(2,125)}{f'(2,125)} = 2,12551$.

G 230- Hallar por el método de Lagrange la menor raíz positiva de $5x^3 - 17x^2 + 8x + 1 = 0$.

Solución: Siendo $f(0) > 0$ y $f(1) < 0$, se tiene que: $0 < x < 1$. Por tanto se hace la sustitución: $x = \frac{1}{y}$, obteniendo la ecuación: $y^3 + 8y^2 - 17y + 5 = 0$, en la que se tiene que la menor raíz positiva se encuentra entre 1 y 2. Por tanto, se hace la sustitución: $y = 1 + \frac{1}{z}$, obteniendo la ecuación: $3z^3 - 2z^2 - 11z - 1 = 0$, en la que la menor raíz positiva se encuentra entre 2 y 3. Por tanto, se hace la sustitución: $z = 2 + \frac{1}{t}$, obteniendo la ecuación: $t^3 - 17t^2 - 16t - 3 = 0$, en la que dicha raíz se encuentra entre 3 y 4. Se hace la sustitución: $t = 3 + \frac{1}{u}$, obteniendo la ecuación: $15u^3 - 71u^2 - 46u - 7 = 0$, en la que la citada raíz está entre 5 y 6. Se hace la sustitución: $u = 5 + \frac{1}{w}$, obteniendo la ecuación: $137w^3 - 369w^2 - 154w - 15 = 0$, en la que dicha raíz está entre 3 y 4. Por tanto: $x = (0,1,2,3,5,3,\ldots) = \frac{118}{169} = 0,698225$, con error $< \frac{1}{169^2}$. En el cuadro siguiente se resume lo anterior:

Intervalo de la raíz	Sustitución	Nueva ecuación
$0 < x < 1$	$x = \frac{1}{y}$	$y^3 + 8y^2 - 17y + 5 = 0$
$1 < y < 2$	$y = 1 + \frac{1}{z}$	$3z^3 - 2z^2 - 11z - 1 = 0$
$2 < z < 3$	$z = 2 + \frac{1}{t}$	$t^3 - 17t^2 - 16t - 3 = 0$
$3 < t < 4$	$t = 3 + \frac{1}{u}$	$15u^3 - 71u^2 - 46u - 7 = 0$
$5 < u < 6$	$u = 5 + \frac{1}{w}$	$137w^3 - 369w^2 - 154w - 15 = 0$
$3 < w < 4$		

G 231- Dada la ecuación $x^3 + 4x^2 - 7 = 0$, calcular por Horner su raíz positiva con seis decimales.

Solución:

Intervalo de la raíz	Sustitución	Nueva ecuación
$1 < x < 2$	$(x-1)10 = x_1$	$x_1^3 + 70x_1^2 + 1100x_1 - 2000 = 0$
$1 < x_1 < 2$	$(x_1-1)10 = x_2$	$x_2^3 + 730x_2^2 + 124300x_2 - 829000 = 0$
$6 < x_2 < 7$	$(x_2-6)10 = x_3$	$x_3^3 + 7480x_3^2 + 13316800x_3 - 56704000 = 0$
$4 < x_3 < 5$	$(x_3-4)10 = x_4$	$x_4^3 + 74920x_4^2 + 1337788800x_4 - 3317056000 = 0$
$2 < x_4 < 3$	$(x_4-2)10 = x_5$	$x_5^3 + 749260x_5^2 + 133808859200x_5 - 641078712000 = 0$
$4 < x_5 < 5$	$(x_5-4)10 = x_6$	$x_6^3 + 7492720x_6^2 + 13381485332800x_6 - 10583286976000 = 0$
$0 < x_6 < 1$		

Luego la raíz es: $1,164240$.

G 232- Calcular por el método de Lagrange con error menor de $\frac{1}{1000}$, la raíz positiva de $x^4 + 2x^3 + x - 100 = 0$.

Solución:

Intervalo de la raíz	Sustitución	Nueva ecuación
$2 < x < 3$	$x = 2 + \frac{1}{y}$	$66y^4 - 57y^3 - 36y^2 - 10y - 1 = 0$
$1 < y < 2$	$y = 1 + \frac{1}{z}$	$38z^4 - 11x^3 - 189x^2 - 207x - 66 = 0$
$2 < z < 3$	$z = 2 + \frac{1}{t}$	$736t^4 - 121t^3 - 657t^2 - 293t - 38 = 0$
$1 < t < 2$	$t = 1 + \frac{1}{u}$	$373u^4 - 974u^3 - 3396u^2 - 2823u - 736 = 0$
$4 < u < 5$		

Luego la raíz es $(2,1,2,1,4) = 2,7368$.

G 233- Discutir utilizando el teorema de Roll, el número de raíces reales de las siguientes ecuaciones, según los valores del parámetro m: 1º) $16x^5 - 20x^3 + 5x + m = 0$; 2º) $mx^4 - 12x^2 + 4x + 3 = 0$,.

Solución: 1º) $f' = 80x^4 - 60x^2 + 5 = 0$, de donde: $x = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}}$. Sustituyendo este valor en la ecuación dada, se tiene: $f\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\,(1-\sqrt{5}) + m = 1 + m \lesseqgtr 0$. Luego si $m > 1 \longrightarrow 3$ raíces reales; si $m < 1 \longrightarrow 5$ raíces reales. Para $m = 1$ hay una raíz doble. 2º) La ecuación cuyas raíces son las inversas de las de la dada, es: $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + m = 0$, $f' = x(x^2 + x - 2) = 0$, luego x tiene tres valores: $0,\ 1,\ -2$.

Valores de x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
Valores de f	$+$	$32+m$	m	$-5+m$	$+$

Luego se tiene la siguiente situación:

Valores de m	$m<32$	$-32<m<0$	$0<m<5$	$m>5$
Número de raíces reales	2	2	2	0

Se tiene una raíz real doble para los valores de m: $-32,\ 0,\ 5$.

G 234- Encontrar la condición para que la ecuación $x^4+px^2+qx+r=0$, tenga una raíz doble.

Solución: Siendo a la raíz doble, debe cumplirse: $f(a)=0$, $f'(a)=0$, $xf(a)=0$, $xf'(a)=0$, $x^2f(a)=0$, $x^2f'(a)=0$, $x^3f'(a)=0$. Es decir:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 4x^3 & & +2px & +q & = 0\\
 & & 4x^4 & & +2px^2 & +qx & & = 0\\
 & & x^4 & & +px^2 & +qx & +r & = 0\\
 & x^5 & & +px^3 & +qx^2 & +rx & & = 0\\
 & 4x^5 & & +2px^3 & +qx^2 & & & = 0\\
x^6 & & +px^4 & +qx^3 & +rx^2 & & & = 0\\
4x^6 & & +2px^4 & +qx^3 & & & & = 0
\end{array}$$

Para que este sistema sea compatible, el determinante de sus coeficientes ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2p & q\\
0 & 0 & 4 & 0 & 2p & q & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & p & q & r\\
0 & 1 & 0 & p & q & r & 0\\
0 & 4 & 0 & 2p & q & 0 & 0\\
1 & 0 & p & q & r & 0 & 0\\
4 & 0 & 2p & q & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}=0.$$

De donde: $144p^2q^2r-4p^4q^2+16p^5-128p^3r^2+256pr^3-27pq^4=0$.

G 235- Hallar las raíces comunes de las siguientes ecuaciones:
$x^5+2x^3+x^2+x+1=0$; $x^4-x^3+3x^2-x+2=0$.

Solución: Las raíces comunes vienen dadas por el $m.c.d.$ de los dos polinomios:

	$x+1$	x^2-x+2
$x^5+2x^3+x^2+x+1$	$x^4-x^3+3x^2-x+2$	x^2+1
$-x^2-1$	0	

Luego las raíces comunes son las de $x^2+1=0$, es decir: $x=\pm i$.

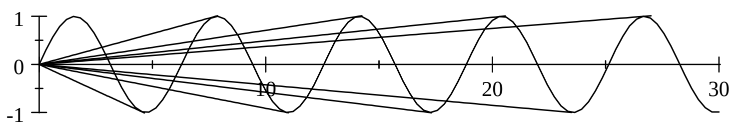
G 236- Dada la ecuación $x+m\sin x=0$, 1º) Hallar los valores de m para los que son reales las raíces. 2º) En la hipótesis de raíces reales, hallar su número para un determinado valor de m. 3º) Hallar el valor entero de m para el que la ecuación tiene cinco raíces reales, calculando la mayor de ellas con error menor que $0,001$.

Solución: Haciendo: $y=\sin x$, $y=-\frac{x}{m}$. Además de la solución $(0,0)$, como la tangente en el origen tiene pendiente 1, por ser $y'=\cos 0=1$, entre esta pendiente y la dada por la tangente desde el origen a la curva en el intervalo $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, las rectas que pasan por el origen cortan a la curva $y=\sin x$, en $3,\ 7,\ 11,...,\ \infty$ puntos situados en el 1º y en el 3º cuadrantes, y en. $\infty,\ldots,13,\ 9,\ 5$ puntos situados en el 2º y en el 4º cuadrantes (incluido el origen). Las tangentes desde el origen delimitan las zonas correspondientes. La tangente en el punto $(\theta, \sin\theta)$ es: $y - \sin\theta = (x-\theta)\cos\theta$. Para que pase por el origen ha de cumplirse que: $\sin\theta = \theta\cos\theta$, es decir, $\theta = \tan\theta$. Por tanto, los puntos de tangencia corresponden a las raíces de $x = \tan x$. Por ejemplo, el punto de tangencia en el intervalo $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, es: $x = 4,49341\,\text{rad}$, y en el intervalo $3\pi < x < \frac{7\pi}{2}$, es: $x = 10,90412\,\text{rad}$.

x rad	$x°$	$\tan x$	$\sin x$	$m = \frac{-x}{\sin x}$
$4,49341$	$257°4534 = 257°27'12''2$	$4,49341$	$-0,97612$	$4,60334$
$10,90412$	$624°7601 = 624°45'36''2$	$10,90412$	$-0,99582$	$10,94988$

Luego para: $-4,6 < m < 4,6$, no hay más raíces reales que $x = 0$. En los demás intervalos el número de raíces reales se corresponde con lo expuesto más arriba. La ecuación tiene 5 raíces reales en el intervalo: $4,60334 < m < 10,94988$, siendo por tanto los valores enteros de m : $5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ y 10. La mayor corresponde a $m = 10$, siendo $x = 5,6792$.

Nota- Este problema no corresponde al dominio del álgebra. La solución $x = 5,6792$ puede obtenerse aplicando Newton ($a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$). Los distintos valores calculados en el problema, se han hallado mediante calculadora. Las ideas expuestas se clarifican dibujando la curva $y = \sin x$, y trazando las tangentes desde el origen.



G 237- Sean $y_1,\ y_2, \ldots,\ y_m$, donde $m = \binom{n}{2}$, la suma de las raíces de la ecuación $f(x)$ de grado n, tomadas de dos en dos, es decir: $y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_1 + x_3, \ldots,\ y_m = x_{n-1} + x_n$. Sean las sumas: $S_k = y_1^k + y_2^k + \ldots + y_m^k$; $\sigma_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$. Demostrar que entre estas sumas existe la relación: $2S_k + 2^k\sigma_k = \sigma_0\sigma_k + \binom{k}{1}\sigma_1\sigma_{k-1} + \ldots + \sigma_k\sigma_0$.

Solución: $\sigma_0\sigma_k = (x_1^0 + \ldots + x_i^0 + \ldots + x_n^0)(x_1^k + \ldots + x_i^k + \ldots + x_n^k)$

$\binom{k}{1}\sigma_1\sigma_{k-1} = (x_1^1 + \ldots + x_i^1 + \ldots + x_n^1)(x_1^{k-1} + \ldots + x_i^{k-1} + \ldots + x_n^{k-1})$

....

$\binom{k}{r}\sigma_r\sigma_{k-r} = (x_1^r + \ldots + x_i^r + \ldots + x_n^r)(x_1^{k-r} + \ldots + x_i^{k-r} + \ldots + x_n^{k-r})$

....

$\binom{k}{k}\sigma_k\sigma_0 = (x_1^k + \ldots + x_i^k + \ldots + x_n^k)(x_1^0 + \ldots + x_i^0 + \ldots + x_n^0)$

Sumando verticalmente: 1º) los términos de igual subíndice:

$$x_1^0x_1^k + \binom{k}{1}x_1^1x_1^{k-1} + \ldots + \binom{k}{r}x_1^rx_1^{k-r} + \ldots + \binom{k}{k}x_1^kx_1^0$$

....

$$x_i^0x_i^k + \ldots$$

....

$$x_n^0x_n^k + \ldots.$$

cuya suma es: $(x_1 + x_1)^k + \ldots + (x_i + x_i)^k + \ldots + (x_n + x_n)^k = 2^k\,\sigma_k\quad [\mathbf{A}]$

2º) las demás columnas:

$$x_1^0x_2^k + \ldots + x_i^0x_j^k + \ldots$$

$$\binom{k}{1}(x_1^1x_2^{k-1} + \ldots + x_i^1x_j^{k-1} + \ldots)$$

....

$$\binom{k}{r}(x_1^rx_2^{k-r} + \ldots + x_i^rx_j^{k-r} + \ldots)$$

....

$$\binom{k}{k}(x_1^kx_2^{k-k} + \ldots + x_i^kx_j^{k-k} + \ldots)$$

que sumadas verticalmente, dan: $(x_1 + x_2)^k + \ldots + (x_{n-1} + x_n)^k = y_1^k + \ldots + y_m^k = 2S_k\quad [\mathbf{B}]$

Por tanto: $[\mathbf{A}] + [\mathbf{B}] = 2^k\sigma_k + 2S_k$, con lo que queda demostrado.

Nota: Lo anterior es independiente de que x_i sean raíces de $f(x)$. Siempre habrá una $g(x)$ cuyas raíces sean x_i.

G 238- Sean $a,\ b,\ c$ las raíces de $x^3+px+q=0$. 1º) Sea $y=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$. Obtener la ecuación que tiene por raíces los distintos valores de y posibles. 2º) Hallar la que tiene por raíces las cantidades: $\frac{b-a}{c-a},\ \frac{c-a}{b-a},\ldots$

Solución: 1º) Existen dos valores para y: $y_1=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$, $y_2=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$, Se tiene que: $y_1+y_2=\frac{\sum a^2b}{abc}=-3$, y que: $y_1y_2=3+\frac{S_3}{abc}+abcS_{-3}=9+\frac{p^3}{q^2}$. Luego la ecuación pedida es: $y^2+3y+9+\frac{p^3}{q^2}=0$. 2º) Las raíces son: $\frac{b-a}{c-a},\ \frac{c-a}{b-a},\ \frac{a-b}{c-b},\ \frac{c-b}{a-b},\ \frac{a-c}{b-c},\ \frac{b-c}{a-c}$. Su suma es: $\left(\frac{b-a}{c-a}+\frac{b-c}{a-c}\right)+\ldots=\frac{c-a}{c-a}+\ldots=3$. Su producto es: $\left(\frac{b-a}{c-a}\cdot\frac{c-a}{b-a}\right)\ldots=1$. La suma de los productos quinarios es: $\frac{1}{b-\frac{a}{c-a}}+\ldots=3$. La suma de los productos binarios es: $\frac{162q^2-3p^3}{27q^2+4p^3}$. La suma de los productos ternarios es: $\frac{189q^2-26p^3}{27q^2+4p3}$ (el cálculo de estas dos últimas sumas es tedioso). Por tanto, la ecuación pedida es: $x^6-3x^5+\frac{162q^2-3p^3}{27q^2+4p^3}x^4-\frac{189q^2-26p^3}{27q^2+4p3}x^3+\frac{162q^2-3p^3}{27q^2+4p^3}x^2-3x+1=0$.

G 239- Demostrar que si cinco coeficientes consecutivos de una ecuación de coeficientes reales son A, $B,\ C,\ 2B-A,\ 2C-A$, existen raíces imaginarias.

Solución: Sea la ecuación: $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+(2B-A)x^{m-3}+(2C-A)x^{m-4}+\ldots=0$. Multiplicándola por: $x^3-2x+1=0$, cuyas raíces son: 1 y $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, se tiene que los coeficientes de x^m y de x^{m+1}, son nulos. Por tanto, al no haber introducido en la multiplicación ninguna raíz imaginaria, la ecuación inicial tiene al menos dos raíces imaginarias.

G 240- Demostrar que si en una ecuación de coeficientes reales: $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, siendo $a_0>0$, se representa por A el módulo del coeficiente negativo de mayor valor absoluto, y es a_r el mayor de los que preceden al 1º negativo a_s, un límite superior de las raíces de la ecuación es; $1+\left(\frac{A}{a_r}\right)^{\frac{1}{s-r}}$ (regla de Tillot) .

Solución: Sea: $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_rx^{n-r}+\ldots-a_sx^{n-s}+\ldots=0$. De acuerdo con el enunciado, se tiene que: $f(x)>a_rx^{n-r}-Ax^{n-s}-Ax^{n-s-1}-\ldots-A=a_rx^{n-r}-\frac{A(x^{n-s+1}-1)}{x-1}$, suponiendo $x>1$. Luego, $a_rx^{n-r}-\frac{A(x^{n-s+1}-1)}{x-1}=\frac{x^{n-r}}{x-1}\left[a_r(x-1)-\frac{A}{x^{s-r-1}}+\frac{A}{x-1}\right]\leq 0$. Por tanto: $a_r(x-1)x^{s-r-1}-A\leq 0$, $a_r(x-1)(x-1)^{s-r-1}-A\leq 0$, por lo que: $(x-1)^{s-r}-\frac{A}{a_r}\leq 0$, $x-1\leq\left(\frac{A}{a_r}\right)^{\frac{1}{s-r}}$, $x\leq 1+\left(\frac{A}{a_r}\right)^{\frac{1}{s-r}}$.

G 241- Resolver la ecuación $f(x)=x^2-10\ln x-3=0$, con error $<0,01$.

Solución: $f(0,7)=1,0>0$, $f(1)=-2<0$, $f(4)=-0,8<0$, $f(5)=5>0$. Luego hay una raíz entre $0,7$ y 1, y otra entre 4 y 5. Aplicando Newton a estos valores se obtiene: $x=0,7-\frac{f(0,7)}{f'(0,7)}=0,7-\frac{0,7^2-10\ln 0,7-3}{2\cdot 0,7-\frac{10}{0,7}}=0,78$, $x=4-\frac{f(4)}{f'(4)}=4,15$. Las raíces son: $0,78$ y $4,15$.

G 242- Resolver $2^x(x-1)-1=0$, con error <0,01.

Solución: $f(1)=-1<0$, $f(1,5)=0,4>0$, $x=1+y$, $2^{1+y}y-1=0$, $(1+y)\log 2+\log y=0$, $y=\frac{z}{100}$, $z\log 2+100\log 2-169,897$. Para $z=38$, se tiene que: $f(z)=-11,68<0$. Para $z=39$, se tiene: $f(z)=0,95>0$. Luego: $x=1,38$.

G 243- Resolver $10^{0,8\sin x}-x=0$, con error $<0,0001$.

Solución: Iterando, se obtienen los siguientes valores:

x	$2,6$	$2,5$	$2,59$	$2,596$	$2,597$	$2,5969$	$2,59698$	$2,59699$
$f(x)$	$-0,015<0$	$0,5>0$	$0,035>0$	$+0,005>0$	$-0,000096<0$	$+0,0004>0$	$+0,000005>0$	$-0,00004<0$

Luego: $x=2,59698\,\mathrm{rad}\ =148°7959935=148°47'45''58$.

G 244- Demostrar que si una ecuación algebraica de coeficientes racionales tiene raíces múltiples siendo todas de distinto orden de multiplicidad, éstas han de ser racionales.

Solución: Se supone que tiene una raíz irracional α de orden de multiplicidad h. Por tener coeficientes racionales, la ecuación ha de tener como raíz su conjugada β, también con multiplicidad h, pues si su multiplicidad fuera $k\neq h$, el producto $(x-\alpha)^h(x-\beta)^k$ no tendría todos sus coeficientes racionales y por tanto tampoco lo serían los de la ecuación dada.

G 245- Calcular $A=\left[0,06\cdot\sqrt{\dfrac{347,23^y}{0,00485^z\cdot 0,072258^y}}\cdot\log_8\dfrac{23}{5}\right]^{\frac{x}{2}}$, siendo: x la menor raíz de la ecuación $\log[8^{\log x}]-\log[2^{\log x}]=\log[x^x]$; y el interés en % al que se colocaron 12 anualidades de 3.000 euros para reunir un capital de 46.880,51 euros; $z=p-87,9$, siendo p la arista en cm con error $<0,1$ por defecto, de un cubo que contiene $700\,\mathrm{kg}$ de agua destilada a 4ºC.

Solución: a) Cálculo de x: $\log x\cdot\log 8-\log x\cdot\log 2=x\log x$, $\log x(\log 8-\log 2-x)=0$. De donde: $x=1$ y $x=\log 4=0,60206$, siendo la menor raíz: $x=0,60206$. b) Cálculo de y: $3000\left[(1+r)^{12}+\ldots+(1+r)\right]=46.880,51r$. De donde: $r=4\%$. Por tanto, $y=4$. c) Cálculo de z: Como $p=700.000^{\frac{1}{3}}=88,79\,\mathrm{cm}$, luego: $z=88,7-87,9=0,8$. Sustituyendo estos valores en A, se tiene: $A=\left(\dfrac{0,06\cdot 347,23^2\cdot\log 4,6}{0,00485^{0,4}\cdot 0,072258^2\cdot\log 8}\right)^{0,30103}=122,1865016$.

G 246- Hallar el polinomio de 4º grado $f(x)$ tal que $f(n)=a^3+(a+b)^3+\ldots+(a+nb)^3$. Aplicar al caso particular $a=0,\ b=1$.

Solución: $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\epsilon$,
$f(n)=\alpha n^4+\beta n^3+\gamma n^2+\delta n+\epsilon=a^3+(a+b)^3+\ldots+(a+nb)^3=$
$=na^3+3a^2b\sum n+3ab^2\sum n^2+b^3\sum n^3=$
$=na^3+3a^2b\dfrac{n(n+1)}{2}+3ab^2\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+b^3\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=$
$=n^4(\dfrac{b^3}{4})+n^3(ab^2+\dfrac{b^3}{2})+n^2(\dfrac{3}{2}a^2b+\dfrac{3}{2}ab^2+\dfrac{b^3}{4})+n(a^3+\dfrac{3}{2}a^2b+\dfrac{ab^2}{2})$.
Luego: $\alpha=\dfrac{b^3}{4}$, $\beta=ab^2+\dfrac{b^3}{2}$, $\gamma=\dfrac{3}{2}a^2b+\dfrac{3}{2}ab^2+\dfrac{b^3}{4}$, $\delta=a^3+\dfrac{3}{2}a^2b+\dfrac{ab^2}{2}$, $\epsilon=0$.
$f(x)=\dfrac{b^3}{4}x^4+(ab^2+\dfrac{b^3}{2})x^3+(\dfrac{3}{2}a^2b+\dfrac{3}{2}ab^2+\dfrac{b^3}{4})x^2+(a^3+\dfrac{3}{2}a^2b+\dfrac{ab^2}{2})x$.
Para $a=0,\ b=1$, se tiene: $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^2}{4}$.

G 247- En una progresión aritmética de razón 2, la suma de los 300 primeros términos representan el valor de un capital en euros. El término de lugar 1.460 representa el interés producido en 300 días a un r% igual al séptimo término de la progresión. Hallar el capital y el interés.

Solución: $U_1=a,\ r\%=U_7=a+6\cdot 2=a+12$. Sea C el capital, e I el interés producido. La suma de los 300 primeros términos es: $C=S_{300}=\dfrac{a+a+299\cdot 2}{2}\cdot 300=300(a+299)$. El término de lugar 1.460 es: $I=a+1459\cdot 2=\dfrac{300(a+299)(a+12)300}{36000}$. Por tanto, se tiene que: $a=-8,\ C=87.300$ euros, $r=4\%$.

G 248- Se desea fabricar 500 piezas de un material cuya composición es: 88% de A, 10% de B, 2% de C. Cada pieza terminada pesa $1.700\,\mathrm{g}$. Para fabricarlas, se dispone de $410\,\mathrm{kg}$ de M, cuya composición es 90% de A y 10% de B; además se dispone de N, cuya composición es 85% de A, 9% de B y 6% de C; y también se dispone de los materiales A y B. Se funden los $410\,\mathrm{kg}$ de M con las cantidades necesarias de N, A y B. Al fundir se experimenta una pérdida de 1% de A, 0,25% de B, 2% de C. Se ha de contar con un desperdicio de $32\,\mathrm{kg}$ por moldeo y la posterior mecanización, que no se aprovechan. Los precios por kg de los materiales, son: M, 12,5 euros; N, 12 euros; A, 8 euros y B, 25 euros. El coste del moldeo es a razón de 8,5 euros por pieza. Además se carga el

30% por gastos y beneficio. Se pide el precio de 1 kg de las piezas terminadas.

Solución: Se utilizan: x kg de N, y kg de A, z kg de B. Por tanto, la cantidad de kg de A a fundir es: $410 \cdot 0,9 + 0,85x + y$. La de B, es: $410 \cdot 0,1 + 0,09x + z$. La de C, es: $0,06x$. La cantidad total fundida después de las pérdidas, es de 500 piezas de $1,7$ kg, más 32 kg desaprovechados, en total 882 kg, cuya composición es: $0,88 \cdot 882 = 776,16$ kg de A, $0,1 \cdot 882 = 88,2$ kg de B, $0,02 \cdot 882 = 17,64$ kg de C. Como estos materiales sufren pérdidas en la fusión, las cantidades a fundir son : $\frac{776,16}{0,99} = 784$ kg de A, $\frac{88,2}{0,9975} = 88,421$ kg de B, $\frac{17,64}{0,98} = 18$ kg de C. Estos 18 kg de C provienen de N; por tanto se utilizan: $\frac{18}{0,06} = 300$ kg de N. De acuerdo con lo expuesto, la cantidad del material A utilizado es: $784 - 410 \cdot 0,9 - 300 \cdot 0,85 = 160$ kg. La cantidad del material B que se utiliza es: $88,421 - 410 \cdot 0,1 - 300 \cdot 0,09 = 20,421$ kg. Por tanto, el coste de los materiales es: $410 \cdot 12,5 + 300 \cdot 12 + 160 \cdot 8 + 20,421 \cdot 25 = 10.515,525$ euros, es decir, un coste de materiales por pieza, de $21,03$ euros. El coste total por pieza es: $(21,03 + 8,5)1,3 = 38,39$ euros, lo que da $22,58$ euros por kg.

G 249- Se tiene la ecuación $f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$. Se considera la progresión a, $a+b, \ldots, a+(m-1)b, a+mb$, en donde a y b son positivos. Se forma la ecuación $g(x) = 0$, sumando los productos de los términos de $f(x)$ con los de la progresión dada, el 1º con el 1º, el 2º con el 2º, ..., el último con el último. Suponiendo que $f(x) = 0$, tiene raíces reales positivas y negativas, fijar la posición relativa sobre el eje de abscisas, de las raíces de $g(x) = 0$, respecto de las de $f(x) = 0$.

Solución: Se tiene: $g(x) = A_0ax^m + A_1(a+b)x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\left[a + (m-1)\,b\right]x + A_m(a+mb) = \sum aA_nx^{m-n} + \sum nbA_nx^{m-n} = af(x) + b\sum nA_nx^{m-n}$. Siendo la ecuación dada: $f(x) = \sum A_nx^{m-n}$, su derivada es: $f'(x) = \sum(m-n)A_nx^{m-n-1} = \frac{1}{x}\sum(m-n)A_nx^{m-n}$. Por tanto se tiene que: $f'(x) = \frac{1}{x}\sum mA_nx^{m-n} - \frac{1}{x}\sum nA_nx^{m-n} = \frac{m}{x}f(x) - \frac{1}{x}\sum nA_nx^{m-n}$. De donde se deduce que: $\sum nA_nx^{m-n} = mf(x) - xf'(x)$. Por tanto: $g(x) = af(x) + bmf(x) - bxf'(x) = (a+bm)f(x) - bxf'(x)$. Si α, β son dos raíces positivas consecutivas de $f(x)$, se tiene que $f'(\alpha)$ y $f'(\beta)$ son de signo contrario, luego: $g(\alpha) = -b\alpha f'(\alpha)$, $g(\beta) = -b\beta f'(\beta)$, es decir que, $g(\alpha)$ y $g(\beta)$ son de signo contrario, por lo que $g(x)$ tiene una raíz entre dos raíces positivas consecutivas de $f(x)$. El mismo razonamiento es válido para dos raíces negativas consecutivas de $f(x)$. Por otra parte, haciendo que $A_0 > 0$ y siendo α la mayor raíz positiva de $f(x)$, se tiene que: $g(\alpha) = -b\alpha f'(\alpha)$, y siendo $f(x)$ monótona creciente, $f'(\alpha) > 0$, por lo que $g(\alpha) < 0$. Pero como para x suficientemente grande $g(x) = (a+bm-b)A_0x^m + \ldots$, es mayor que $f(x) = A_0x^m + \ldots$, resulta que $g(x)$ tiene una raíz positiva mayor que la mayor de $f(x)$. Con un razonamiento similar, se deduce que $g(x)$ tiene una raíz negativa menor que la menor raíz negativa de $f(x)$. De estos dos últimos razonamientos, se deduce que entre la menor raíz positiva y la mayor raíz negativa de $f(x)$, no hay ninguna raíz de $g(x)$, pues $f(x)$ y $g(x)$ tienen el mismo número de raíces.

G 250- Se tiene el polinomio: $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) + \binom{n}{1}x(x-1)\ldots(x-n+2)x + \binom{n}{2}x(x-1)\ldots(x-n+3)x(x-1) + \ldots + \binom{n}{n}x(x-1)\ldots(x-n)$. Se obtiene el polinomio: $F(x) = x^nf(a) + x^{n-1}\frac{f'(a)}{1!} + x^{n-2}\frac{f''(a)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}$. Calcular las raíces de este polinomio.

Solución: Operando, el polinomio dado es: $f(x) = \binom{x}{n}n! + \binom{n}{1}\binom{x}{n-1}\binom{x}{1}(n-1)!1! + \binom{n}{2}\binom{x}{n-2}\binom{x}{2}(n-2)!2! + \ldots + \binom{n}{k}\binom{x}{n-k}\binom{x}{k}(n-k)!k! + \ldots + \binom{n}{n}\binom{x}{0}\binom{x}{n}n!0! = \sum\binom{n}{k}\binom{x}{n-k}\binom{x}{k}(n-k)!k! = \sum n!\binom{x}{n-k}\binom{x}{k} = n!\sum\binom{x}{n-k}\binom{x}{k} = n!\binom{2x}{n} = 2x(2x-1)(2x-2)\ldots(2x-n+1)$. Por tanto se tiene que el polinomio $F(x)$ es: $F(x) = \sum x^{n-k}\frac{f^{(k}(a)}{k!} = x^n\left[f(a) + x^{-1}\frac{f'(a)}{1!} + x^{-2}\frac{f''(a)}{2!} + \ldots + x^{-n}\frac{f^{(n}(a)}{n!}\right] = x^nf(\frac{1}{x} + a) = x^n2(\frac{1}{x} + a)(\frac{2}{x} + 2a - 1)(\frac{2}{x} + 2a - 2)\ldots(\frac{2}{x} + 2a - n + 1)$. Luego las raíces de $F(x) = 0$, son: $\frac{-1}{a}, \frac{-2}{2a-1}, \frac{-2}{2a-2}, \ldots, \frac{-2}{2a-n+1}$.

G 251- Se sabe que la ecuación $f(x) = 0$, tiene todas sus raíces reales y distintas. Demostrar que la ecuación: $A_0[f(x)]^n + A_1[f(x)]^{n-1}f'(x) + A_2[f(x)]^{n-2}[f'(x)]^2 + \ldots = 0$, tiene sus raíces reales si las tiene reales la ecuación: $A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$.

Solución: $A_0[f(x)]^n+A_1[f(x)]^{n-1}f'(x)+A_2[f(x)]^{n-2}[f'(x)]^2+\ldots=$
$=[f'(x)]^n\left(A_0\left[\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right]^n+A_1\left[\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right]^{n-1}+\ldots+A_n\right)=[f'(x)]^n\bullet F(\dfrac{f(x)}{f'(x)})=0,$
siendo: $F(\dfrac{f(x)}{f'(x)})=A_0\left[\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right]^n+A_1\left[\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right]^{n-1}+\ldots+A_n=0.$ Haciendo en esta ecuación: $\dfrac{f(x)}{f'(x)}=y,$ se tiene: $A_0y^n+A_1y^{n-1}+\ldots+A_{n-1}y+A_n=0,$ que tiene sus raíces reales según el enunciado, con lo que queda demostrado.

G 252- Demostrar que si $f(x)$ tiene todas sus raíces reales, también las tiene la ecuación: $2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)=0.$

Solución: La ecuación $x^2f(x)=0,$ tiene todas sus raíces reales, pues son las de $f(x)$ más la raíz doble $x=0.$ Su derivada: $2xf(x)+x^2f'(x)=0,$ tiene todas sus raíces reales, lo mismo que la derivada de esta última: $2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+x^2f''(x)=2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)=0,$ con lo que queda demostrado.

G 253- Se dan cuatro cantidades $a,\ b,\ c,\ d,$ reales y distintas entre sí. Se tiene la función $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$ Se pide 1º) Encontrar una función $g_1(x),$ polinomio de tercer grado, tal que se tenga: $g_1(a)=b,\ g_1(b)=c,\ g_1(c)=d,\ g_1(d)=a.$ 2º) Si se permutan en $g_1(x),$ las cantidades $a,\ b,\ c,\ d$ de todas las formas posibles, se obtienen seis funciones distintas $g_1(x),$ $g_2(x),\ g_3(x),\ g_4(x),\ g_5(x),\ g_6(x).$ Sea $F(x)$ la suma de estas seis funciones, y sea $G(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^3F(x).$ Formar $G(x)$ y estudiar su variación. 3º) Calcular las dos integrales indefinidas: $I=\int G(x)dx,\ J=\int\dfrac{dx}{G(x)}.$

Solución: 1º) El polinomio es: $g_1(x)=b\dfrac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+c\dfrac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$ $+d\dfrac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+a\dfrac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=b\dfrac{f_1(x)}{f_1(a)}+c\dfrac{f_2(x)}{f_2(b)}+d\dfrac{f_3(x)}{f_3(c)}+a\dfrac{f_4(x)}{f_4(d)}.$ 2º) Llamando: $p=a+b+c+d,$ se tiene que la expresión de la función $F(x)$ es: $F(x)=2\left[(p-a)\dfrac{f_1(x)}{f_1(a)}+(p-b)\dfrac{f_2(x)}{f_b(a)}+(p-c)\dfrac{f_3(x)}{f_3(a)}+(p-d)\dfrac{f_4(x)}{f_4(a)}\right].$ La expresión entre corchetes corresponde al desarrollo de $(p-x),$ pues se obtiene de $(p-x)f(x).$ Por tanto, se obtiene que: $F(x)=2(p-x),$ $\dfrac{1}{2}F(x)=a+b+c+d-x.$ Llamando: $q=ab+bc+cd+da,$ $r=abc+abd+acd+bcd,$ $s=abcd,$ se tiene que: $f(x)=x^4-px^3+qx^2-rx+s,$ $G(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^32(p-x)=qx^2-rx+s.$ De donde se tiene: $G'(x)=2qx-r=0,\ x=\dfrac{r}{2q},$ $G(\dfrac{r}{2q})=q(\dfrac{r}{2q})^2-r\dfrac{r}{2q}+s=s-\dfrac{r^2}{4q}.$ Para $q>0,$ G decrece desde $+\infty$ (para $x=-\infty$), hasta $x=\dfrac{r}{2q},$ desde donde crece hasta $+\infty$ (para $x=+\infty$). Para $q<0,$ G crece desde $-\infty$ (para $x=-\infty$), hasta $x=\dfrac{r}{2q},$ desde donde decrece hasta $-\infty$ (para $x=+\infty$). 3º) Las integrales son: $I=\int G(x)dx=\int(qx^2-rx+s)dx=\dfrac{q}{3}x^3-\dfrac{r}{2}x^2+sx+C,$ $J=\int\dfrac{dx}{G(x)}=\int\dfrac{dx}{qx^2-rx+s}.$ Para calcular esta integral, si $r^2-4qs>0,$ siendo α y β las raíces de $qx^2-rx+s=0,$ $J=\dfrac{1}{q(\alpha-\beta)}\ln\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}+C.$ Si $r^2-4qs<0,$ siendo $\lambda\pm\mu i$ las raíces de $qx^2-rx+s=0,$ $J=\dfrac{1}{q\mu}\arctan\dfrac{x-\lambda}{\mu}+C.$ Si $r^2-4qs=0,$ $J=\dfrac{-2q}{2qx-r}+C.$

Nota: La parte tercera de este problema no corresponde al dominio del Álgebra.

G 254- Dada la ecuación cuyas raíces son todas reales, $F_1(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0=0,$ se forma la ecuación $F_2(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0=0,$ cuyos coeficientes están relacionados con los de la anterior por la expresión $b_{m-n}=(m-n+1)(a_{m-n}-2a_{m-n+1}).$ Determinar la posición relativa sobre el eje de abscisas, de las raíces de $F_2(x)=0,$ respecto a las de $F_1(x)=0.$ Aplicarlo al caso de $F_1(x)=x^4-8x^3+23x^2-28x+12=0,$ $F_2(x)=5x^4-40x^3+117x^2-148x+68=0.$

Solución: Las ecuaciones dadas se pueden escribir de la siguiente forma: $F_1(x)=\sum a_{m-n}x^{m-n},$

$F_2(x) = \sum(m-n+1)(a_{m-n} - 2a_{m-n+1})x^{m-n} = \sum(m-n+1)a_{m-n}x^{m-n} - 2\sum(m-n+1)a_{m-n+1}x^{m-n} = (xF_1)' - 2F_1' = F_1 + (x-2)\ F_1'$. Siendo α y β, dos raíces consecutivas de F_1, se tiene que: $F_1'(\alpha)$ y $F_1'(\beta)$ son de signo contrario. El signo de $F_2 = F_1 + (x-2)F_1'$, depende de la posición relativa de α y β respecto a 2. Suponiendo que $\alpha > \beta$, se presentan cuatro casos, que se estudian seguidamente. Caso a) $\alpha > \beta > 2$, $F_2(\alpha) = (\alpha-2)F_1'(\alpha)$ tiene el mismo signo que $F_1'(\alpha)$, por ser $\alpha > 2$. Igualmente $F_2(\beta)$ tiene el mismo signo que $F_1'(\beta)$. Luego $F_2(\alpha)$ y $F_2(\beta)$ tienen distinto signo, por lo que F_2 tiene una raíz entre cada dos raíces consecutivas de F_1. Caso b) $\alpha > 2 > \beta$, $F_2(\alpha) = (\alpha-2)F_1'(\alpha)$ tiene el mismo signo que $F_1'(\alpha)$, por ser $\alpha > 2$. Sin embargo, $F_2(\beta)$ tiene distinto signo que $F_1'(\beta)$. Luego $F_2(\alpha)$ y $F_2(\beta)$ tienen el mismo signo, por lo que F_2 no tiene ninguna raíz entre dos raíces consecutivas de F_1, una mayor y otra menor que 2. Caso c) $2 > \alpha > \beta$, $F_2(\alpha) = (\alpha-2)F_1'(\alpha)$ tiene distinto signo que $F_1'(\alpha)$, por ser $\alpha < 2$. Igualmente $F_2(\beta)$ tiene distinto signo que $F_1'(\beta)$. Luego $F_2(\alpha)$ y $F_2(\beta)$ tienen distinto signo, por lo que F_2 tiene una raíz entre cada dos raíces consecutivas de F_1. Caso d) Si F_1 tiene la raíz 2, también la tiene $F_2 = F_1 + (x-2)F_1' = (x-2)(Q - F_1')$, donde Q es el cociente de dividir F_1 por $(x-2)$. Si F_1 tiene la raíz 2 de orden p, F_2 también la tiene del mismo orden. En este caso d), son de aplicación lo expuesto en los casos a) y c) anteriores. En cuanto al caso b), F_2 tiene una raíz entre α y 2, y otra raíz entre β y 2. Las raíces de $F_1(x) = x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 = 0$, son: 2 (doble), 1, 3. En cuanto a $F_2(x) = 5x^4 - 40x^3 + 117x^2 - 148x + 68 = 0$ tiene la raíz doble 2, y las otras dos raíces están situadas, una entre 1 y 2, y la otra entre 2 y 3.

G 255- Demostrar que si la ecuación $f = 0$ tiene todas sus n raíces reales y simples, y si k es un número positivo, la ecuación $F = f^2 + kf'^2 = 0$, tiene todas sus raíces complejas, siendo la parte imaginaria de cada una de ellas inferior en valor absoluto a $n\sqrt{k}$.

Solución: Si a fuera raíz real de F, anularía a: $f(a)^2 + kf'^2(a)$, para lo cual, al ser positivos los dos sumandos, se deberían anular éstos, con lo que a sería raíz de f y de f', lo que no es posible por ser sencillas todas las raíces de f. Luego F tiene sus $2n$ raíces complejas. Como sus coeficientes son reales, estas $2n$ raíces han de ser conjugadas dos a dos. Siendo: $F = (f + \sqrt{-k}\,f')(f - \sqrt{-k}\,f') = 0$, se obtiene que: $f + \sqrt{-k}\,f' = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n + \sqrt{-k}\,(nA_0x^{n-1} + A_1(n-1)x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}) = A_0x^n + (A_1 + \sqrt{-k}\,nA_0)x^{n-1} + \ldots = 0$. De donde se deduce que la suma de sus raíces es: $\frac{A_1 + \sqrt{-k}\,nA_0}{A_0} = \frac{A_1}{A_0} + \sqrt{k}\,n\,i$, por lo que la suma de las partes imaginarias es $\sqrt{k}\,n$. Por tanto, la parte imaginaria de cada raíz ha de ser inferior en valor absoluto a $\sqrt{k}\,n$.

Sección H - ECUACIONES DIOFÁNTICAS

H 1- Resolver la ecuación diofántica $3x+5y+7z=1323$, tomando sólo las soluciones enteras y positivas.

Solución: $x=\dfrac{1323-5y-7z}{3}=441-y-2z-\dfrac{2y+z}{3}=441-y-2z-t$. Por tanto, se tiene: $3t=2y+z$, $z=3t-2y$, $x=441-y-2(3t-2y)-t=5t-4y$. Luego: $x=5t-4u$, $y=u$, $z=3t-2u$, siendo $u>0$ y $5t>4u$.

H 2- Hallar la suma de las áreas de todos los rectángulos de lados formados por los ejes coordenados y las paralelas a éstos, trazadas por los puntos de coordenadas naturales (números enteros y positivos) de la recta $35x+17y=414$.

Solución: $y=24-2x+\dfrac{6-x}{17}=24-2x+t$, $x=6-17t$, $y=12+35t$. Para $t=0$, se tiene: $x=6$, $y=12$. No hay más soluciones naturales. Luego la suma pedida es: $6\cdot 12=72$.

H 3- Resolver la ecuación diofántica $2x+3y+5z=80$.

Solución: $x=40-5t+u$, $y=u$, $z=2t-u$. Para soluciones con números naturales se deben cumplir las condiciones: $u>0$, $2t>u$, $u>5t-40$, es decir: $t>8$ y $5t-40<u<2t$.

H 4- Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son los números a, b, c primos entre sí. Hallar la suma de los perímetros de los 10 triángulos que cumpliendo la condición anterior, sean tales que la longitud de uno de sus catetos sea el menor múltiplo de 5 posible.

Solución: $a^2=b^2+c^2$, $c^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)=x^2\cdot y^2$. Luego: $c=xy$, $a=\dfrac{x^2+y^2}{2}$, $b=\dfrac{x^2-y^2}{2}$. En consecuencia, se tienen las siguientes soluciones:

Número del triángulo	c	x	y	a	b	Perímetro
1	5	5	1	13	12	30
2	15	5	3	17	8	40
3	15	15	1	113	112	240
4	25	25	1	313	312	650
5	35	35	1	613	612	1.260
6	35	7	5	37	12	84
7	45	45	1	1.013	1.012	2.070
8	45	5	9	53	28	126
9	55	55	1	1.513	1.512	3.080
10	55	11	5	73	48	176
Suma de perímetros						7.756

La suma pedida es: 7.756.

H 5- Resolver la ecuación diofántica $5x^2-2y^2=37$.

Solución: $x^2=u$, $y^2=v$. Por tanto: $5u-2v=37$, $v=2u-18+m$, $u=2m+1\geq 0$, $v=5m-16\geq 0$. Por lo que, $m\geq 4$. Para $m=4$, $u=9$, $v=4$. Luego: $u=9+2t$, $v=4+5t$. De donde se tiene: $x=\sqrt{9+2t}$, $y=\sqrt{4+5t}$. Para $t=0$, $x=\pm 3$, $y=\pm 2$.

H 6- Resolver la ecuación diofántica $7x^2+3y^2=256z^2$.

Solución: $7\dfrac{x^2}{z^2}+3\dfrac{y^2}{z^2}=256$. Luego: $7t^2+3u^2=256$, $u^2=85-2t^2+\dfrac{1-t^2}{3}=85-2t^2+m$,

$t^2 = 1 - 3m$, $u^2 = 83 + 7m$. Para que $t^2 > 0$, $m \leq 0$. Para que $u^2 > 0$, $m \geq -11$. Se tiene el siguiente cuadro:

m	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
t^2	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1
u^2	160	153	146	139	132	125	118	111	104	97	90	83

Ninguno de los valores de t^2 ni de u^2 son cuadrados exactos. Sin solución.

H 7- Hallar un número terminado en dos ceros, sabiendo que el producto de sus divisores coincide con su potencia de exponente 30, y que si se escribe dicho número en base 9, acaba en dos ceros.

Solución: $m^{30} = \sqrt{m^v}$, siendo v el número de sus divisores. Luego: $v = 60$. El número m tiene al menos los divisores: 2^2, 5^2 y 3^4. Por tanto: $m = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot x^d \cdot y^e \cdot \ldots$ El número de sus divisores es: $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)\ldots$, siendo: $a \geq 2$, $b \geq 4$, $c \geq 2$. En estas condiciones, 60 se puede descomponer en los siguientes factores: $2 \cdot 10 \cdot 3$, $3 \cdot 10 \cdot 2$, $2 \cdot 15 \cdot 2$. Es decir:

a	b	c	d	m
3	4	2	-	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 16.200$
2	4	3	-	$2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 = 40.500$

H 8- Resolver la ecuación diofántica: $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y - 5 = 0$.

Solución: La ecuación dada es igual a: $(x - 3y + 2)^2 - 9 = 0$. Luego: $x - 3y + 2 = \pm 3$. Por tanto, una familia de soluciones es: $x = 1 + 3t$, $y = t$. Y una segunda familia es: $x = 1 + 3t$, $y = 2 + t$.

H 9- Calcular la suma de los productos $x_n \cdot y_n$, siendo x_n, y_n soluciones enteras y positivas de la diofántica $x^2 + 4y^2 + 4xy - y + 4 = 0$, correspondiendo y_n a aquéllos de los primeros 1000 números naturales que verifiquen la ecuación.

Solución: $(x + 2y + 2)^2 - 4x - 9y = 0$, $x + 2y + 2 = \lambda$, $4x + 9y = \lambda^2$. De donde se tiene: $y = \lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda - 2)^2 + 4 > 0$, $x = -2\lambda^2 + 9\lambda - 18 = -2\left[\left(\lambda - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{63}{16}\right] < 0$. No hay ningún valor de x que sea positivo. El problema no tiene solución.

H 10- Hallar las fórmulas que dan las soluciones enteras de la ecuación diofántica $x^2 - 6xy + 9y^2 - 6x + 3y - 1 = 0$.

Solución: $(x - 3y - 3)^2 - 15y - 10 = 0$, $x - 3y - 3 = \lambda$, $15y + 10 = \lambda^2$. Sustituyendo $\lambda = 5t$, se obtienen los valores: $x = 5t^2 + 5t + 1$, $y = \frac{5t^2 - 2}{3}$. Para que y sea entero, t no puede ser $\dot{3}$. Para $t = 3n \pm 1$, se tienen los valores: $x = 45n^2 + (15 \pm 30)n + 6 \pm 5$, $y = 15n^2 \pm 10n + 1$.

H 11- Resolver la ecuación diofántica $2x^2 + xy - 37x - 3y + 57 = 0$.

Solución: $(x - 3)(2x + y - 31) = 36 = 2^2 \cdot 3^2$. Siendo los divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, se tiene la siguiente tabla de soluciones:

$x - 3$	-36	-18	-12	-9	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	9	12	18	36
$2x + y - 31$	-1	-2	-3	-4	-6	-9	-12	-18	-36	36	18	12	9	6	4	3	2	1
x	-33	-15	-9	-6	-3	-1	0	1	2	4	5	6	7	9	12	15	21	39
y	96	54	46	39	31	24	19	11	-9	59	39	31	26	19	11	4	-9	-46

H 12- Hallar las soluciones enteras de $29x - 37y = 11$.

Solución: $x = 37t - 6$, $y = 29t - 5$.

Sección I -   INECUACIONES

I 1- Resolver la inecuación $\frac{5}{x+1} + \frac{3}{x+2} > \frac{2}{x-3}$.

Solución: Operando: $A = \frac{6x^2 - 17x - 43}{(x+1)(x+2)(x-3)} = 6\frac{(x-4,4\,*)(x+1,6\,**)}{(x+1)(x+2)(x-3)} = 6\frac{B}{C} > 0$

x	< -2	-2		$-1,6$		-1		3		$4,4$	$> 4,4$
$B = (x-4,4)(x+1,6)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$C = (x+1)(x+2)(x-3)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$A = 6B/C$	$-$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$+$	$-\infty$	$-$	0	$+$

Los intervalos en que $A > 0$, son: $-2 < x < \frac{17 - \sqrt{1321}}{12}$; $-1 < x < 3$; $\frac{17 + \sqrt{1321}}{12} < x$.
$(*)\frac{17 + \sqrt{1321}}{12} \simeq 4,4$, $(**)\frac{17 - \sqrt{1321}}{12} \simeq -1,6$.

I 2- Resolver la inecuación $\frac{3}{x+3} + \frac{2}{x+2} > \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x-2}$.

Solución: Operando: $A = \frac{-26(x+2,35\,*)(x-2,35\,*)}{(x+3)(x+2)(x-2)(x-3)} = \frac{B}{C} > 0$.

x	< -3	-3		$-2,3$		-2		2		$2,3$		3	> 3
$B = -26(x+2,35)(x-2,35)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$C = (x+3)(x+2)(x-2)(x-3)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$A = B/C$	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$	∞	$-$	0	$+$	∞	$-$

Luego los intervalos en que $A > 0$, son: $-3 < x < -\frac{6\sqrt{26}}{13}$; $-2 < x < 2$; $\frac{6\sqrt{26}}{13} < x < 3$.
$(*)\frac{6\sqrt{26}}{13} \simeq -2,35$.

I 3- Resolver la inecuación $x - \sqrt{x} - 5 > 0$.

Solución: Haciendo: $y = \sqrt{x}$, se tiene: $y^2 - y - 5 > 0$. Resolviendo $y^2 - y - 5 = 0$, se tiene: $y = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. Por tanto: $x = y^2 = \frac{11 \pm \sqrt{21}}{2}$. Como por el enunciado $x > 0$ para que $\sqrt{x}$ sea real, la solución es: $x > \frac{11 + \sqrt{21}}{2}$.

I 4- Demostrar que $n^3 > n^2 + 5n + 3$ a partir de un cierto valor de n, que se determinará.

Solución: $n^3 - n^2 - 5n - 3 = (n+1)^2(n-3)$. Luego la desigualdad se cumple para $n > 3$.

I 5- Resolver la inecuación $\sqrt{x^4 - 15x} > (x^2 - 2x + 3)$.

Solución: Resolviendo la ecuación: $\sqrt{x^4 - 15x} = x^2 - 2x + 3$, se tiene, elevando al cuadrado y simplificando: $4x^3 - 10x^2 - 3x - 9 = (x-3)(4x^2 + 2x + 3) = 0$. Como $4x^2 + 2x + 3$ es siempre > 0, la inecuación se cumple para $x > 3$.

I 6- Resolver la inecuación $\frac{x^2 - mx + 1}{(x-2)(x+1)} > 0$, según los valores del parámetro m.

Solución: La inecuación dada tiene la misma solución que la inecuación: $(x^2 - mx + 1)(x-2)(x+1) > 0$, es decir que: $(x-a)(x-b)(x-2)(x+1) > 0$, (salvo para $x = -1$ y $x = 2$, casos a estudiar específicamente), siendo $a = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$ y $b = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}$. Luego la solución depende de la situación de a y b en relación con -1 y 2. Para $m = -2$,

$a = b = -1$. Para $m = 2{,}5$, $a = 2$, $b = 0{,}5$. Para $m = 2$, $a = b = 1$. Seguidamente se analizan todos los casos posibles, de acuerdo con los valores de m. 1) $m < -2$: La situación de las raíces es: b, -1, a, 2. Luego la solución es: $x < b$; $-1 < x < a$; $x > 2$. 2) $m = -2$: La inecuación dada queda $\frac{x+1}{x-2}$. Luego la solución es: $x < -1$; $x > 2$. 3) $-2 < m < 2$: En este intervalo, siempre la expresión $x^2 - mx + 1 > 0$, por lo que sólo interesan las raíces -1 y 2. Luego la solución es: $x < -1$; $x > 2$. 4) $m = 2$: Para este valor, siempre la expresión $x^2 - mx + 1 > 0$, por lo que sólo interesan las raíces -1 y 2. Luego la solución es: $x < -1$; $x > 2$. 5) $2 < m < 2{,}5$: La situación de las raíces es: -1, b, a, 2. Luego la solución es: $x < -1$; $b < x < a$; $x > 2$. 6) $m = 2{,}5$: La inecuación dada queda $\frac{x-0{,}5}{x+1}$. Luego la solución es: $x < -1$; $x > 0{,}5$. 7) $m > 2{,}5$: La situación de las raíces es: -1, b, 2, a. Luego la solución es: $x < -1$; $b < x < 2$; $x > a$. 8) Para $x = -1$: La inecuación dada queda: $\frac{m+2}{0} \to \infty$, salvo para $m = -2$, para el que $\frac{0}{-3} = 0$. 9) Para $x = 2$: La inecuación dada queda: $\frac{5-2m}{0} \to \infty$, salvo para $m = 2{,}5$, para el que $\frac{1{,}5}{3} > 0$, siendo solución de la inecuación.

I 7- Resolver la inecuación $mx^2 + (m-1)x + (m-1) < 0$, según los distintos valores del parámetro m.

Solución: Resolviendo la ecuación: $mx^2 + (m-1)x + (m-1) = 0$, se tiene: $x = \frac{-m+1 \pm \sqrt{-3(m-1)(m+\frac{1}{3})}}{2m}$. Tiene raíces reales para: $-\frac{1}{3} < m < 1$. 1) $m > 1$: No tiene raíces reales. El polinomio siempre es > 0. Sin solución. 2) $m = 1$: La inecuación queda: $x^2 < 0$. No hay solución. 3) $0 < m < 1$: Hay solución para $x_2 < x < x_1$, es decir: $\frac{-m+1-\sqrt{-3(m-1)(m+\frac{1}{3})}}{2m} < x < \frac{-m+1+\sqrt{-3(m-1)(m+\frac{1}{3})}}{2m}$. 4) $m = 0$: La inecuación queda: $-x-1 < 0$. Tiene solución para $x > -1$. 5) $-\frac{1}{3} < x < 0$: Hay solución para $x > x_1$ y para $x < x_2$; es decir que: $x > \frac{-m+1+\sqrt{-3(m-1)(m+\frac{1}{3})}}{2m}$; $x < \frac{-m+1-\sqrt{-3(m-1)(m+\frac{1}{3})}}{2m}$. 6) $m = -\frac{1}{3}$: La inecuación queda: $-(x+2)^2 < 0$. Siempre hay solución, salvo para $x = -2$. 7) $m < -\frac{1}{3}$: No tiene raíces reales. El polinomio siempre es < 0. Siempre hay solución.

I 8- Resolver la inecuación $x^2 - 2mx + m < 0$, según los distintos valores de m.

Solución: Resolviendo la ecuación $x^2 - 2mx + m = 0$, se tiene: $x = -m \pm \sqrt{m(m-1)}$. Tiene raíces reales para $m < 0$ y para $m > 1$. 1) $m > 1$: La ecuación tiene raíces reales. La solución es: $-m - \sqrt{m(m-1)} < x < -m + \sqrt{m(m-1)}$. 2) $m = 1$: La inecuación queda: $(x-1)^2 < 0$. No hay solución. 3) $0 < m < 1$: La ecuación no tiene raíces reales. El polinomio siempre es positivo. No hay solución. 4) $m = 0$: La inecuación queda: $x^2 < 0$. No hay solución. 5) $m < 0$: La ecuación tiene raíces reales. La solución es: $-m - \sqrt{m(m-1)} < x < -m + \sqrt{m(m-1)}$.

I 9- Resolver la inecuación $\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-2} > 0$.

Solución: Los dos radicandos han de ser positivos, luego $x > 2$. Para esta condición, siempre la primera raíz es mayor que la segunda. Luego la solución es: $x > 2$.

I 10- Hallar los valores que hay que dar a x para que se satisfagan simultáneamente las desigualdades $\frac{3x+5}{7-3x} < 4$ y $\frac{12x^2+13x-14}{x-2} < 0$.

Solución: 1) Resolviendo la primera inecuación: $\frac{3x+5}{7-3x} - 4 < 0$. Operando se tiene: $\frac{3x+5-28+12x}{7-3x} = \frac{15x-23}{7-3x} < 0$. De donde: $(15x-23)(7-3x) < 0$. Luego: $45(x-\frac{23}{15})(x-\frac{7}{3}) < 0$. La solución es: $x < \frac{23}{15}$; $x > \frac{7}{3}$. 2) Resolviendo la segunda inecuación:

$\frac{12(x-\frac{2}{3})\ (x+\frac{7}{4})}{x-2} < 0$. De donde: $12(x-\frac{2}{3})(x+\frac{7}{4})(x-2) < 0$. La solución es: $x < -\frac{7}{4}$; $\frac{2}{3} < x < 2$. 3) La solución común es: $x < -\frac{7}{4}$; $\frac{2}{3} < x < \frac{23}{15}$.

I 11- Resolver el sistema de inecuaciones $\frac{9}{x} < 8 - \frac{7}{x+2}$, $x > \frac{11x+24}{8x+11}$.

Solución: 1) Resolviendo la primera inecuación: $8 - \frac{7}{x+2} - \frac{9}{x} > 0$. Operando: $\frac{8x^2-18}{x(x+2)} > 0$. Luego: $8(x^2-\frac{9}{4})x(x+2) > 0$. Es decir: $(x+2)(x+1,5)x(x-1,5) > 0$. La solución es : $x < -2$; $-1,5 < x < 0$; $x > 1,5$. 2) Resolviendo la segunda inecuación: $x - \frac{11x+24}{8x+11} > 0$. Operando: $\frac{8x^2-24}{8x+11} = \frac{(x+\sqrt{3})\ (x-\sqrt{3})}{x+\frac{11}{8}} > 0$. Luego: $(x+\sqrt{3})(x+\frac{11}{8})(x-\sqrt{3}) > 0$. La solución es: $-\sqrt{3} < x < -\frac{11}{8}$; $x > \sqrt{3}$. 3) La solución común es: $-1,5 < x < -\frac{11}{8}$; $x > \sqrt{3}$.

I 12- Resolver el sistema $\frac{3x+5}{7-3x} < 4$, $\frac{12x^2+13x-14}{x-2} < 0$.

Solución: 1) Resolviendo la primera inecuación: $\frac{3x+5-28+12x}{7-3x} < 0$. Luego: $15 \bullet 7(x-\frac{23}{15})(x-\frac{7}{3}) > 0$. La solución es: $x < \frac{23}{15}$; $x > \frac{7}{3}$. 2) Resolviendo la segunda inecuación: $12(x+\frac{7}{4})(x-\frac{2}{3})(x-2) < 0$. La solución es: $x < -\frac{7}{4}$; $\frac{2}{3} < x < 2$. 3) La solución común es: $x < -\frac{7}{4}$; $\frac{2}{3} < x < \frac{23}{15}$.

Sección J - FRACCIONES CONTINUAS

J 1- Desarrollar en fracción continua $\sqrt{29}$, con error $< \dfrac{1}{10.000}$.

Solución: Operando: $\sqrt{29} = \underline{5} + \dfrac{1}{a}$, $a = \dfrac{\sqrt{29}+5}{4} = \underline{2} + \dfrac{1}{b}$, $b = \dfrac{\sqrt{29}+3}{5} = \underline{1} + \dfrac{1}{c}$, $c = \dfrac{\sqrt{29}+2}{5} = \underline{1} + \dfrac{1}{d}$, $d = \dfrac{\sqrt{29}+3}{4} = \underline{2} + \dfrac{1}{e}$, $e = \sqrt{29}+5 = \underline{10} + \dfrac{1}{f}$, $f = \dfrac{\sqrt{29}+5}{4} = a$. Luego se tiene; $\sqrt{29} = 5 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\ldots}}}}} = 5 + \dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{10+}\ldots =$

$= (5,\overline{2,1,1,2,10})$. Las sucesivas reducidas son: $\dfrac{N}{D}$, según la tabla:

a	5	2	1	1	2	10
N	5	11	16	27	70	727
D	1	2	3	5	13	135

El cálculo de las reducidas es, por ejemplo, $\dfrac{70}{13} = \dfrac{27 \cdot 2 + 16}{5 \cdot 2 + 3}$. Siendo el límite del error $\dfrac{1}{D^2} < \dfrac{1}{10.000}$, el error de la reducida $\dfrac{727}{135}$ es $< \dfrac{1}{10.000}$.

J 2- Dadas las expresiones: $x_1 = \dfrac{1}{x}$, $x_2 = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$, $x_3 = \dfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}$, etc. Hallar los valores de x tales que $x_n < 2$ cualquiera que sea n.

Solución: Siendo $x_n = \dfrac{1}{1-x_{n-1}}$, se tiene sucesivamente: $x_2 = \dfrac{x}{x-1}$, $x_3 = \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}} = 1-x$, $x_4 = \dfrac{1}{1-1+x} = \dfrac{1}{x} = x_1$, $x_5 = x_2$, etc. Para, $x_1 = \dfrac{1}{x} < 2$, $x > \dfrac{1}{2}$. Para, $x_2 = \dfrac{x}{x-1} < 2$, $x > 2$. Para, $x_3 = 1-x < 2$, $x > -1$. Para, $x_4 = \dfrac{1}{x} < 2$, $x > \dfrac{1}{2}$. Para x_5, como x_2, etc. Luego: $x > 2$.

J 3- Desarrollar en fracción continua $\sqrt{28}$.

Solución: Operando: $\sqrt{28} = \underline{5} + \dfrac{1}{a}$, $a = \dfrac{\sqrt{28}+5}{3} = \underline{3} + \dfrac{1}{b}$, $b = \dfrac{\sqrt{28}+4}{4} = \underline{2} + \dfrac{1}{c}$, $c = \dfrac{\sqrt{28}+4}{3} = \underline{3} + \dfrac{1}{d}$, $d = \sqrt{28}+5 = \underline{10} + \dfrac{1}{e}$, $e = \dfrac{\sqrt{28}-5}{3} = a$. Luego se tiene que: $\sqrt{29} = 5 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}} = 5 + \dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{10+}\,\dfrac{1}{3+}\ldots = (5,\overline{3,2,3,10})$.

J 4- Desarrollar en fracción continua $\sqrt{m^2-2}$.

Solución: $\sqrt{m^2-2} = \underline{m-1} + \dfrac{1}{a}$, $a = \dfrac{\sqrt{m^2-2}+m-1}{2m-3} = \underline{1} + \dfrac{1}{b}$, $b = \dfrac{\sqrt{m^2-2}+m-2}{2} = \underline{m-2} + \dfrac{1}{c}$, $c = \dfrac{\sqrt{m^2-2}+m-2}{2m-3} = \underline{1} + \dfrac{1}{d}$, $d = \sqrt{m^2-2}+m-1 = \underline{2m-2} + \dfrac{1}{e}$, $\dfrac{1}{e} = \sqrt{m^2-2} - m + 1 = \dfrac{1}{a}$. Luego, $e = a$. Por tanto: $\sqrt{m^2-2} = \left[(m-1),\overline{1,(m-2)1,2(m-1)}\right]$.

J 5- Formar el trinomio de segundo grado que se anula para $a = (2,3,5,\overline{1,6})$ y para $b = (\overline{1.6})$.

Solución: $b = 1 + \dfrac{1}{6+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{7b+1}{6b+1}$. De donde: $6b^2 - 6b - 1 = 0$, $b = \dfrac{3+\sqrt{15}}{6}$.

$a = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{b}}} = \frac{37b+7}{16b+3}$, De donde: $a = \frac{203 - \sqrt{15}}{86}$. Por tanto, el trinomio es: $(x-a)(x-b) = x^2 - \frac{369 + 20\sqrt{15}}{129}x + \frac{297 + 100\sqrt{15}}{258}$.

J 6- Desarrollar en fracción continua indefinida e^x.

Solución: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = 1 - \cfrac{x}{x + 1 - \cfrac{x}{x + 2 - \cfrac{2x}{x + 3 - \cfrac{3x}{x + 4\ldots}}}}$.

J 7- Desarrollar en fracción continua indefinida $\sin x$.

Solución: $\sin x = x + \cfrac{x^2}{2 \cdot 3 - x^2 + \cfrac{2 \cdot 3x^2}{4 \cdot 5 - x^2 + \cfrac{4 \cdot 5x^2}{6 \cdot 7 - x^2 + \cfrac{6 \cdot 7x2}{8 \cdot 9 - x^2 + \ldots}}}}$.

J 8- Desarrollar en fracción continua indefinida $\cos x$.

Solución: $\cos x = 1 + \cfrac{x^2}{1 \cdot 2 - x^2 + \cfrac{1 \cdot 2x^2}{3 \cdot 4 - x^2 + \cfrac{3 \cdot 4x^2}{5 \cdot 6 - x^2 + \cfrac{5 \cdot 6x}{7 \cdot 8 - x^2 + \ldots}}}}$.

Sección K - NÚMEROS COMPLEJOS

K 1- Hallar la relación que deben cumplir m y n para que la ecuación $x^3+mx+n=0$ admita una raíz compleja de módulo doble que la raíz real.

Solución: La ecuación tendrá dos raíces imaginarias conjugadas $a\pm bi$ y una raíz real c. Por tanto: $(x-a-bi)(x-a+bi)(x-c)\equiv x^3+mx+n=0$. De donde se obtiene, igualando los coeficientes: $c+2a=0$, $m=2ac+a^2+b^2$, $n=-c(a^2+b^2)$, $4c^2=a^2+b^2$. Resolviendo el sistema se obtiene: $16m^3-27n^2=0$.

K 2- Hallar la relación que deben cumplir los coeficientes a_1, a_2, a_3 para que la ecuación $z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0$, tenga por raíces tres números cuyos afijos sean los vértices de un triángulo equilátero de lado $\sqrt{3}$.

Solución: $z_2-z_1=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_3-z_1), z_1-z_3=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2-z_3)$. Dividiendo entre sí las dos ecuaciones: $\frac{z_2-z_1}{z_1-z_3}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_3}$. Operando: $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$, que es la relación que deben cumplir tres complejos para ser los vértices de un triángulo equilátero. Como $z_1^2+z_2^2+z_3^2=(z_1+z_2+z_3)^2-2(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)$, se tiene sustituyendo el valor anterior: $(z_1+z_2+z_3)^2=3(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)$, es decir: $(-a_1)^2=3a_2$. Por tanto la relación entre los coeficientes para que las raíces sean los vértices de un triángulo equilátero es: ${a_1}^2=3a_2$. La ecuación queda: $z^3+a_1z^2+\frac{{a_1}^2}{3}z+a_3=0$. Trasladando el origen de coordenadas al centro del triángulo ($z_0=-\frac{a_1}{3}$), se tiene la igualdad: $z=z_0+j$. Sustituyéndola en la ecuación: $(z_0+j)^3+a_1(z_0+j)^2+\frac{{a_1}^2}{3}(z_0+j)+a_3=0$. Operando y sustituyendo z_0 por $-\frac{a_1}{3}$, se tiene: $j^3-\frac{a_1^3}{27}+a_3=0$. Sus tres raíces son: $e^{\theta i}$, $e^{(\theta+\frac{2\pi}{3})i}$, $e^{(\theta-\frac{2\pi}{3})i}$, porque al ser el lado $\sqrt{3}$, la distancia del centro a los vértices es 1, por lo que el módulo de las raíces es 1. El producto de las tres raíces es: $e^{3\theta i}=\cos 3\theta+i\sin 3\theta=\frac{a_1^3}{27}-a_3$, que es un número real. Por tanto: $\sin 3\theta=0$, $\cos 3\theta=\pm 1$. Por lo que se cumple también la relación: $\frac{a_1^3}{27}-a_3=\pm 1$. Luego las relaciones son dos: ${a_1}^2=3a_2$, $\frac{a_1^3}{27}-a_3=\pm 1$.

K 3- Hallar a, b, c de modo que $z^5-10z^4+az^3+bz^2+cz+64=0$, tenga por raíces números cuyos afijos sean vértices de un pentágono regular, y calcularlas.

Solución: Siendo 10 la suma de las cinco raíces, el centro del pentágono es $\frac{10}{5}=2$. Trasladando el origen de coordenadas a dicho centro, se aplica la sustitución $z=j+2$, obteniendo: $(j+2)^5-10(j+2)^4+a(j+2)^3+b(j+2)^2+c(j+2)+64=0$. Operando, se tiene la ecuación: $j^5+(a-40)j^3+(6a+b-160)j^2+(12a+4b+c-240)j+8a+4b+2c-64=0$. Como uno de los vértices es $\rho e^{\theta i}$, se tiene: $j^5-\rho^5e^{5\theta i}=0$. Igualando los coeficientes de las dos ecuaciones, se tiene: $a=40$, $b=-80$, $c=80$, quedando la ecuación: $z^5-10z^4+40z^3-80z^2+80z+64=0$. Para calcular las raíces, se parte del término independiente de la ecuación en j, es decir: $8a+4b+2c-64=96$. Luego: $\rho^5e^{5\theta i}=-96$. Por tanto: $\sin 5\theta=0$, $\theta=k\pi$, siendo el módulo: $\rho=\sqrt[5]{-96}=-2\sqrt[5]{3}$. De donde se deduce que las raíces de la ecuación dada son: $z=(2-2\sqrt[5]{3})(\cos\frac{k\pi}{5}+i\sin\frac{k\pi}{5})$, para $k=0, 1, 2, 3, 4$.

K 4- Hallar el valor de $\left(\frac{1+\sin x+i\cos x}{1+\sin x-i\cos x}\right)^m$.

Solución: $1+\sin x+i\cos x=z=\rho e^{\theta i}$, $1+\sin x-i\cos x=\bar{z}=\rho e^{-\theta i}$. Luego se tiene que: $z/\bar{z}=e^{2\theta i}$, $\tan\theta=\frac{\cos x}{1+\sin x}=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$. Por tanto: $z/\bar{z}=e^{(\frac{\pi}{2}-x)i}$. El valor pedido es: $\left(\frac{1+\sin x+i\cos x}{1+\sin x-i\cos x}\right)^m=(z/\bar{z})^m=e^{m(\frac{\pi}{2}-x)i}$.

K 5- Hallar la parte real y la imaginaria de $\left(\frac{1+\sin x+i\cos x}{1+\sin x-i\cos x}\right)^m$.

Solución: Por el problema K 4, se sabe que: $\left(\frac{1+\sin x+i\cos x}{1+\sin x-i\cos x}\right)^m = e^{m(\frac{\pi}{2}-x)i}$. La parte real es: $\cos m(\frac{\pi}{2}-x)$, y la imaginaria: $\sin m(\frac{\pi}{2}-x)$.

K 6- Hallar la transformada $W = z+\frac{1}{z}$, cuando z recorre la circunferencia de centro el origen y radio la unidad.

Solución: Por estar z en la citada circunferencia, se tiene: $z = x+yi = \cos\theta+i\sin\theta$, $\bar{z} = \cos\theta-i\sin\theta = \frac{1}{z}$, $z+\bar{z} = 2\cos\theta$. Luego: $W = 2\cos\theta = 2x$.

K 7- Demostrar utilizando complejos, el teorema de Ptolomeo (en un cuadrilátero inscriptible, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos).

Solución: Sea el cuadrilátero: $z_{1,}z_2,z_3,z_4$. Se trata de demostrar que: $d_{13}d_{24} = d_{12}d_{34}+d_{23}d_{41}$. Por ser inscriptible se tiene que su razón doble es: $(z_{1,}z_2,z_3,z_4) = k$, siendo k un número real. Luego: $(z_{1,}z_2,z_3,z_4)+(z_{1,}z_3,z_2,z_4) = 1$, es decir: $\frac{\mid z_1z_3 \mid \bullet \mid z_2z_4 \mid}{\mid z_1z_4 \mid \bullet \mid z_2z_3 \mid} - \frac{\mid z_1z_2 \mid \bullet \mid z_3z_4 \mid}{\mid z_1z_4 \mid \bullet \mid z_3z_2 \mid} = 1$. Por tanto: $d_{13}d_{24} = d_{14}d_{23}(1+\frac{d_{12}d_{34}}{d_{14}d_{23}}) = d_{14}d_{23}+d_{12}d_{34}$.

K 8- Encontrar un número complejo tal que su cuadrado coincida con su conjugado.

Solución: Sea el número buscado $a+bi$. Luego: $a^2-b^2+2abi = a-bi$. Resolviendo el sistema: $a^2-b^2 = a,\ 2ab = -b$, se tienen las soluciones: 1; $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

K 9- Dado un triángulo cualquiera A,B,C, se construyen exteriormente triángulos equiláteros sobre los lados $AB,\ BC,\ CA$. Demostrar que el triángulo formado por los baricentros de estos tres triángulos, también es equilátero.

Solución: Sean $z_1,\ z_2,\ z_3$ los vértices A,B,C. Sea z_{12} el tercer vértice del triángulo equilátero construido sobre AB. Se tiene (ver problema K2): $z_1^2+z_2^2+z_{12}^2 = z_1z_2+z_1z_{12}+z_2z_{12}$. Operando: $z_{12} = \frac{1}{2}\left[z_1+z_2\pm\sqrt{3}(z_1-z_2)i\right]$. Las coordenadas del baricentro del triángulo $z_1,\ z_2,\ z_{12}$, son: $G_{12} = \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_{12}) = \frac{1}{2}(z_1+z_2)\pm\frac{\sqrt{3}}{6}(z_1-z_2)i$. De la misma forma se obtienen G_{13} y G_{23}. Operando, se obtienen: $G_{12}+G_{13}+G_{23} = z_1+z_2+z_3$ (el baricentro del triángulo $G_{12}G_{13}G_{23}$ coincide con el del ABC) y $G_{12}G_{13}+G_{12}G_{23}+G_{13}G_{23} = \frac{1}{3}(z_1^2+z_2^2+z_3^2+2z_1z_2+2z_1z_3+2z_2z_3)$.
Por tanto: $G_{12}^2+G_{13}^2+G_{23}^2-G_{12}G_{13}-G_{12}G_{23}-G_{13}G_{23} =$
$= (z_1+z_2+z_3)^2-3(G_{12}G_{13}+G_{12}G_{23}+G_{13}G_{23}) =$
$= (z_1+z_2+z_3)^2-(z_1^2+z_2^2+z_3^2+2z_1z_2+2z_1z_3+2z_2z_3) = 0$, con lo que queda demostrado que el triángulo $G_{12}G_{13}G_{23}$ es equilátero.
Nota: El doble signo de z_{12} corresponde a su posición a un lado o a otro, de AB.

K 10- Calcular la raíz cuadrada de $3+2i$.

Solución: $(a+bi)^2 = 3+2i = a^2-b^2+2abi$. Luego: $a^2-b^2 = 3$ y $2ab = 2$. Resolviendo el sistema, se tiene que la raíz cuadrada es: $\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}\,i$. También se resuelve, siendo: $3+2i = \sqrt{13}\,e^{i\arctan\frac{2}{3}}$, su raíz cuadrada es: $\pm\sqrt[4]{13}\,e^{\frac{i}{2}\arctan\frac{2}{3}}$.

K 11- Hallar un número complejo z_4 que forme un cuadrilátero armónico con $z_1 = 1+2i,\ z_2 = 3+7i$, $z_3 = 2+i$.

Solución: $(z_1,z_2,z_3,z_4) = -1$, luego: $\frac{z_1z_3}{z_1z_4}\div\frac{z_2z_3}{z_2z_4} = \frac{1-i}{a+bi-1-2i}\div\frac{-1-6i}{a+bi-3-7i} = -1$, siendo $z_4 = a+bi$. Resolviendo la ecuación: $z_4 = \frac{4}{7}+3i$.

K 12- La suma de dos números complejos es $3+2i$. La parte real de uno de ellos es 2. Determinar dichos números, sabiendo que su cociente es imaginario puro.

Solución: Los números pedidos son: $2+ai$, $1+(2-a)i$. Dividiéndolos se tiene: $\frac{1+(2-a)i}{2+ai} = \frac{[1+(2-a)i](2-ai)}{4-a^2} = \frac{2+2a-a^2+(4-3a)i}{4-a^2}$. Luego: $2+2a-a^2 = 0$. De donde: $a = 1 \pm \sqrt{3}$. Los números pedidos son: $2+(1\pm\sqrt{3})i$, $1+(1\mp\sqrt{3})i$.

K 13- Hallar los coeficientes de la ecuación $ax^3+ax^2+bx+c = 0$, para que los afijos representativos de las tres raíces sean los vértices de un triángulo equilátero de lado 2, siendo reales los coeficientes.

Solución: La distancia del centro del triángulo a los vértices es: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. La condición para que tres números z_1, z_2, z_3 sean vértices de un triángulo equilátero (ver problema K 2) es la siguiente: $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$, es decir: $(z_1+z_2+z_3)^2-3(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3) = 0$. Por tanto: $(\frac{-a}{a})^2-3\frac{b}{a} = 0$, $a = 3b$. La ecuación queda: $x^3+x^2+\frac{1}{3}x+\frac{c}{a} = 0$. Trasladando el origen al centro del triángulo $\left(-\frac{1}{3}\right)$, se tiene: $z = j-\frac{1}{3}$. Introduciendo este valor en la ecuación: $(j-\frac{1}{3})^3+(j-\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}(j-\frac{1}{3})+\frac{c}{a} = 0$. Operando se obtiene que: $j^3-\frac{1}{27}+\frac{c}{a} = 0$. Luego: $\frac{1}{27}-\frac{c}{a} = (\frac{2\sqrt{3}}{3})^3$, $\frac{c}{a} = \frac{1-24\sqrt{3}}{27}$. Haciendo $a = 27$, se tiene: $b = 9$, $c = 1-24\sqrt{3}$.

K 14- Dado el cuadrilátero $ABCD$, cuyos vértices son los afijos $A = 8-i$, $B = 10$, $C = 9+2i$, $D = 6+i$, y el triángulo de vértices $E = 1+6i$, $F = -3+7i$, $G = -1+5i$, determinar el número por el que hay que multiplicar estos tres últimos números complejos para que el nuevo triángulo de vértices $E'F'G'$, en que se transforma el EFG, tenga su baricentro coincidente con el punto de corte de las diagonales AC y BD del cuadrilátero.

Solución: La ecuación de la diagonal AC es: $\frac{x-8}{9-8} = \frac{y+1}{2+1}$, es decir: $3x-y-25 = 0$. La de la diagonal BD es: $\frac{x-10}{6-10} = \frac{y}{1}$, es decir: $x+4y-10 = 0$. Resolviendo el sistema, se tiene el punto de corte: $\frac{110}{13}+\frac{5}{13}i$. El baricentro de $E'F'G'$ es: $(a+bi)(\frac{1-3-1}{3}+\frac{6+7+5}{3}i)$. Por tanto, el número pedido es: $a+bi = \left(\frac{110}{13}+\frac{5}{13}i\right) \div (-1+6i) = \frac{-80}{481}-\frac{665}{481}i$.

K 15- Resolver la ecuación $(x+yi)^3 = \sqrt{\frac{1-i}{1+i}}$.

Solución: $\sqrt{\frac{1-i}{1+i}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{-\pi}{4}i}\right) : \left(\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)} = \pm e^{\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)i}$. Luego: $x+yi = \pm e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}\right)i}$. Por tanto: $x+yi = \pm\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}) \pm i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3})$. Dando valores a k, las soluciones son las siguientes: $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $\mp(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}) \pm (\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})i$; $\mp(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}) \pm (\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})i$.

K 16- P_0, P_1, P_2 son complejos de afijos i, 1, 0, respectivamente. Por P_2 se traza la perpendicular a P_0P_1, cuyo pie es P_3. Por P_3, la perpendicular a P_1P_2, cuyo pie es P_4. Por P_4, la perpendicular a P_2P_3, cuyo pie es P_5, etc. Hallar el límite de P_n cuando $n \to \infty$.

Solución: Se tiene que P_3 es el punto medio de P_0P_1. Que P_4 lo es de P_1P_2..Y así sucesivamente, teniéndose que: $2P_3 = \underline{P_0}+\underline{P_1}$, $2P_4 = \underline{P_1}+\underline{P_2}$, $2P_5 = \underline{P_2}+P_3$, $2P_6 = P_3+P_4$, $\ldots$ Generalizando, se tiene: $\underline{2P_{n-2}} = P_{n-5}+P_{n-4}$, $\underline{2P_{n-1}} = P_{n-4}+P_{n-3}$, $\underline{2P_n} = P_{n-3}+\underline{P_{n-2}}$. Sumando las igualdades miembro a miembro y simplificando, quedan solamente los términos subrayados: $2P_{n-2}+2P_{n-1}+2P_n = P_0+2P_1+2P_2+P_{n-2}$. Para $n \to \infty$, $\lim P_n = \lim P_{n-1} = \lim P_{n-2}$. Por tanto: $5\lim P_n = P_0+2P_1+2P_2 = 2+i$. Luego: $\lim P_n = \frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$.

K 17- Sean $A = 4e^{\frac{\pi i}{2}}$ y $B = e^{\frac{\ln 8}{2}+\frac{\pi i}{4}}$. Hallar C tal que sea concíclico con OAB (O es el origen), y que $(OCAB) = -1$.

Solución: Operando: $A = 4i$, $B = e^{\ln\sqrt{8}} \bullet e^{\frac{\pi i}{4}} = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i) = 2+2i$. Sea: $C = a+bi$.

Luego: $(OCAB)=\dfrac{(OAB)}{(CAB)}=\dfrac{4i}{2+2i}\div\dfrac{4i-a-bi}{2+2i-a-bi}=-1$. De donde: $-8-a+3b=0$ y $8-3a-b=0$. Luego: $C=\dfrac{8}{5}+\dfrac{16}{5}i$.

K 18- Sean $A=2$, $B=i$, $C=1+2i$. Hallar el módulo y el argumento de D, de forma que A, B, C, D sean concíclicos, y que D equidiste de B y C.

Solución: Sea: $C=a+bi$. Por ser: $DB=DC$, se tiene: $|a+bi-i|=|a+bi-1-2i|$. Operando se obtiene: $a+b=2$. Por ser concíclicos A,B,C,D se tiene: $(2,i,1+2i,a+bi)=k$, siendo k número real. Por tanto: $\dfrac{1-2i}{2-a-bi}\div\dfrac{-1-i}{-a+i-bi}=k$. Operando se obtiene: $D=\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{3}i$. Su módulo es: $\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{25}{9}}=\dfrac{\sqrt{26}}{3}$. Su argumento es: $\arctan 5=1,3734\,\mathrm{rad}=78°41'24''24$.

K 19- Siendo A y B dos puntos dados, hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que: 1º) El módulo de $\dfrac{P-A}{P-B}$ sea constante. 2º) El argumento de $\dfrac{P-A}{P-B}$ sea constante.

Solución: Sea $P(x+yi)$. Tomando A como polo y B como $(1+0i)$, se tiene: $\overline{PA}=-x-yi$, $\overline{PB}=1-x-yi$. 1º) El módulo de $\dfrac{P-A}{P-B}$ es: $\left|\dfrac{z_P-z_A}{z_P-z_B}\right|=\dfrac{|-x-yi|}{|1-x-yi|}=k$. Operando se tiene: $(k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2-2k^2x+k^2=0$, luego el lugar geométrico es una circunferencia, llamada de Apolonio. 2º) El argumento de $\dfrac{P-A}{P-B}$ es: $\arg\dfrac{z_P-z_A}{z_P-z_B}=\arg\dfrac{-x-yi}{1-x-yi}$. Este argumento es igual a: $\arctan\dfrac{-y}{-x}-\arctan\dfrac{-y}{1-x}=\arctan\dfrac{\frac{y}{x}-\frac{-y}{1-x}}{1+\frac{y}{x}\cdot\frac{-y}{1-x}}=\arctan k$. De donde se tiene que: $\dfrac{\frac{y}{x}-\frac{-y}{1-x}}{1+\frac{y}{x}\cdot\frac{-y}{1-x}}=k$. Operando: $kx^2+ky^2-kx\pm y=0$. Luego el lugar geométrico es una circunferencia, llamada arco capaz (son dos arcos capaces).

K 20- Utilizando la fórmula de Moivre y el desarrollo de la potencia del binomio, deducir las expresiones de $\sin 7a$ y de $\cos 7a$ en función de $\sin a$ y de $\cos a$. Aplicar la fórmula obtenida, en el caso de $\sin a=\dfrac{1}{5}$, para obtener $\sin 7a$ con cinco cifras decimales sin calcular el valor de a.

Solución: $\cos 7\theta+i\sin 7\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^7=\cos^7\theta+\binom{7}{1}i\cos^6\theta\sin\theta-\binom{7}{2}\cos^5\theta\sin^2\theta-$ $-\binom{7}{3}i\cos^4\theta\sin^3\theta+\binom{7}{4}\cos^3\theta\sin^4\theta+\binom{7}{5}i\cos^2\theta\sin^5\theta-\binom{7}{6}\cos\theta\sin^6\theta-\binom{7}{7}i\sin^7\theta$. De donde la parte real es: $\cos 7\theta=\cos^7\theta-\binom{7}{2}\cos^5\theta\sin^2\theta+\binom{7}{4}\cos^3\theta\sin^4\theta-\binom{7}{6}\cos\theta\sin^6\theta$. Y la parte imaginaria: $\sin 7\theta=\binom{7}{1}\cos^6\theta\sin\theta-\binom{7}{3}\cos^4\theta\sin^3\theta+\binom{7}{5}\cos^2\theta\sin^5\theta-\binom{7}{7}\sin^7\theta$. Aplicación: $\sin 7a=7\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^6\frac{1}{5}-35\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^3+21\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^5-\left(\frac{1}{5}\right)^7=0,98702$.

K 21- Resolver la ecuación $z^5-1=0$ y aplicar el resultado para calcular los lados y apotemas de los pentágonos regulares inscritos en la circunferencia de radio 1.

Solución: $z=1^{\frac{1}{5}}=\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}$, para $k=0,1,2,3,4$. Siendo: $z_1=\cos 0+i\sin 0=1$, $z_2=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$. El lado del pentágono es: $|z_2-z_1|=\left|\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}-1\right|$, es decir: $\sqrt{\left(\cos\dfrac{2\pi}{5}-1\right)^2+\left(\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)^2}=\sqrt{2-2\cos 72°}=\dfrac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=1,17557$. El lado del pentágono regular estrellado es: $|z_3-z_1|=\left|\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}-1\right|$, es decir, operando: $\sqrt{2-2\cos 144°}=\dfrac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=1,90211$. La apotema del pentágono regular es: $\dfrac{1}{2}|z_1+z_2|=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+2\cos 72°}=\dfrac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}=0,80902$. La apotema del pentágono estrellado es: $\dfrac{1}{2}|z_1+z_3|=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+2\cos 144°}=\dfrac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}=0,30902$.

K 22- Sean $A=4+2i$ y $C=2+6i$, dos vértices opuestos de un cuadrado. Hallar los otros dos vértices y el ángulo (en radianes) que forman las diagonales con el eje.

Solución: El centro del cuadrado es: $3+4i$. Trasladando el origen al centro, el afijo de A es $1-2i$ y el de C, $-1+2i$. Por tanto, el afijo de B es $2+i$, y el de D, $-2-i$. Deshaciendo la traslación: $B=5+5i$, $D=1+3i$. Los ángulos pedidos vienen dados por: $\arctan\frac{-2}{1}=2,67795$ rad y $\arctan\frac{1}{2}=0,46365$ rad.

K 23- Calcular $(1+i)^5+(1-i)^5$, sin desarrollar los binomios.

Solución: Como los sumandos son imaginarios conjugados, su suma es el doble de la parte real de uno de ellos. Siendo: $1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{4}}$, $(1+i)^5=\left(\sqrt{2}\right)^5 e^{\frac{5\pi i}{4}}=4\sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)$, se tiene que: $(1+i)^5+(1-i)^5=2\bullet 4\sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-8$.

K 24- Hallar dos complejos sabiendo que su suma es $3+2i$, que la parte real de uno de ellos es 2, y que su cociente es real.

Solución: Los números pedidos son: $2+ai$, $1+(2-a)i$. Dividiéndolos se tiene: $\frac{1+(2-a)i}{2+ai}=\frac{[1+(2-a)i](2-ai)}{4-a^2}=\frac{2+2a-a^2+(4-3a)i}{4-a^2}$. Luego: $4-3a=0$. De donde: $a=\frac{4}{3}$. Los números pedidos son: $2+\frac{4}{3}i$, $1+\frac{2}{3}i$.

K 25- Hallar la ecuación de la curva transformada de la recta $x=\frac{1}{2}$, mediante $v=\frac{1}{1+z}$.

Solución: $x=\frac{z+\overline{z}}{2}$, $z=\frac{1}{v}-1=\frac{\overline{v}}{v\overline{v}}-1$, $\overline{z}=\frac{v}{v\overline{v}}-1$, $x=\frac{v+\overline{v}}{2v\overline{v}}-1=\frac{1}{2}$. Haciendo: $v=x+yi$, $\overline{v}=x-yi$, se tiene: $\frac{2x}{2(x^2+y^2)}-\frac{3}{2}=0$. De donde: $3x^2+3y^2-2x=0$.

K 26- Los afijos representativos de las raíces quintas de los complejos A y B, son vértices de dos pentágonos inscritos en dos circunferencias concéntricas de radios 2 y $\sqrt{2}$. El primero está orientado con un vértice sobre la parte positiva del eje del plano de Gauss. El segundo está desviado respecto al anterior en $9°$ en el sentido del giro de las agujas de un reloj. Determinar la suma S y el producto P, expresados en forma binómica, de los complejos A y B.

Solución: $A=2^5e^{\frac{5\pi i}{2}}=2^5 i$, $B=\left(\sqrt{2}\right)^5 e^{5\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{20}\right)i}=4(1+i)$. De donde se obtiene que: $S=A+B=4+36i$, $P=AB=128(-1+i)$.

K 27- Determinar z de forma que su afijo y los de sus tres raíces cúbicas sean vértices de un paralelogramo.

Solución: La ecuación cuyas raíces son los cuatro afijos del enunciado (z y sus tres raíces cúbicas) es: $(x-z)(x^3-z)=x^4-zx^3-zx+z^2=0$. El centro es $\frac{z}{4}$. Trasladando a este punto el origen: $\left(x+\frac{z}{4}\right)^4-z\left(x+\frac{z}{4}\right)^3-z\left(x+\frac{z}{4}\right)+z^2=x^4-\frac{3z^2}{8}x^2-\left(\frac{z^3}{8}+z\right)x-\frac{3}{256}z^4+\frac{3}{4}z^2=0$. Por tanto: $\frac{z^3}{8}+z=0$, $z=\pm 2\sqrt{2}\,i$.

K 28- Hallar las condiciones que debe cumplir z para que $\frac{z-1}{z+1}$ sea imaginario puro.

Solución: $\frac{z-1}{z+1}=\frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{(z+1)(\overline{z}+1)}=\frac{z\overline{z}-\overline{z}+z-1}{(z+1)(\overline{z}+1)}$. La parte real es: $\frac{z\overline{z}-1}{(z+1)(\overline{z}+1)}=0$. Luego la condición es: $z\overline{z}-1=(x+yi)(x-yi)-1=x^2+y^2-1=0$, por lo que z describe la circunferencia de centro el origen y radio unidad.

K 29- Dados $A=\left(1+\frac{zy}{2}\right)V+z\left(1+\frac{zy}{6}\right)W$, $B=\left(1+\frac{zy}{2}\right)W+y\left(1+\frac{zy}{6}\right)V$, calcular sus valores teniendo en cuenta los siguientes datos: $z=50+180i$, $y=0,001i$, $|V|=127.000$, $\arg V=0$, $|W|=300$, $\arg W=\arcsin(-0,6)$.

Solución: $zy=-0,18+0,05i$, $V=127.000$, $W=\pm 240-180i$, $A=158.353+36.719i$, o bien:

$A = 135.793 - 47.289i$; $B = 221,841\widehat{6} - 34,61i$, o bien: $B = -214,958\widehat{3} - 46,61i$.

K 30- Dado $W = \dfrac{9}{(3+i)z+(3+2i)}$, hallar la transformada de $(x-4)^2 + y^2 = 4$.

Solución: Teniendo en cuenta que: $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2}$, $\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2} - 4\right)^2 + \left(\dfrac{z-\overline{z}}{2}\right)^2 = 4$. Operando: $(z-4)(\overline{z}-4) = 4$, $z(W) = \dfrac{\frac{9}{W} - 3 - 2i}{3+i}$, $\overline{z}(W) = \dfrac{\frac{9}{\overline{W}} - 3 + 2i}{3-i}$. Sustituyendo estos valores, se tiene: $\left(\dfrac{\frac{9}{W} - 3 - 2i}{3+i} - 4\right)\left(\dfrac{\frac{9}{\overline{W}} - 3 + 2i}{3-i} - 4\right) = 4$. Como $W\overline{W} = x^2 + y^2$, se tiene: $(9 - 15x + 6y)^2 + (6x + 15y)^2 = 40(x^2 + y^2)$. Luego: $221(x^2 + y^2) - 270x + 108y + 81 = 0$.

K 31- Siendo $Z = \cos z$, determinar el recinto A que describe z cuando Z describe el recinto rectangular $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, siendo $z = x + yi$. Calcular el área del recinto A.

Solución: $Z = \cos(x+yi) = \cos x \cdot \cos yi - \sin x \cdot \sin yi = \cos x \cdot \cosh y - \sin x \sinh y = X + Yi$, $X = \cos x \cosh y$, $Y = -\sin x \sinh y$. Para $x = a$, $X = \cos a \cosh y$, $Y = -\sin a \sinh y$. Luego: $\dfrac{X^2}{\cos^2 a} - \dfrac{Y^2}{\sin^2 a} = 1$. De forma similar, para $x = b$, $\dfrac{X^2}{\cos^2 b} - \dfrac{Y^2}{\sin^2 b} = 1$. Para $y = c$, se tiene que: $X = \cos x \cosh c$, $Y = -\sin x \sinh c$. Luego: $\dfrac{X^2}{\cosh^2 c} + \dfrac{Y^2}{\sinh^2 c} = 1$. Para $y = d$, se obtiene: $\dfrac{X^2}{\cosh^2 d} + \dfrac{Y^2}{\sinh^2 d} = 1$. Luego el recinto A está determinado por las dos hipérbolas y las dos elipses calculadas. Como estas cónicas son homofocales, el área del recinto viene dada por: $(a-b)(\sinh 2d - \sinh 2c) - (c-d)(\sin 2b - \sin 2a)$.

K 32- La ecuación $\tan z = z$, ¿admite raíces imaginarias de la forma $a + bi$?

Solución: $\tan(x+yi) = \dfrac{\sin(x+yi)}{\cos(x+yi)} = \dfrac{\sin 2x + \sin(2yi)}{\cos 2x + \cos(2yi)} = \dfrac{\sin 2x + \frac{i}{2}(e^{2y} - e^{-2y})}{\cos 2x + \frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y})}$. Por tanto: $x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + \frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y})}$, $y = \dfrac{\frac{1}{2}(e^{2y} - e^{-2y})}{\cos 2x + \frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y})}$. Dividiendo entre sí ambas igualdades se tiene: $\dfrac{\sin 2x}{2x} = \dfrac{e^{2y} - e^{-2y}}{4y}$ [**A**]. Ahora bien: $\dfrac{e^{2y} - e^{-2y}}{4y} = 1 + \dfrac{(2y)^2}{3!} + \dfrac{(2y)^4}{5!} + \ldots > 1$, salvo para $y = 0$. Por tanto [**A**] es imposible, salvo que $x = 0$, o que $y = 0$.

K 33- Calcular $\log\left(-\sqrt{15} + i\sqrt{5}\right)$. La parte real se calculará con un error menor que $0,01$ mediante el desarrollo en fracción continua.

Solución: Para facilitar los cálculos se pasa de logaritmos decimales a neperianos: $\log\left(-\sqrt{15} + i\sqrt{5}\right) = \dfrac{\ln\left(-\sqrt{15} + i\sqrt{5}\right)}{\ln 10}$. Siendo: $-\sqrt{15} + i\sqrt{5} = \rho e^{\theta i} = 2\sqrt{5}\, e^{\frac{5\pi i}{6}}$, se tiene: $\dfrac{\ln\left(-\sqrt{15} + i\sqrt{5}\right)}{\ln 10} = \dfrac{\ln 2\sqrt{5} + \frac{5\pi i}{6}}{\ln 10} = \dfrac{\ln 2\sqrt{5}}{\ln 10} + \dfrac{5\pi i}{6 \ln 10} = \log 2\sqrt{5} + \dfrac{5\pi i}{6 \ln 10} =$
$= 0,6505 + 2,618i$. La parte real es: $\log 2\sqrt{5}$. Para desarrollarla en fracción continua se tiene: $x_0 = \log 2\sqrt{5}$, $10^{x_0} = 2\sqrt{5}$, $x_0 = \underline{0} + \dfrac{1}{x_1}$, $10^{\frac{1}{x_1}} = 2\sqrt{5}$, $\left(2\sqrt{5}\right)^{x_1} = 10$, $x_1 = \underline{1} + \dfrac{1}{x_2}$, $10 = 2\sqrt{5}\,(2\sqrt{5})^{\frac{1}{x_2}}$, $(\sqrt{5})^{x_2} = 2\sqrt{5}$, $x_2 = \underline{1} + \dfrac{1}{x_3}$, $\sqrt{5}\,(\sqrt{5})^{\frac{1}{x_3}} = 2\sqrt{5}$, $2^{x_3} = \sqrt{5}$, $x_3 = \underline{1} + \dfrac{1}{x_4}$, $2 \cdot 2^{\frac{1}{x_4}} = \sqrt{5}$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{x_4} = 2$, $x_4 = \underline{6} + \dfrac{1}{x_5}$. Luego: $\log 2\sqrt{5} = (0, 1, 1, 1, 6, \ldots)$. Las reducidas son: $R_1 = 0$, $R_2 = 1$, $R_3 = \dfrac{1}{2}$, $R_4 = \dfrac{2}{3}$, $R_5 = \dfrac{13}{20}$, con error $< \dfrac{1}{20^2} = \dfrac{1}{400}$.

K 34- Se consideran los polinomios A, B, C, cuya variable es z (los exponentes de z son enteros) y cuyos coeficientes, reales o complejos, son primos dos a dos, y tales que $A^2 + B^2 \equiv C^2$. 1º)

Demostrar que los polinomios $C+B$ y $C-B$ son cuadrados perfectos y, en consecuencia, dar la forma general de A, B, C. 2º) Determinar A y B en el caso en que $C \equiv z^2+a^2$. 3º) Demostrar que si a es real distinto de cero, y A y B son de coeficientes reales, se cumple que: $A \equiv (z^2-a^2)\sin\alpha + 2az\cos\alpha$, $B \equiv (z^2-a^2)\cos(\alpha+k\pi) - 2az\sin(\alpha+k\pi)$, siendo α una constante cualquiera y k un entero cualquiera.

Solución: 1º) $A^2 \equiv C^2-B^2 = (C+B)(C-B)$. Como B y C no tienen ninguna raíz común por ser primos dos a dos sus coeficientes, es necesario que $C+B$ y $C-B$ sean cuadrados perfectos, para que su producto (A^2) lo sea. Por tanto: $C+B = (z-z_1)^2(z-z_2)^2\ldots(z-z_n)^2 = \Pi(z-z_i)^2$, $C-B = (z-z'_1)^2(z-z'_2)^2\ldots(z-z'_n)^2 = \Pi(z-z'_i)^2$. Luego: $A = \Pi(z-z_i)\cdot\Pi(z-z'_i)$, con $z_i \neq z'_i$, $C = \frac{1}{2}[\Pi(z-z_i)^2 + \Pi(z-z'_i)^2]$, $B = \frac{1}{2}[\Pi(z-z_i)^2 - \Pi(z-z'_i)^2]$. 2º) Para el caso $C \equiv z^2+a^2$, se tiene: $B = \frac{1}{2}\left[(z-a)^2-(z+a)^2\right] = -2az$, $A = (z-a)(z+a) = z^2-a^2$. 3º) Para este caso se tiene que: $C+B = [1+\cos(\alpha+k\pi)]z^2 - 2a\sin(\alpha+k\pi)z + a^2[1-\cos(\alpha+k\pi)]$, que es igual a: $\left[z\sqrt{1+\cos(\alpha+k\pi)} - a\sqrt{1-\cos(\alpha+k\pi)}\,\right]^2$. Y procediendo de la misma forma con $C-B$, se tiene que: $C-B = [1-\cos(\alpha+k\pi)]z^2 + 2a\sin(\alpha+k\pi)z + a^2[1+\cos(\alpha+k\pi)]$, que es igual a: $\left[z\sqrt{1-\cos(\alpha+k\pi)} + a\sqrt{1+\cos(\alpha+k\pi)}\,\right]^2$. De todo ello se deduce que, como: $A^2 = C^2-B^2 = (C+B)(C-B)$, operando se tiene que: $A = \sqrt{C+B}\cdot\sqrt{C-B}$, es decir: $A = \left[z\sqrt{1+\cos(\alpha+k\pi)} - a\sqrt{1-\cos(\alpha+k\pi)}\,\right]\left[z\sqrt{1-\cos(\alpha+k\pi)} + a\sqrt{1+\cos(\alpha+k\pi)}\,\right] =$ $= (z^2-a^2)\sin\alpha + 2az\cos\alpha = \sin\alpha\left(z - a\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(z + a\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$. Paralelamente, se tiene que: $B \equiv (z^2-a^2)\cos(\alpha+k\pi) - 2az\sin(\alpha+k\pi)$.

K 35- Determinar una función analítica $W = U+Vi$ de la variable $z = x+yi$, de modo que se tenga $U^2+V^2 = f(x)$.

Solución: $W\overline{W} = (U+Vi)(U-Vi) = U^2+V^2 = f(x) = f(z+\overline{z})$. Si $W(z) = e^z$, $W(\overline{z}) = e^{\overline{z}}$, y por tanto: $W\overline{W} = WW(\overline{z}) = e^{z+\overline{z}} = e^{2x}$. Luego: $W = e^z$.

K 36- Calcular $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{z_i^3-1}{z_i^6+1}$, sabiendo que z_i son las raíces de $z^{3n}-z+1 = 0$.

Solución: Haciendo $z^3 = t$, se tiene: $\frac{z^3-1}{z^6+1} = \frac{t-1}{t^2+1} = \frac{\frac{1-i}{2}}{t+i} + \frac{\frac{1+i}{2}}{t-i}$. Luego sustituyendo: $\sum\frac{z^3-1}{z^6+1} = \frac{1-i}{2}\sum\frac{1}{t+i} + \frac{1+i}{2}\sum\frac{1}{t-i}$. La ecuación dada queda: $t^n - t^{\frac{1}{3}} + 1 = 0$. De donde: $(t^n+1)^3 = t$, es decir: $t^{3n}+3t^{2n}+3t^n-t+1 = 0$. Haciendo: $t+i = u$, se tiene: $f(u) = (u-i)^{3n}+3(u-i)^{2n}+3(u-i)^n-u+i+1 = u^{3n}-\binom{3n}{1}u^{3n-1}i+\ldots$ Luego derivando se tiene: $f'(u) = 3nu^{3n-1}-\binom{3n}{1}(3n-1)iu^{3n-2}+\ldots$ Se obtiene el cociente: $\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{3n}{u}+\frac{3ni}{u^2}+\ldots$ Por tanto: $\sum\frac{1}{t+i} = \sum\frac{1}{u} = 3ni$. Procediendo de la misma forma con $t-i = v$, se tiene: $\frac{f'(v)}{f(v)} = \frac{3n}{v}-\frac{3ni}{v^2}+\ldots$ Por tanto: $\sum\frac{1}{t-i} = \sum\frac{1}{v} = -3ni$. Luego se deduce que la suma pedida es: $\frac{1-i}{2}\sum\frac{1}{u}+\frac{1+i}{2}\sum\frac{1}{v} = 3n$.

K 37- Demostrar que siendo z una raíz n-sima de la unidad, $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1} = 0$.

Solución: $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1} = \frac{z^n-1}{z-1} = \frac{0}{z-1} = 0$.

K 38- Hallar un polinomio que tenga por raíces $\tan\frac{\pi}{7}$, $\tan\frac{2\pi}{7},\ldots,\tan\frac{6\pi}{7}$, y cuyos coeficientes sean enteros.

Solución: Sea la función $F(x) = \left(1+\frac{xi}{n}\right)^n - \left(1-\frac{xi}{n}\right)^n = 0$. Operando se obtiene que: $\left(\frac{n+xi}{n-xi}\right)^n = 1$. Haciendo: $z = \frac{n+xi}{n-xi}$, $x = \frac{n(z-1)}{i(z+1)}$. Y como: $z^n = 1 = e^{2k\pi i}$, $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$. Por tanto se tiene que: $\frac{n(e^{\frac{2k\pi i}{n}}-1)}{i(e^{\frac{2k\pi i}{n}}+1)} = n\tan\frac{k\pi}{n} = ny$, siendo $y = \tan\frac{k\pi}{n}$. Luego se deduce que:

$F(x) = (1+yi)^n - (1-yi)^n = 2\binom{n}{1}yi + 2\binom{n}{3}y^3i^3 + \ldots + 2\binom{n}{n}y^ni^n = 0$ (siendo n un número impar). Dividiendo por $2yi$ se tiene: $\binom{n}{1} - \binom{n}{3}y^2 + \binom{n}{5}y^4 - \ldots \pm y^{n-1} = 0$. Para $n = 7$, se tiene que: $y^6 - \binom{7}{5}y^4 + \binom{7}{3}y^3 - \binom{7}{1} = y^6 - 21y^4 + 35y^3 - 7 = 0$, que es el polinomio pedido.

Nota: $\tan\theta = \dfrac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{i(e^{\theta i} + e^{-\theta i})} = \dfrac{e^{2\theta i} - 1}{i(e^{2\theta i} + 1)}$.

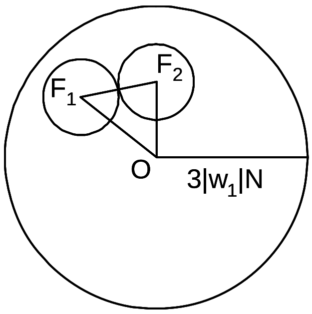
K 39- Hallar un polinomio de coeficientes enteros que tenga por raíces: $\tan\dfrac{2\pi}{2m+1}$, $\tan\dfrac{4\pi}{2m+1}, \ldots,$ $\tan\dfrac{2m\pi}{2m+1}$. Calcular $P = \left(\tan\dfrac{2\pi}{2m+1} \bullet \tan\dfrac{4\pi}{2m+1} \bullet \ldots \bullet \tan\dfrac{2m\pi}{2m+1}\right)^2$.

Solución (Ver K 38): $\binom{n}{1} - \binom{n}{3}y^2 + \binom{n}{5}y^4 - \ldots \pm y^{n-1} = 0$, siendo: $y = \tan\dfrac{k\pi}{n}$, $n = 2m+1$. Como: $\tan\dfrac{k\pi}{n} = -\tan\dfrac{-k\pi}{n}$, se tiene: $y_h = -y_{-h}$. Por tanto: $(y - y_h)(y - y_{-h}) = y^2 - y_h^2$. Luego el producto pedido es: $P = \binom{n}{1} = n = 2m+1$.

K 40- Dados los números complejos $w_1,\ w_2,\ w_3,$ distintos de cero, se forma $F = w_1x + w_2y + w_3z$. Hallar la cota inferior del módulo de F, cuando $x,\ y,\ z,$ toman valores enteros cualesquiera excepto $x = y = z = 0$.

Solución: Considerando finito el campo de variación de las variables consideradas: $x,\ y,\ z,$ es decir: $[-N,\ -(N-1),\ -(N-2)\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ldots,\ (N-2),\ (N-1),\ N]$, como se ha definido la función $F = w_1x + w_2y + w_3z$, sólo se pueden obtener $\left[(2N+1)^3 - 1\right]$ complejos distintos, teniendo todos ellos sus módulos acotados. En efecto, suponiendo: $|w_1| \geq |w_2| \geq |w_3|$, se tiene que: $|F| = |w_1x + w_2y + w_3z| \leq |w_1||x| \pm |w_2||y| \pm |w_3||z| \leq |w_1|N + |w_2|N + |w_3|N \leq 3|w_1|N$. Los afijos de estos puntos están dentro del círculo de radio $R = 3|w_1|N$. La diferencia entre dos complejos del conjunto, es otro complejo del conjunto. En efecto: $F_1 - F_2 = w_1(x_1 - x_2) + \ldots = w_1x_3 + \ldots$ Sea 2δ la cota inferior pedida. Al ser $|F_i| \geq 2\delta$, los $\left[(2N+1)^3 - 1\right]$ afijos de F, distarán entre sí una distancia igual o mayor que 2δ. Trazando con centro en cada uno de los afijos, un círculo de radio $r = \delta$, se tiene una serie de círculos que no se solapan, estando todos ellos contenidos en el círculo de centro O y radio $R = 3|w_1|N + \delta$. El área de este círculo es mayor que la suma de las áreas de aquéllos. Por tanto: $\pi\delta^2\left[(2N+1)^3 - 1\right] \leq [3|w_1|N + \delta]^2$, $\delta < \dfrac{3|w_1|N}{\sqrt{(2N+1)^3 - 1} - 1}$. Pasando al límite, se tiene:

$\lim\limits_{N\to\infty} 2\delta = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{2 \bullet 3|w_1|N}{\sqrt{(2N+1)^3 - 1} - 1} = 0$. Luego la cota pedida es cero.



Sección L - LÍMITES - SUCESIONES

L 1- Descomponer en fracciones simples $\dfrac{nx^{n-1}}{x^n-1}$ y calcular el límite de $\dfrac{1}{x^n-1}-\dfrac{a}{x-1}$ cuando $x \to 1$, siendo a el coeficiente de $\dfrac{1}{x-1}$ en la citada descomposición.

Solución: Las raíces de $x^n - 1 = 0$, son $e^{\frac{2k\pi}{n}}$ para valores de k desde cero hasta $n-1$. Luego: $x^n-1 = (x-e^0)(x-e^{\frac{2\pi}{n}})(x-e^{\frac{4\pi}{n}})\ldots(x-e^{\frac{2(n-2)\pi}{n}})(x-e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}})$ Tomando logaritmos: $\ln(x^n-1) = \ln(x-1)+\ln(x-e^{\frac{2\pi}{n}})+\ln(x-e^{\frac{4\pi}{n}})+\ldots$ Derivando, se tiene la descomposición pedida en fracciones simples: $\dfrac{nx^{n-1}}{x^n-1} = \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-e^{\frac{2\pi}{n}}}+\dfrac{1}{x-e^{\frac{4\pi}{n}}}+\ldots$ El coeficiente de $\dfrac{1}{x-1}$ es la unidad, luego $a=1$. Por tanto, el límite pedido es: $\lim\limits_{x=1}\left(\dfrac{1}{x^n-1}-\dfrac{1}{x-1}\right) =$ $=\lim\limits_{x=1}\dfrac{x-1-x^n+1}{x^{n+1}-x^n-x+1} = \lim\limits_{x=1}\dfrac{1-nx^{n-1}}{(n+1)x^n-nx^{n-1}-1} = \dfrac{1-n}{0}$. Para $n>1$, $\lim = -\infty$. Para $n<1$, $\lim = +\infty$. Para $n=1$, $\lim = \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-1} = 0$.

L 2- Calcular $U = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

Solución: Sea: $V = \dfrac{1}{n^2+n}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n} = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2+n} = \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n)} = \dfrac{1}{2}$.

Sea: $W = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+1}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \dfrac{1}{2}$.

Como: $V<U<W$, $\lim V \le \lim U \le \lim W$. Luego: $\lim U = \dfrac{1}{2}$.

L 3- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+1^2\sqrt{1}}{n^4+3\cdot 1^3}+\dfrac{2^3+2^2\sqrt{2}}{n^4+3\cdot 2^3}+\ldots+\dfrac{n^3+n^2\sqrt{n}}{n^4+3\cdot n^3}\right)$.

Solución: Aplicando Stolz se tiene que: $\lim\dfrac{A_n}{B_n} = \lim\dfrac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n^2\sqrt{n}}{n^4+3n^3-(n-1)^4-3(n-1)^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{4n^3} = \dfrac{1}{4}$.

L 4- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+2n)^{\frac{1}{2}}-(n^5+3n^4)^{\frac{1}{5}}}{(n^3+3n^2)^{\frac{1}{3}}-(n^4+2n)^{\frac{1}{4}}}$.

Solución: $(n^2+2n)^{\frac{1}{2}} = n(1+\dfrac{2}{n})^{\frac{1}{2}} = n(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{n}+\ldots) = n+1+\ldots$

$(n^5+3n^4)^{\frac{1}{5}} = n(1+\dfrac{3}{n})^{\frac{1}{5}} = n(1+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{3}{n}+\ldots) = n+\dfrac{3}{5}+\ldots$

$(n^3+3n^2)^{\frac{1}{3}} = n(1+\dfrac{3}{n})^{\frac{1}{3}} = n(1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{n}+\ldots) = n+1+\ldots$

$(n^4+2n)^{\frac{1}{4}} = n(1+\dfrac{2}{n^3})^{\frac{1}{4}} = n(1+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{n^3}+\ldots) = n+\dfrac{1}{2n^2}+\ldots$

Luego el límite pedido es: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1-n-\frac{3}{5}}{n+1-n} = \dfrac{2}{5}$.

L 5- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^{10}+9n^9)^{\frac{1}{5}}-(n^{12}+6n^2)^{\frac{1}{6}}}{(n^{14}+3n^{13})^{\frac{1}{7}}-(n^{16}+2n^{15})^{\frac{1}{8}}}$.

Solución: $(n^{10}+9n^9)^{\frac{1}{5}} = n^2(1+\dfrac{9}{n})^{\frac{1}{5}} = n^2(1+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{9}{n}+\ldots) = n^2+\dfrac{9n}{5}+\ldots,$

$(n^{12}+6n^2)^{\frac{1}{6}} = n^2(1+\dfrac{6}{n^{10}})^{\frac{1}{6}} = n^2(1+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{6}{n^{10}}+\ldots) = n^2+\ldots,$

$(n^{14}+3n^{13})^{\frac{1}{7}} = n^2(1+\dfrac{3}{n})^{\frac{1}{7}} = n^2(1+\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{3}{n}+\ldots) = n^2+\dfrac{3n}{7}+\ldots,$

$(n^{16}+2n^{15})^{\frac{1}{8}} = n^2(1+\frac{2}{n})^{\frac{1}{8}} = n^2(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{n}+\ldots) = n^2+\frac{n}{4}+\ldots,$

Luego el límite pedido es: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\frac{9n}{5}+\ldots-n^2-\ldots}{n^2+\frac{3n}{7}+\ldots-n^2-\frac{n}{4}-\ldots} = \dfrac{\frac{9}{5}}{\frac{3}{7}-\frac{1}{4}} = \dfrac{252}{25} = 10\frac{2}{25}.$

L 6- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n\sin\frac{1}{n}}{(n^4+3)^{\frac{1}{4}}-(n^5+n)^{\frac{1}{5}}}.$

Solución: $1-n\sin\frac{1}{n} = 1-n(\frac{1}{n}-\frac{1}{3!n^3}+\ldots) = \frac{1}{6n^2}-\ldots.$

$(n^4+3)^{\frac{1}{4}} = n(1+\frac{3}{n^4})^{\frac{1}{4}} = n(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{n^4}+\ldots) = n+\frac{3}{4n^3}+\ldots$

$(n^5+n)^{\frac{1}{5}} = n(1+\frac{1}{n^4})^{\frac{1}{5}} = n(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n^4}+\ldots) = n+\frac{1}{5n^3}+\ldots$

Luego el límite pedido es: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{6n^2}}{n+\frac{3}{4n^3}-n-\frac{1}{5n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n}{6}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{5}} \to \infty.$

L 7- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^3+3n^2)^{\frac{1}{3}}-(n^4+n^3)^{\frac{1}{4}}}{(n^4+3n^3)^{\frac{1}{4}}-(n^5+2n^4)^{\frac{1}{5}}}.$

Solución: $(n^3+3n^2)^{\frac{1}{3}} = n(1+\frac{3}{n})^{\frac{1}{3}} = n(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{n}+\ldots) = n+1+\ldots$

$(n^4+n^3)^{\frac{1}{4}} = n(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{4}} = n(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}+\ldots) = n+\frac{1}{4}+\ldots$

$(n^4+3n^3)^{\frac{1}{4}} = n(1+\frac{3}{n})^{\frac{1}{4}} = n(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{n}+\ldots) = n+\frac{3}{4}+\ldots$

$(n^5+2n^4)^{\frac{1}{5}} = n(1+\frac{2}{n})^{\frac{1}{5}} = n(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{n}+\ldots) = n+\frac{2}{5}+\ldots$

Luego el límite pedido es: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1-n-\frac{1}{4}}{n+\frac{3}{4}-n-\frac{2}{5}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}} = \dfrac{15}{7} = 2\frac{1}{7}.$

L 8- Demostrar que el conjunto de todas las rectas de un plano es coordinable con el conjunto continuo.

Solución: Una recta situada en un plano se define por dos parámetros, A y B. Supongamos que los parámetros sean, por ejemplo, dos puntos del plano situados dentro del intervalo $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, cuyas coordenadas son: $A(0,aeim\ldots;0,bfjn\ldots)$, $B(0,cgk\tilde{n}\ldots;0,dhlo\ldots)$. Se puede establecer una correspondencia como la siguiente, entre los cuatro números dados y el número N del continuo: $N = 0,abcdefghijklmn\tilde{n}o\ldots$, en el que las cifras 1ª, 5ª, 9ª...corresponden a la abscisa de A, las 2ª, 6ª, 10ª,.a la ordenada de A, las 3ª, 7ª, 11ª,.a la abscisa de B, y las 4ª, 8ª, 12ª,.a la ordenada de B. Luego a toda pareja de puntos del intervalo definido le corresponde un número del continuo. Se puede corresponder el intervalo definido con el intervalo $(0,+\infty)$, o con el intervalo $(-\infty,+\infty)$. En resumen, el conjunto de las rectas de un plano tiene la potencia del continuo.

L 9- Se consideran todos los números menores que la unidad, en cuyas cifras decimales sólo se emplean los dígitos 2, 5, 7. Hallar: 1º) Los extremos del conjunto así definido. 2º) Algún punto de acumulación. 3º) Límites superior e inferior de oscilación.

Solución: El conjunto tiene un extremo inferior accesible (mínimo): $0,2$. Tiene un extremo superior inaccesible: $0,7777\ldots = \frac{7}{9}$. Son puntos de acumulación: $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{9}$, etc. Límite superior de oscilación: $\frac{7}{9}$. Límite inferior de oscilación: $\frac{2}{9}$.

L 10- Dando valores a n desde 1 a ∞, en la expresión $U_n = (-1)^n+\frac{2}{n}$, se obtiene un conjunto infinito del que se pide: 1º) ¿Está acotado? 2º) Extremos. 3º) Máximos y mínimos. 4º) Puntos de acumulación. 5º) Límites superior e inferior de oscilación.

Solución: 1º) $U_n = (-1)^n + \frac{2}{n}$, $n = \frac{2}{U_n \pm 1}$. Luego está acotado. 2º) $E \to 2$, $e \to -1$. 3º) Máximo: 2. Mínimo: no tiene, pues e es inaccesible. 4º) Puntos de acumulación: 1 y -1. 5º) Límite superior de oscilación: 1. Límite inferior de oscilación: -1.

L 11- Estudiar la sucesión: $S_n = \sum_1^n \left[2(-1)^n - \frac{1}{n(n+1)}\right]$.

Solución: $S_1 = -2 - \frac{1}{1 \bullet 2}$, $S_2 = 0 - (\frac{1}{1 \bullet 2} + \frac{1}{2 \bullet 3})$, $S_3 = -2 - (\frac{1}{1 \bullet 2} + \frac{1}{2 \bullet 3} + \frac{1}{3 \bullet 4})$, $S_{2n} = 0 - (\frac{1}{1 \bullet 2} + \frac{1}{2 \bullet 3} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)})$, $S_{2n+1} = -2 - (\frac{1}{1 \bullet 2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)})$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$, $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_1^\infty \frac{1}{n} - \sum_1^\infty \frac{1}{n+1} = 1$.
La sucesión es oscilante, tendiendo a: $0 - 1 = -1$, y a: $-2 - 1 = -3$.

L 12- Demostrar que toda sucesión en la que cada término U_n es interior al segmento (U_{n-1}, U_{n-2}) definido por los dos términos anteriores, y además $U_n - U_{n-1} \to 0$, tiene límite.

Solución: Por las condiciones definidas, los términos pares $U_2, U_4, \ldots$ están agrupados por una parte, y los impares $U_1, U_3, \ldots$ por otra. Suponiendo $U_2 > U_1$, los términos $U_1, U_3, \ldots$ forman una sucesión monótona creciente (U_{2n+1}), ya que $U_1 \leq U_3 \leq U_5 \leq \ldots$, mientras que los términos $U_2, U_4, \ldots$ forman una sucesión monótona decreciente (U_{2n}), por ser $U_2 \geq U_4 \geq U_6 \geq \ldots$ La sucesión U_{2n+1} tiene límite pues está acotada superiormente por cualquier valor de la sucesión U_{2n}. Similarmente, la sucesión U_{2n} tiene límite al estar acotada inferiormente por cualquier valor de la sucesión U_{2n+1}. Al estar las dos sucesiones U_{2n} y U_{2n+1} contenidas en la sucesión dada U_n, de tener ésta límite, aquéllas tendrán dicho límite. Siendo: $\lim U_{2n+1} = u'$ y $\lim U_{2n} = u''$, se tiene: $\underset{n>N_1}{|u' - U_{2n+1}| < \epsilon}$ y $\underset{n>N_2}{|u'' - U_{2n}| < \epsilon}$ y por definición: $\underset{n>N_3}{|U_{2n+1} - U_{2n}| < \epsilon}$. Las tres desigualdades se cumplen para N mayor que N_1, N_2, N_3, por lo que: $|u' - u''| < \epsilon$. Luego: $u' = u'' = \lim U_n$.

L 13- Demostrar que son equivalentes los infinitésimos $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ y $b_n = \frac{1}{n}$.

Solución: Siendo: $\frac{1}{n} = \epsilon$, $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\ln(1+\epsilon)}{\epsilon} = \lim \ln(1+\epsilon)^{\frac{1}{\epsilon}} = \ln e = 1$. Luego: $\ln(1+\epsilon) \equiv \epsilon$, es decir: $\ln(1 + \frac{1}{n}) \equiv \frac{1}{n}$ (el signo $\equiv$ significa equivalencia).

L 14- Demostrar que son equivalentes los infinitésimos $U_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$ y $V_n = \frac{1}{n}$.

Solución: $\frac{1}{n} = \epsilon$, $(e^\epsilon - 1) \equiv \ln(e^\epsilon + 1 - 1) = \ln e^\epsilon = \epsilon = \frac{1}{n}$. Luego: $U_n \equiv V_n$ (el signo $\equiv$ significa equivalencia).

L 15- Dados dos números positivos U_1 y U_2, se forma la sucesión U_1, U_2, $U_3 = \frac{U_2 + U_1}{2}, \ldots$, $U_n = \frac{U_{n-1} + U_{n-2}}{2}$. Demostrar que tiene límite y hallarlo.

Solución: Operando, la sucesión es: U_1, U_2, $(\frac{U_1}{2} + \frac{U_2}{2})$, $(\frac{U_1}{4} + \frac{3U_2}{4})$, $(\frac{3U_1}{8} + \frac{5U_2}{8})$, $(\frac{5U_1}{16} + \frac{11U_2}{16}), \ldots,$ $\left(\frac{\frac{2^n \pm 1}{3}}{2^n} U_1 + \frac{\frac{2(2^n \pm 1)}{3}}{2^n} U_2\right) = A_n + B_n$.
Luego: $\lim U_n = \lim(A_n + B_n) = \lim A_n + \lim B_n = A + B$ (por ser A_n y B_n convergentes).
$A = \lim A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n \pm 1}{3}}{2^n} U_1 = \frac{U_1}{3}$, $B = \lim B_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(2^n \pm 1)}{3}}{2^n} U_2 = \frac{2U_2}{3}$.
Luego: $\lim U_n = \frac{U_1 + 2U_2}{3}$.

L 16- Dados dos números positivos U_1 y U_2, se forma la sucesión de números U_1, U_2,, $U_3 = \sqrt{U_1 U_2}$, $U_4 = \sqrt{U_2 U_3}, \ldots$, $U_n = \sqrt{U_{n-2} U_{n-1}}$. Demostrar que tiene límite y hallarlo.

Solución: Se forma la sucesión: $a_n = \log U_n$, cuyos términos son: a_1, a_2, $a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \ldots,$

$a_n = \dfrac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$. Esta sucesión es la misma que la del problema L 15, por tanto tiene límite y éste es: $\dfrac{a_1 + 2a_2}{3}$. Luego la sucesión dada cuyos términos son: antilog(a_n), tiene límite, y éste es: antilog$\dfrac{a_1 + 2a_2}{3} = U_1^{\frac{1}{3}} \cdot U_2^{\frac{2}{3}}$.

L 17- Hallar el $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - \sqrt{x^2 - x})$.

Solución: $\sqrt{x^2 - 5x + 6} - \sqrt{x^2 - x} = x\left[1 - \left(\dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} - x\left[1 - \dfrac{1}{x}\right]^{\frac{1}{2}} =$

$$= x\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}\right) + \binom{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}\right)^2 + \ldots\right] - x\left[1 - \frac{1}{2x} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{x^2} + \ldots\right] =$$

$$= x - \frac{5}{2} + \frac{3}{x} + \ldots - x + \frac{1}{2} - \binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{x} + \ldots$$

El límite pedido es: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{x} + \ldots - x + \dfrac{1}{2} - \binom{\frac{1}{2}}{2}\dfrac{1}{x} + \ldots\right] = -2.$

L 18- Calcular el verdadero valor de $E = \dfrac{2a - [4(a^3 + b^3)]^{\frac{1}{3}}}{[4(a^2 + b^2)]^{\frac{1}{3}} - 2b}$ para $a = b$.

Solución: Para $a = b$, el numerador y el denominador son nulos. Derivando el numerador y el denominador respecto a a, se tiene: $E = \lim\limits_{a=b} \dfrac{2 - 4^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}(a^3 + b^3)^{\frac{-2}{3}} 3a^2}{4^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}(a^3 + b^3)^{\frac{-2}{3}} 3a^2} = \dfrac{2-1}{1} = 1.$

L 19- Hallar el verdadero valor de $E = \dfrac{(x^2 - ax)^{\frac{1}{3}} + (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{3}} + (x^3 - ax^2)^{\frac{1}{2}}}$ para $x = a$.

Solución: Multiplicando numerador y denominador por $(x - a)^{\frac{-1}{3}}$, se tiene que: $E = \dfrac{x^{\frac{1}{3}} + (x + a)^{\frac{1}{2}}(x - a)^{\frac{1}{6}}}{(x + a)^{\frac{1}{3}} + x(x - a)^{\frac{1}{6}}}$. Sustituyendo x por a se tiene: $E = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}$.

L 20- Hallar $E = \lim\limits_{x\to\infty}\left[(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}} + (4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - 3x\right]$.

Solución: $(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}} = x\left[1 + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$

$$= x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \binom{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots\right] = x + \frac{1}{2} + \epsilon.$$

$$(4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = 2x\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2x\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4x^2} + \ldots\right) = 2x + \epsilon.$$

Luego, $E = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x + \dfrac{1}{2} + 2x - 3x\right) = \dfrac{1}{2}.$

L 21- Hallar el límite de $E = (x^2 + 2x - 1)^{\frac{1}{2}} + (4x^2 - 7x + 5)^{\frac{1}{2}} - (9x^2 + 3x - 6)^{\frac{1}{2}}$, para $x \to \infty$.

Solución: $(x^2 + 2x - 1)^{\frac{1}{2}} = x\left[1 + \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = x\left[1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) - \ldots\right] = x + 1 + \epsilon.$

$$(4x^2 - 7x + 5)^{\frac{1}{2}} = 2x\left[1 + \left(\frac{-7}{4x} + \frac{5}{4x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 2x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{-7}{4x} + \frac{5}{4x^2}\right) + \ldots\right] = 2x - \frac{7}{4} + \epsilon.$$

$$(9x^2 + 3x - 6)^{\frac{1}{2}} = 3x\left[1 + \left(\frac{1}{3x} - \frac{2}{3x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = 3x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3x} - \frac{2}{3x^2}\right) + \ldots\right] = 3x + \frac{1}{2} + \epsilon.$$

$$\lim_{x\to\infty} E = \lim_{x\to\infty} \left(x + 1 + 2x - \frac{7}{4} - 3x - \frac{1}{2} + \epsilon\right) = \frac{-5}{4}.$$

L 22- Hallar el verdadero valor para $x = 0$, de $\frac{dE}{dx}$, siendo $E = \left[\frac{x^2\cos x}{(x+1)\sin^2 x}\right]$.

Solución: $E = \dfrac{x^2(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots)}{(x+1)(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots)^2} = \dfrac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \ldots}{(x+1)(x^2 - \frac{x^4}{3} + \ldots)} = \dfrac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \ldots}{x^2 + x^3 + \ldots} =$

$= 1 - x - \frac{3}{2}x^2 + \ldots$ Luego: $\frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx}(1 - x - \frac{3}{2}x^2 + \ldots) = -1 - 3x + \ldots$

Por tanto: $\lim_{x=0} \frac{dE}{dx} = \lim_{x=0} (-1 - 3x) = -1.$

L 23- Hallar $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\ln n}$.

Solución: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln n}(n^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{\ln n} \cdot \dfrac{\ln n}{n}\right) = 1.$

Nota: $(n^{\frac{1}{n}} - 1)$ y $\frac{\ln n}{n}$ son infinitésimos equivalentes cuando $n \to \infty$.

L 24- Hallar $\lim_{n\to\infty} \left[\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n}{n!}\right]^{\frac{1}{n}}$.

Solución: $\lim_{n\to\infty} \left[\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n}{n!}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\dfrac{(2n)!}{n!n!}\right]^{\frac{1}{n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2\pi}}{n^{2n+1} \cdot e^{-2n} \cdot 2\pi}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2^{2n}}{n^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{n}} = 4.$$

L 25- Hallar $\lim_{n\to\infty} \left[(n^3 + n^2 - 1)^{\frac{1}{3}} - (n^3 - n^2 + 1)^{\frac{1}{3}}\right]$.

Solución: $\lim_{n\to\infty} \left[(n^3 + n^2 - 1)^{\frac{1}{3}} - (n^3 - n^2 + 1)^{\frac{1}{3}}\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[n\left(1 + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3})\right)^{\frac{1}{3}} - n\left(1 + (-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})\right)^{\frac{1}{3}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[n\left(1 + \frac{1}{3}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}) + \ldots\right) - n\left(1 + \frac{1}{3}(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) + \ldots\right)\right] = \frac{2}{3}.$$

L 26- Hallar $\lim_{n\to\infty} \left[n - (n^2 - an)^{\frac{1}{2}}\right]$.

Solución: $\lim_{n\to\infty} \left[n - (n^2 - an)^{\frac{1}{2}}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[n - n\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[n - n\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a}{n} + \ldots\right)\right] = \frac{a}{2}.$$

L 27- Hallar $\lim_{x\to 0} (\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 bx}}$.

Solución: Siendo de la forma 1^∞, $\lim_{x\to 0} (\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 bx}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - 1}{\sin^2 bx}}.\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos ax - 1}{\sin^2 bx} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{-a^2x^2}{2}}{b^2x^2} = -\dfrac{a^2}{2b^2}$. Luego: $\lim_{x\to 0} (\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 bx}} = e^{\lim \frac{\cos ax - 1}{\sin^2 bx}} = e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$.

L 28- Hallar $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$.

Solución: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6} = \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin(\sin x)}{x^5} - \dfrac{\sin^2 x}{x^6}\right)$. Sustituyendo x en el desarrollo de

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$, por su propio desarrollo, se tiene:

$\sin(\sin x) = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots) - \frac{1}{3!}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots)^3 + \frac{1}{5!}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots)^5 + \ldots =$

$= x + x^3(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}) + x^4(-\frac{1}{3}) + x^5(\frac{1}{120} + \frac{1}{12} + \frac{1}{120}) + \ldots = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{10} + \ldots$

Luego: $\frac{\sin(\sin x)}{x^5} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{10} + \ldots$ Elevando al cuadrado el desarrollo de $\sin x$, se tiene:

$\sin^2 x = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + x^6(\frac{1}{36} + \frac{1}{60}) + \ldots = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + \ldots$

Luego: $\frac{\sin^2 x}{x^6} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{3x^2} + \frac{2}{45} + \ldots$ Por tanto: $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin(\sin x)}{x^5} - \frac{\sin^2 x}{x^6}) =$

$= \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{10} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{3x^2} - \frac{2}{45}) = \frac{1}{18}.$

L 29- Demostrar que son equivalentes los tres infinitésimos x, $\sin x$, $\tan x$, cuando $x \longrightarrow 0$.

Solución: Aplicando el desarrollo en potencias de x, se tiene: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$ Luego: $\sin x \underset{x\to 0}{\equiv} x$.

Siendo: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \ldots}{\cos x}$. Luego: $\tan x \underset{x\to 0}{\equiv} \underset{x\to 0}{\frac{x}{\cos x}} = x$.

L 30- Hallar los equivalentes de la forma ax^b, de $(1 - \cos x)$ y de $(\tan x - \sin x)$, cuando $x \to 0$.

Solución: $1 - \cos x = 1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \ldots$ Luego: $(1 - \cos x) \underset{x\to 0}{\equiv} \frac{x^2}{2}$.

$\underset{x\to 0}{(\tan x - \sin x)} = (x + \frac{x^3}{3} + \ldots) - (x - \frac{x^3}{6} + \ldots)$. Luego: $(\tan x - \sin x) \underset{x\to 0}{\equiv} \frac{x^3}{2}$.

L 31- Hallar $\lim_{n\to\infty} n\left[\sqrt[n]{b} - 1\right]$.

Solución: $\lim_{n\to\infty} n\left[\sqrt[n]{b} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[b^{\frac{1}{n}} - 1\right] = n \cdot \frac{1}{n}\ln b = \ln b$.

L 32- Hallar $\lim_{n\to\infty}\left[1 + \sin\frac{1}{n}\right]^n$.

Solución: $\lim_{n\to\infty}\left[1 + \sin\frac{1}{n}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

L 33- Clasificar los infinitamente grandes V_n^m y $\binom{m}{n}$ cuando $n \longrightarrow \infty$, siendo $m = kn$, donde k es un número natural dado.

Solución: Aplicando Stirling: $\underset{n\to\infty}{V_n^{kn}} = \frac{(kn)!}{(kn-n)!} \equiv \frac{(kn)^{kn+\frac{1}{2}} e^{-kn}\sqrt{2\pi}}{(kn-n)^{kn-n+\frac{1}{2}} e^{-kn+n}\sqrt{2\pi}} =$

$= \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{k^{kn+\frac{1}{2}}}{(k-1)^{n(k-1)+\frac{1}{2}}}$. Por tanto: $\underset{n\to\infty}{V_n^{kn}}$ es de la clase potencial-exponencial.

$\lim_{n\to\infty}\binom{kn}{n} = \frac{(kn)!}{(kn-n)!n!} \equiv \frac{(kn)^{kn+\frac{1}{2}} e^{-kn}\sqrt{2\pi}}{(kn-n)^{kn-n+\frac{1}{2}} e^{-kn+n}\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi}} = \frac{k^{kn+\frac{1}{2}}}{(k-1)^{kn-n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$.

Por tanto: $\underset{n\to\infty}{\binom{kn}{n}}$ es de la clase exponencial.

L 34- Hallar $\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{5}}}$.

Solución: $\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{5}}} = \lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}} - 1)}{x^{\frac{1}{5}}(x^{\frac{2}{15}} - 1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{4}}\ln x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}\ln x^{\frac{2}{15}}} = \lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}\ln x}{x^{\frac{1}{5}}\frac{2}{15}\ln x} = \frac{15}{8}$.

L 35- Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin^3 x}{\tan x - x}$.

Solución: Al ser de la forma $\dfrac{0}{0}$, se derivan numerador y denominador, teniéndose que: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin^3 x}{\tan x - x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \cdot 3\arcsin^2 x \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\tan^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6\arcsin^2 x}{\tan^2 x}$. Volviendo a derivar, se tiene: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6\arcsin x \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\tan x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6\arcsin x \cdot \cos^3 x}{\sin x} = 6.$

L 36- Hallar $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^{\tan^2 x}$.

Solución: Al ser de la forma 1^∞, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^{\tan^2 x} = e^{\lim \tan^2 x(\sin^2 x - 1)} = e^{\lim(-\sin^2 x)} = e^{-1}$.

L 37- Estudiar la convergencia de la serie $U_n = \left(\ln \dfrac{n+1}{n-1}\right)^a$ para los distintos valores de a.

Solución: $U_n = \left[\ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)\right]^a$. Como $\ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right) \equiv \dfrac{2}{n-1}$, $U_n = \dfrac{2^a}{(n-1)^a}$. Aplicando el criterio de la integral de Cauchy: $\displaystyle\int_p^\infty \dfrac{2^a}{(n-1)^a} = 2^a\left[\dfrac{(n-1)^{-a+1}}{-a+1}\right]_p^\infty =$
$= 2^a \lim\left[\dfrac{(t-1)^{-a+1}}{-a+1} - \dfrac{(p-1)^{-a+1}}{-a+1}\right]$. Como $(p-1)^{-a+1}$ es positivo, para $a > 1$, el límite es > 0, y la serie es convergente. Para $a \leq 1$, la serie es divergente.

L 38- Estudiar la convergencia de la serie $U_n = n\left(\sin \dfrac{x}{n}\right)^a$ para los distintos valores de a.

Solución: Siendo: $\sin \dfrac{x}{n} \equiv \dfrac{x}{n}$ para $n \to \infty$, $U_n = \dfrac{x^a}{n^{a-1}}$. Aplicando el criterio de la integral de Cauchy: $\displaystyle\int_p^\infty \dfrac{x^a}{n^{a-1}} = x^a \int_p^\infty n^{1-a} = x^a\left[\dfrac{n^{2-a}}{2-a}\right]_p^\infty = x^a \lim\left[\dfrac{t^{2-a}}{2-a} - \dfrac{p^{2-a}}{2-a}\right]$. Por tanto, para $a > 2$, U_n es convergente. Para $a \leq 2$, U_n es divergente.

L 39- Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[4]{4} + \ldots + n\sqrt[n]{n}}{n^2}$.

Solución: Aplicando el criterio de Stolz: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[4]{4} + \ldots + n\sqrt[n]{n}}{n^2} =$
$= \lim \dfrac{n\sqrt[n]{n}}{n^2 - (n-1)^2} = \lim \dfrac{n\sqrt[n]{n}}{2n-1} = \lim \dfrac{n}{2n-1} = \dfrac{1}{2}$.

L 40- Hallar a y b para que la serie $U_n = (n^3 + n^2 + n + 1)^{\frac{1}{3}} - (n^2+1)^{\frac{1}{2}} + a + \dfrac{b}{n}$, sea convergente.

Solución: $\lim U_n = \dfrac{1}{3} + a = 0$, $a = \dfrac{-1}{3}$, $\lim\left(1 - \dfrac{U_n}{U_{n-1}}\right)n = \dfrac{b}{b - \dfrac{5}{18}} > 1$, $b > \dfrac{5}{18}$.

L 41- Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n} + n)\log_a\left[1 + (2n^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right]$.

Solución: $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n} + n)\log_a\left[1 + (2n^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n} + n)(2n^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{1}{\ln a} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln a}\sqrt{\dfrac{n^2 + n + 2n\sqrt{n}}{2n^2+1}} = \dfrac{1}{\ln a \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\ln a}$.

L 42- Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(b^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

Solución: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(b^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\ln b^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{1}{n}\ln b = \ln b$.

L 43- Hallar $\lim_{x\to\infty} (\tanh x)^{\ln x}$.

Solución: $\lim_{x\to\infty} (\tanh x)^{\ln x} = e^{\lim \ln x(\tanh x - 1)}$, $\lim \ln x(\tanh x - 1) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\cosh^2 x} = 0$. Luego el límite pedido es: $e^0 = 1$.

L 44. Hallar $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{x}}}{n} \right)^{nx}$.

Solución: Tomando logaritmos: $nx\left[\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{x}} \right) - \ln n \right] = \dfrac{\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{x}} \right) - \ln n}{\frac{1}{nx}} =$

$= \dfrac{\dfrac{-1}{x^2}\left[\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}} \ln a_1 + \ldots + a_n^{\frac{1}{x}} \ln a_n}{a_1^{\frac{1}{x}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{x}}} \right]}{\dfrac{-1}{nx^2}} = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n = \ln(a_1 a_2 \ldots a_n)$. Por tanto el límite pedido es: $\operatorname{antiln}[\ln(a_1 a_2 \ldots a_n)] = a_1 a_2 \ldots a_n$.

L 45- Estudiar la convergencia de $U_n = \dfrac{A_n}{B_n} =$

$= \dfrac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13} + \dfrac{7}{7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16} + \dfrac{17}{10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19} + \dfrac{31}{13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22} + \ldots$

Solución: Los numeradores forman una progresión aritmética de 2º orden, de diferencias 6 y 4. Luego: $A_n = 1 + 6\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} = 2n^2 + 4n + 1$. Siendo: $B_n = (3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10)$, se tiene que: $U_n = \dfrac{2n^2 + 4n + 1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10)} = \dfrac{2n^2 + 4n + 1}{81n^4 + 594n^3 + \ldots}$. Aplicando el criterio de Raabe: $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \left| \dfrac{U_n}{U_{n-1}} \right|\right) n = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \dfrac{\frac{2}{81n^2} - \frac{32}{243n^3} + \ldots}{\frac{2}{81n^2} - \frac{20}{243n^3} + \ldots} \right] n = 2 > 1$. Luego U_n es convergente.

L 46- Estudiar la convergencia de $U_n = \dfrac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n)}$, siendo a y b mayores que cero..

Solución: Aplicando el criterio de Raabe: $n\left(1 - \left| \dfrac{U_n}{U_{n-1}} \right|\right) = n\left(1 - \left| \dfrac{a+n}{b+n} \right|\right) = n\dfrac{b-a}{n+b} \to b - a$. Si $b - a > 1$, U_n es convergente. Si $b - a \leq 1$, U_n es divergente.

L 47- Hallar $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

Solución: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.

L 48- Hallar $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$.

Solución: $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{2} = 0$.

L 49- Hallar $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^p + (n-1)^p \sqrt{2} + (n-2)^p \sqrt[3]{3} + \ldots + 2^p \sqrt[n-1]{n-1} + 1^p \sqrt[n]{n}}{n^{p+1}}$.

Solución:

Por una parte, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^p + (n-1)^p + (n-2)^p + \ldots + 2^p + 1^p}{n^{p+1}} = \lim \dfrac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$.

Por otra parte, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Por tanto, el límite pedido es: $\dfrac{1}{p+1}$.

L 50- Estudiar la convergencia de $U_n = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$.

Solución: $\sqrt{n^2+1} = n(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}} = n(1+\frac{1}{2n^2}+\ldots)$. $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) =$ $= \lim_{n\to\infty}(-1)^n \sin(n\pi+\frac{\pi}{2n}) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\left[\sin n\pi\cos\frac{\pi}{2n}+\cos n\pi\sin\frac{\pi}{2n}\right] =$ $= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\cos n\pi\sin\frac{\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n} \equiv \frac{\pi}{2n}$. Siendo: $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{nU_n}}{\ln(\ln n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{\frac{\pi}{2}}}{\ln(\ln n)} = 0$, U_n es divergente.

L 51- Estudiar la convergencia de $U_n = (-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^4+1})$.

Solución: $\sqrt{n^4+1} = n^2(1+\frac{1}{n^4})^{\frac{1}{2}} = n^2(1+\frac{1}{2n^4}+\ldots)$. Por tanto se tiene que: $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^4+1}) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(n^2\pi+\frac{\pi}{2n^2}) =$ $= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\left[\sin n^2\pi\cos\frac{\pi}{2n^2}+\cos n^2\pi\sin\frac{\pi}{2n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\cos n^2\pi\sin\frac{\pi}{2n^2} =$ $= \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n^2} \equiv \frac{\pi}{2n^2}$. Siendo: $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{U_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2n^2}{\pi}}{\ln n} = 2$, U_n es convergente.

L 52- Calcular $L = \lim_{n\to\infty}\left[8n\sum_{h=1}^{n}\frac{n^2+4nh+h^2}{(n+h)^2\sqrt{h(2n^3+5n^2h+4nh^2+h^3)}}\right]$.

Solución: $L = \lim_{n\to\infty}\left[8\sum_{h=1}^{n}\frac{1+\frac{4h}{n}+\frac{h^2}{n^2}}{(1+\frac{h}{n})^2\sqrt{\frac{h}{n}\left(2+5\frac{h}{n}+4\frac{h^2}{n^2}+\frac{h^3}{n^3}\right)}}\right]$. Haciendo: $\frac{h}{n} = x$, y pasando a integral, se tiene: $L = 8\int_0^1\frac{1+4x+x^2}{(1+x)^2\sqrt{x(2+5x+4x^2+x^3)}}dx = 6\sqrt{6}$.

L 53- Hallar $L = \lim_{n\to\infty} 4^{\frac{1}{3!}}\bullet 8^{\frac{1}{5!}}\bullet\ldots\bullet(2^{n+1})^{\frac{1}{(2n+1)!}}$.

Solución: $\ln L = \ln(4^{\frac{1}{3!}}\bullet 8^{\frac{1}{5!}}\bullet\ldots\bullet(2^{n+1})^{\frac{1}{(2n+1)!}}) = \sum\frac{1}{(2n+1)!}\ln 2^{n+1} = \ln 2\sum\frac{n+1}{(2n+1)!}$. $\lim_{n\to\infty}\sum\frac{n+1}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum\frac{2n+2}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum\frac{1}{(2n+1)!}\right] =$ $= \frac{1}{2}(e-2)$. Luego: $\ln L = \ln\left[2^{\frac{1}{2}(e-2)}\right]$. Luego: $L = e-2$.

L 54- Estudiar la convergencia de $U_n = a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$.

Solución: $U_n = a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} = a^{H_n}$; $\lim_{n\to\infty} H_n = \ln n + C$, siendo C la constante de Euler, cuyo valor es $0,5772156649\ldots$ Luego se tiene: $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{U_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a^{H_n}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\ln a^{H_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-H_n\ln a}{\ln n} =$ $= \lim_{n\to\infty}\frac{-(\ln n+C)\ln a}{\ln n} = -\ln a$. Por tanto, para $-\ln a > 1$, es decir, para $a < 1$, U_n es convergente. Para $-\ln a < 1$, es decir, para $a > 1$, U_n es divergente. Para $a = 1$, es dudoso.

L 55- Siendo $h \neq k \neq l$, hallar $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+h)^{\frac{1}{4}}-(x+k)^{\frac{1}{4}}}{(x+h)^{\frac{1}{3}}-(x+k)^{\frac{1}{3}}}(x+l)^{\frac{1}{12}}$.

Solución: El límite pedido es igual a: $\lim\frac{x^{\frac{1}{4}}(1+\frac{1}{4}\frac{h}{x})-x^{\frac{1}{4}}(1+\frac{1}{4}\frac{k}{x})}{x^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{3}\frac{h}{x})-x^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{3}\frac{k}{x})}x^{\frac{1}{12}}(1+\frac{1}{12}\frac{l}{x}) =$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\frac{h-k}{x}}{\frac{1}{3}\frac{h-k}{x}}(1+\frac{1}{12}\frac{l}{x}) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

L 56- Estudiar la convergencia de $U_n = \dfrac{n^q}{(n+1)^p}$.

Solución: Aplicando el criterio logarítmico de Cauchy: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{U_n}}{\ln n} = \lim\dfrac{p\ln(n+1)-q\ln n}{\ln n} =$ $= p-q$. Luego, si $p-q > 1$, U_n es convergente. Si $p-q < 1$, U_n es divergente. Para $p-q = 1$, es dudoso.

L 57- Estudiar la convergencia de $U_n = e^{\frac{1}{2n}} - e^{\frac{1}{2n+1}}$.

Solución: Aplicando el criterio de la integral:

$$\int_1^\infty (e^{\frac{1}{2x}} - e^{\frac{1}{2x+1}})dx = \int_1^\infty [\tfrac{1}{2x} + \tfrac{1}{2!}(\tfrac{1}{2x})^2 + \ldots - \tfrac{1}{2x+1} - \tfrac{1}{2!}(\tfrac{1}{2x+1})^2 - \ldots]dx =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{3}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{2!}(\tfrac{1}{2})^2 + \ldots + \tfrac{1}{n!2^n(n-1)} + \ldots}_{A_n} - \underbrace{\tfrac{1}{2!}\tfrac{1}{2\cdot 3} - \ldots - \tfrac{1}{n!2(n-1)3^{n-1}} - \ldots}_{B_n} = \ln\sqrt{\tfrac{3}{2}} + A_n - B_n,$$

A_n y B_n son convergentes, luego la integral lo es y por tanto U_n.

L 58- Estudiar la convergencia de $U_n = \dfrac{1}{(n+1)^p} + \ldots + \dfrac{1}{(2n)^p}$.

Solución: $A_n = \underbrace{\dfrac{1}{n^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p}}_{n \text{ veces}} = \dfrac{1}{n^{p-1}}$, $B_n = \underbrace{\dfrac{1}{(2n)^p} + \ldots + \dfrac{1}{(2n)^p}}_{n \text{ veces}} = \dfrac{1}{2^p n^{p-1}}$, $A_n > U_n > B_n$. A_n es convergente si $(p-1) > 1$. Aplicando el criterio logarítmico de Cauchy a B_n: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{B_n}}{\ln n} =$ $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{p\ln 2 + (p-1)\ln n}{\ln n} = p-1$. Luego, B_n es convergente si $(p-1) > 1$. Por tanto, U_n es convergente si $(p-1) > 1$.

L 59- Demostrar que es convergente $U_n = \dfrac{1}{2}(U_{n-1} + \dfrac{a}{U_{n-1}})$ y calcular su límite..Se supone que $U_1 > 0$ y $a > 0$.

Solución: $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} U_{n-1} = x$. Luego: $x = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{a}{x})$, $x = \sqrt{a}$. Por tanto, U_n es convergente, siendo su límite $\sqrt{a}$.

L 60- Hallar $\lim_{n\to\infty} U_n = \dfrac{1}{n^2}\left[2 + \dfrac{3^2}{2^1} + \dfrac{4^3}{3^2} + \ldots + \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right]$.

Solución: Por Stolz: $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^n}{2n^n - n^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^n}{2-\frac{1}{n}} = \dfrac{e}{2}$.

L 61- Hallar $\lim U_n = (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}(1+\frac{2}{n})^{\frac{1}{n}}\ldots(1+\frac{n}{n})^{\frac{1}{n}}$.

Solución: $U_n^n = \dfrac{n+1}{n}\dfrac{n+2}{n}\ldots\dfrac{n+n}{n} = \dfrac{1}{n^n}\dfrac{(2n)!}{n!} \equiv \dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^n n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \dfrac{2^{2n+1}}{e^n}$. Luego: $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{2n+1}}{e^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{4}{e}$.

L 62- Estudiar la convergencia de $U_n = (-1)^n(\sin\frac{1}{n})^a(1-\cos\frac{1}{n})^b$.

Solución: Por ser la serie alternada y de términos decrecientes, es necesario y suficiente para su convergencia que $|U_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Luego: $|U_n| \underset{n\to\infty}{=} \lim_{n\to\infty}(\sin\frac{1}{n})^a(1-\cos\frac{1}{n})^b = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})^a(\frac{1}{2n^2})^b =$

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^b n^{a+2b}} = 0.$ Luego, para $a+2b > 0,$ la serie es convergente.

L 63. Estudiar la convergencia de $U_n = \left[\ln \dfrac{n+1}{n-1}\right]^a.$

Solución: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\ln \dfrac{n+1}{n-1}\right]^a = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)\right]^a = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{n-1}\right)^a.$ Luego si $a > 1,$ U_n es convergente. Si $a \leq 1,$ es divergente.

L 64- Estudiar la convergencia de $U_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln a)^n}.$

Solución: Aplicando el criterio de la raíz: $\lim\limits_{n\to\infty} (U_n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a} e^{\lim \frac{(\ln)^2}{n}} =$ $= \dfrac{1}{\ln a} e^{\lim \frac{(\ln)^2}{n}} = \dfrac{1}{\ln a} e^{\lim \frac{2\ln n}{n^2}} = \dfrac{1}{\ln a} e^{\lim \frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{\ln a} e^0 = \dfrac{1}{\ln a}.$ Luego, si $a > e,$ U_n es convergente. Si $a \leq e,$ U_n es divergente.

L 65- Estudiar la convergencia de $U_n = \dfrac{1}{n^a \cdot b^{\ln n}}.$

Solución: Aplicando el criterio logarítmico: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{U_n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a\ln n + \ln n \ln b}{\ln n} = a + \ln b.$ Luego, si $a+\ln b > 1,$ U_n es convergente. Si $a + \ln b \leq 1,$ U_n es divergente.

L 66- Estudiar la convergencia de $U_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n}\right]^p.$

Solución: $U_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^p \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}\sqrt{2\pi}}{2^{2n} n^{2n+1} e^{-2n} 2\pi}\right]^p =$ $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}\right]^p = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\pi n)^{\frac{p}{2}}}.$ Comparándola con la armónica: si $\dfrac{p}{2} > 1,$ es convergente; si $\dfrac{p}{2} \leq 1,$ es divergente.

L 67- Estudiar la serie cuyo término general es $U_n = (-1)^n n^a \left(\ln \dfrac{n+1}{n-1}\right)^b.$

Solución: Por ser alterna, para que sea convergente es suficiente y necesario que $\lim\limits_{n\to\infty} |U_n| = 0.$ $\lim\limits_{n\to\infty} |U_n| = \lim\limits_{n\to\infty} n^a \left(\ln \dfrac{n+1}{n-1}\right)^b = \lim\limits_{n\to\infty} n^a \left[\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\right]^b = \lim\limits_{n\to\infty} n^a \left(\frac{2}{n-1}\right)^b = \lim\limits_{n\to\infty} n^a \left(\frac{2}{n-1}\right)^b =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} n^{a-b} 2^b.$ Luego, si $(a-b) \geq 1,$ la serie es divergente. Si $(a-b) < 1$ la serie es convergente.

L 68- Estudiar la serie cuyo término general es $U_n = \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{\pi}{\sqrt{n}}.$

Solución: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \dfrac{\pi}{\sqrt{n}} = \dfrac{\pi}{n^{3/2}}.$ Aplicando el criterio logarítmico: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{U_n}}{\ln n} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{3}{2}\ln n - \ln \pi}{\ln n} = \dfrac{3}{2} > 1,$ luego la serie es convergente.

L 69- Hallar $\Pi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n! n^{x+1}}{(1+x)(2+x)\ldots(n+x)(n+x+1)}.$

Solución: $\Pi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x! n! n^{x+1}}{(n+x+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x! n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}\, n^{x+1}}{(n+x+1)^{n+x+\frac{3}{2}} e^{-n-x-1} \sqrt{2\pi}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x! n^{n+x+\frac{3}{2}} e^{x+1}}{(n+x+1)^{n+x+\frac{3}{2}}} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} x! \left(\dfrac{n}{n+x+1}\right)^{n+x+\frac{3}{2}} e^{x+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x! \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{x+1}{n}\right)^{n+x+\frac{3}{2}}} e^{x+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x! \dfrac{1}{e^{x+1}} e^{x+1} = x!$

L 70- Estudiar la sucesión definida por la ley de recurrencia: $(z_{n+1}^2-1)(z_n+z_{n-1}) = 2z_{n+1}(z_nz_{n-1}-1)$. Aplicar a $z_1 = 1$ y $z_2 = \sqrt{2}-1$.

Solución: La ley de recurrencia se puede escribir: $\dfrac{z_n+z_{n-1}}{1-z_nz_{n-1}} = \dfrac{2z_{n+1}}{1-z_{n+1}^2}$. Haciendo $z_n = \tan a_n$, resulta: $\tan(a_n+a_{n-1}) = \tan(2a_{n+1})$. Es decir: $a_{n+1} = \dfrac{a_n+a_{n-1}}{2}$. La ecuación característica de a_n es: $2x^2-x-1 = 0$, cuyas raíces son 1 y $-\dfrac{1}{2}$. Su ecuación de recurrencia es : $a_n = A\cdot 1^n + B\cdot(-\dfrac{1}{2})^n$. Se obtiene: $A = \dfrac{a_1+2a_2}{3}$ y $B = -\dfrac{4}{3}(a_1-a_2)$, quedando: $a_n = \dfrac{a_1+2a_2}{3} - (-\dfrac{1}{2})^n\dfrac{4}{3}(a_1-a_2)$. Para los valores dados, $a_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $a_2 = \dfrac{\pi}{8}$. Por tanto: $a_n = \dfrac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{3} - (-\dfrac{1}{2})^n\dfrac{4}{3}(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{8})$. Luego: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\pi}{6}$, $\lim z_n = \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

L 71- Hallar $y_n = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{p=n} a_p^{\frac{1}{x}}\right]^x$, siendo $a_p > 0$. Seguidamente calcular el valor de y_n para $a_p = 2p$. Llamando Y_n a este valor, determinar el $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\pi nY_n}{(n-1)(n!)^{\frac{1}{n}}}$.

Solución: $\ln y_n = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+\ldots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+\ldots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}}{\frac{1}{x}} = (*)\dfrac{\ln a_1+\ldots+\ln a_n}{n} =$ $= \ln(a_1\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$. Luego: $y_n = (a_1\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$. Por tanto: $Y_n = [(2n)!]^{\frac{1}{n}} = 2(n!)^{\frac{1}{n}}$. Luego: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\pi nY_n}{(n-1)(n!)^{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\pi n2(n!)^{\frac{1}{n}}}{(n-1)(n!)^{\frac{1}{n}}} = 4\pi$. $(*)$
$(*)$Aplicando L ´Hopital.

L 72- Siendo a positivo, hallar $X = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{a}{n^2})(1+\dfrac{2a}{n^2})\ldots(1+\dfrac{na}{n^2})$.

Solución: $\ln X = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\ln(1+\dfrac{a}{n^2})^{n^2}+\ldots+\ln(1+\dfrac{na}{n^2})^{n^2}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}[\ln e^a+\ldots+\ln e^{na}] =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}[a+2a+\ldots+na] = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an(n+1)}{2n^2} = \dfrac{a}{2}$.

L 73- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{1})(1+\dfrac{1}{3})(1-\dfrac{1}{2})(1+\dfrac{1}{5})(1+\dfrac{1}{7})(1-\dfrac{1}{4})\ldots$

Solución: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{8}{7}\cdot\dfrac{3}{4}\ldots = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n)!!}{(4n-1)!!}\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \sqrt{2}$ $(*)$.
$(*)$Aplicando Stirling.

L 74- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}$, siendo $a_n = \frac{1}{n!}\sum\limits_{p=1}^{\infty}\dfrac{p^n}{p!}$.

Solución: Aplicando Stolz para calcular $\lim a_n$, se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n^n}{n!}}{n!-(n-1)!} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n^ne^n}{n^n\sqrt{2\pi n}}}{(n-1)!(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n^ne^n}{n^n\sqrt{2\pi n}}}{(n-1)^ne^{-n+1}\sqrt{2\pi(n-1)}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{2n-1}}{(n-1)^n2\pi\sqrt{n(n-1)}}$. Por tanto: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{2n-1}{n}}}{(n-1)^{1+\frac{1}{n}}(2\pi)^{\frac{1}{n}}n^{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^2}{(n-1)^{1+\frac{1}{n}}(2\pi)^{\frac{1}{n}}n^{\frac{1}{n}}} = = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^2}{(n-1)n^{\frac{1}{n}}} = 0$.

L 75- Se considera la sucesión definida por la ley recurrente $a_{n+1} = k^{a_n}$, siendo $k > 0$. Estudiar su límite cuando $n\to\infty$.

Solución: $\ln a_{n+1} = a_n\ln k$. Para $\ln k > \dfrac{1}{e}$, a_n es monótona divergente. Para $0 < \ln k < \dfrac{1}{e}$, la ecuación $x\ln k = \ln x$, tiene dos raíces: α y β. Para $a_1 < \beta$, $a_n\to\alpha$, la sucesión es monótona. Para

$a_1 > \beta,\ a_n \to \infty,$ la sucesión es monótona. Para $\ln k < 0,$ la ecuación $x \ln k = \ln x$ tiene una raíz real doble, pero a_n no es monótona.

L 76- Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \ldots \sin \frac{n\pi}{2n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Solución: $\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \ldots \sin \frac{n\pi}{2n}$. Para $\theta \to 0,\ n = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \ldots \sin \frac{n\pi}{2n}$. Luego: $\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \ldots \sin \frac{n\pi}{2n} = \frac{n}{2^{n-1}}$. Por tanto, el límite pedido es: $\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$.

L 77- Estudiar la sucesión definida por la ley recurrente $U_{n+1} = \cos U_n$. Calcular su límite U y hallar el carácter de la serie $\sum (U_n - U)$.

Solución: La ecuación $x = \cos x$, tiene como solución $x = 0,739$. La sucesión U_n se compone de dos sucesiones monótonas, una creciente y la otra decreciente. La serie $\sum (U_n - U)$ es convergente en virtud de la regla de Leibniz. En el cuadro siguiente se incluyen los términos de la sucesión partiendo de $U_1 = 0,5$, quedando patentes las dos sucesiones monótonas, una creciente y la otra decreciente.

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}	U_{11}	U_{12}
$0,5$		$0,639$		$0,695$		$0,719$		$0,730$		$0,735$	
	$0,877$		$0,803$		$0,768$		$0,752$		$0,745$		$0,742$

L 78- Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n-1^2}{1\cdot 2\cdot (n+1)} + \frac{n-2^2}{2\cdot 3\cdot (n+2)} + \ldots + \frac{n-n^2}{n(n+1)(n+n)} \right]$.

Solución: Se tiene que: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{n-p^2}{p(p+1)(p+n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1} - \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p+n} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots - \frac{1}{n+n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} - H_{2n} + H_n\right) =$
$= 1 - (C + \ln 2n) + (C + \ln n)\ (*) \ = 1 - \ln 2.$

$(*)$ La suma de los primeros n términos de la serie armónica H_n, cuando $n \to \infty$, es equivalente a $C + \ln n$, siendo C la constante de Euler $0,5772156649\ldots$

L 79- Demostrar que si $m \to \infty$ y $n \to \infty$, siendo $\frac{m}{n} = k$ (k es finito), se tiene que: $A = \lim \prod\limits_{p=-n}^{m} \left(1 + \frac{z}{p\pi}\right) = k^{\frac{z}{\pi}} \frac{\sin z}{z}$.

Solución: $\frac{\sin z}{z} = \prod\limits_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{p^2\pi^2}\right) = \prod\limits_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{p\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{p\pi}\right)$, $\quad A = \lim \prod\limits_{p=-n}^{m} \left(1 + \frac{z}{p\pi}\right) = \frac{\sin z}{z} B$, siendo: $B = \lim \prod\limits_{p=n+1}^{m} \left(1 + \frac{z}{p\pi}\right) = \left(1 + \frac{z}{(n+1)\pi}\right) \ldots \left(1 + \frac{z}{kn\pi}\right) = (*) \frac{(x+n+1)\ldots(x+kn)}{(n+1)\ldots(kn)} =$
$= \frac{(x+kn)!n!}{(kn)!(x+n)!} = k^x\ (**)$. Luego: $A = k^x \frac{\sin z}{z} = k^{\frac{z}{\pi}} \frac{\sin z}{z}$.
$(*) x = \frac{z}{\pi} \qquad (**)$ Aplicando Stirling.

L 80- De la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ se suprimen los términos cuyos denominadores contengan alguna cifra 5. Estudiar la convergencia de la serie resultante.

Solución: En 10^n términos hay $10^n - 9^n$ que contienen alguna cifra 5, y 9^n que no la tienen. Sea S la serie resultante tras la supresión mencionada. Luego: $S < \sum \frac{9^n - 9^{n-1}}{10^{n-1}} = (9-1) \sum \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$. Como ésta es convergente, también lo es S, por ser menor que ella.

L 81- Sea $A_n = \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \ln n\right]$. 1º) Hallar $A = \lim A_n$. 2º) Determinar la parte principal de $\alpha_n = A_n - A$, respecto a $\frac{1}{n}$. 3º) Sumar la serie $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Solución: 1º) $\sum \frac{1}{n} = H_n = C + \ln n$ (ver: L 78), $\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} H_n = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \ln n$. Luego:

$A_n = \sum \frac{1}{2n+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n = \frac{1}{2}C + \ln(2n+1) - \frac{1}{2}\ln n$. Por tanto, se tiene que: $A = \lim_{n\to\infty} A_n =$ $= \lim\ (\frac{1}{2}C + \ln\frac{2n+1}{n}) = \frac{1}{2}C + \ln 2$. 2º) Aplicando Stolz: $\lim|\alpha_n| = \lim\left|\frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}}\right|$;

$\lim|\alpha_n - \alpha_{n+1}| = \lim|A_n - A - A_{n+1} + A| = \lim|A_n - A_{n+1}| = \left|\frac{-1}{2n+1} - \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(n+1)\right| =$
$= \left|\frac{-1}{2n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{8n^3} +\ldots+ \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} -\ldots\right| \equiv \frac{1}{24n^3}$.

Como: $\lim|\alpha_n| = \lim\left|\frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}}\right| = \lim\left|\frac{\frac{1}{24n^3}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}}\right|$, se tiene: $\alpha_n = \frac{1}{48n^2}$.

Comprobación: $\lim|\alpha_n - \alpha_{n+1}| = \lim\left|\frac{1}{48n^2} - \frac{1}{48(n+1)^2}\right| = \frac{1}{48}\lim\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{24n^3}$.

3º) $S = A_1 +\ldots+ A_n - \frac{1}{2}\ln(n!) - n(\frac{1}{2}C + \ln 2) = nA_n + \frac{1}{2}A_n - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left(n\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi n}\right) =$ $= \frac{C + \ln 2 - \ln\pi}{4}$.

L 82- Sean $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4}\ln n$ y $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4}\ln n$. Calcular 1º) Sus límites A y B para $n \to \infty$. 2º) La parte principal de $(A_n - A)$ y $(B_n - B)$ respecto a $\frac{1}{n}$.

Solución: 1º) $A + B = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} +\ldots+ \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2}\ln n = H_{4n} - \frac{1}{2}H_{2n} - \frac{1}{2}\ln n =$ $= \ln 4n + C - \frac{1}{2}(\ln 2n + C) - \frac{1}{2}\ln n = \ln(2\sqrt{2}) + \frac{C}{2}$, $A - B = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +\ldots= \frac{\pi}{4}$.

Por tanto: $A = \frac{1}{2}\left[\ln(2\sqrt{2}) + \frac{C}{2} + \frac{\pi}{4}\right]$, $B = \frac{1}{2}\left[\ln(2\sqrt{2}) + \frac{C}{2} - \frac{\pi}{4}\right]$.

2º) $\lim \alpha_n = A_n - A = \lim\frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \lim\frac{A_n - A_{n+1}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$. Ahora bien:

$A_n - A_{n+1} = \frac{-1}{4n+1} - \frac{1}{4}\ln n + \frac{1}{4}\ln(n+1) = -\frac{1}{16n^2}$.

Luego: $\lim\alpha_n = \lim\frac{A_n - A_{n+1}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = -\frac{1}{16}$. Igualmente: $\lim\beta_n = \lim\frac{B_n - B_{n+1}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{16}$. Por tanto: $(A_n - A) = \frac{-1}{16n}$, $(B_n - B) = \frac{1}{16n}$.

L 83- Estudiar la serie $y = \frac{x}{1+x} - \frac{x^3}{1+x^3} + \frac{x^5}{1+x^5} -\ldots$ ¿es uniforme su convergencia en el intervalo abierto $(0,1)$? Calcular su límite lateral para $x \to 1-\epsilon$.

Solución: Evidentemente la convergencia de la serie es absoluta para $|x| < 1$, pero no puede ser uniforme, ni siquiera en el intervalo abierto $(0,1)$ porque si así fuera, se llegaría a la contradicción de que la serie $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ldots$ sería convergente, en virtud del teorema de paso al límite. Para hallar el límite lateral pedido, se hace: $U_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n+1}}$, $\Delta U_n = U_n - U_{n+1} =$ $= \frac{x^{2n+1}(1-x^2)}{(1+x^{2n+1})(1+x^{2n+3})}$. Se observa que, para cada x del intervalo $(0,1)$, tanto U_n como ΔU_n son positivas, monótonas e infinitésimas. Se puede poner: $y = U_0 - U_1 + U_2 - U_3 +\ldots=$ $= \Delta U_0 + \Delta U_1 +\ldots= U_0 - \Delta U_1 - \Delta U_3 -\ldots= \frac{U_0}{2} + \frac{1}{2}(\Delta U_0 - \Delta U_1 +\ldots)$. En virtud de las propiedades de las series leibnizianas, resulta para $0 < x < 1$, que $\frac{U_0}{2} < y < \frac{U_0}{2} + \frac{\Delta U_0}{2}$. Tomando límites para $x \to 1-\epsilon$, se obtiene: $\lim_{x\leftarrow\to 1-\epsilon} y = \frac{1}{4}$.

L 84- Hallar $A = \lim_{n\to\infty} \frac{2\binom{n}{0}\tan\frac{\pi}{3} + 3\binom{n}{1}\tan\frac{\pi}{4} +\ldots+ (n+2)\binom{n}{n}\tan\frac{\pi}{n+3}}{2^n}$.

Solución: Sean: $a_n = \binom{n}{n}$, $y_n = (n+2)\tan\frac{\pi}{n+3}$. Por tanto: $A = \lim_{n\to\infty}\frac{a_0y_0 +\ldots+ a_ny_n}{a_0 +\ldots+ a_n} =$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n y_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)\tan\dfrac{\pi}{n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n+3}}{1-2\sin^2\dfrac{\pi}{2(n+3)}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)\dfrac{\dfrac{\pi}{n+3}}{1-2\dfrac{\pi^2}{2^2(n+3)^2}}=\pi.$

L 85- Hallar el radio de convergencia de la serie:

$$1-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{5^2}+\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{3n}}{\left(2^{n^2}\right)^{\frac{1}{n+1}}}-\frac{x^{3n+1}}{\left(3^{n^2+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}-\frac{x^{3n+2}}{\left(5^{n^2+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}\ldots$$

Solución: Por el teorema de Cauchy-Hadamard: $\dfrac{x^{3n}}{\left(2^{n^2}\right)^{\frac{1}{n+1}}}\to|x^3|<2\to$ Convergente; $\dfrac{x^{3n+1}}{\left(3^{n^2+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}\to|x^3|<3\to$ Convergente; $\dfrac{x^{3n+2}}{\left(5^{n^2+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}\to|x^3|<5\to$ Convergente. Luego: $|x^3|<2,\ |x|<2^{\frac{1}{3}}$.

L 86- Estudiar la convergencia de $U_n=\dfrac{x^n}{1+2+\ldots+n}$ y hallar su suma en los casos posibles.

Solución: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{U_n}{U_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}x=x$. Para $x>1$, divergente. Para $x\leq 1$, convergente. Para $x=1$, se trata de una progresión hipergeométrica con $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=1$, cuya suma es: $S_m=\dfrac{\dfrac{2}{m(m+1)}(m-1)-1}{-1}=1-\dfrac{2(m-1)}{m(m+1)}$. Para $m\to\infty$, $S=1$.

L 87- Hallar el recinto en el que puede variar z para que $\prod\limits_1^{\infty}\left[1+\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^n\right]$ converja.

Solución: Π converge si $\sum\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^n$ converge. $\dfrac{U_n}{U_{n-1}}=\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)<1$. Luego el recinto es: $(z-a)!-(b-a)(z-b)!=0$.

L 88- Dada la ecuación $4x^4-x^3+\dfrac{1}{n^a}=0$, con $a>0$, se considera la serie cuyo término general $f(n)$ es aquella raíz de la citada ecuación que tiende a 0 para $n\to\infty$. Estudiar el carácter de la serie.

Solución: $x^3(4x-1)+\dfrac{1}{n^a}=0$, $x=\dfrac{1}{n^{\frac{a}{3}}(1-4x)^{\frac{1}{3}}}$. La raíz indicada es: $\dfrac{1}{n^{\frac{a}{3}}}$. Cuando $\dfrac{a}{3}>1$, es convergente. Si $\dfrac{a}{3}\leq 1$, es divergente.

L 89- A cada elemento a_i de un conjunto dirigido C, se le hace corresponder un número $y_i=f(a_i)$. Se dice que L es el límite del conjunto dirigido y si fijado un entorno de L se encuentran en él todos los valores de y posteriores al valor y_j correspondiente a un a_j. Demostrar: 1º) Este límite L es único. 2º) Que si a_j es posterior a a_i, $y_j>y_i$ y el conjunto y está acotado superiormente, y tiene límite. 3º) Que este límite es el extremo superior del conjunto.

Solución: 1º) Suponiendo que haya dos límites L_1, L_2. En el entorno de amplitud 2ϵ: $(L_1+\epsilon, L_1-\epsilon)$, se encuentran para $n>N$ todos los posteriores a y_n. De la misma manera, en el entorno $(L_2+\epsilon, L_2-\epsilon)$, para $m>M$, todos los posteriores a y_m. Luego para $p>M$ y $p>N$, todos los posteriores a y_p se encuentran en los dos entornos, es decir, $L_1-y_p<\delta_1$ y $L_2-y_p<\delta_2$, siendo δ_1 y δ_2 tan pequeños como se quiera. Por tanto, $L_1\equiv L_2=L$. 2º) $y_n>y_{n-1}$, $k>y_n$. Se puede hallar $N>k$ tal que: $N-y_n<\epsilon\to 0$. Luego, $\lim y_n=N$. 3º) Como $y_n>y_{n-1}$, se puede formar la serie monótona $N>y_n>y_{n-1}>\ldots$ Luego, N es el extremo superior del conjunto.

L 90- Hallar $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}-(1+b_n)^{\frac{1}{b_n}}}{a_n-b_n}$, si $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ y $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

Solución: $(1+a)^{\frac{1}{a}} = 2 + \frac{1-a}{2!} + \frac{(1-a)(1-2a)}{3!} + \ldots,$
$(1+a)^{\frac{1}{a}} - (1+b)^{\frac{1}{b}} = \frac{b-a}{2!} + \frac{3b-3a+\ldots}{3!} + \frac{6b-6a+\ldots}{4!} + \frac{10b-10a+\ldots}{5!} + \ldots,$
$\frac{(1+a)^{\frac{1}{a}} - (1+b)^{\frac{1}{b}}}{a-b} = -\left(\frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} + \ldots + \frac{1+2+\ldots+n}{(n+1)!} + \ldots\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{(n+1)!}.$
Luego: $A = \lim_{n\to\infty} \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{(n+1)!} \right] = -\frac{1}{2}\sum \frac{1}{(n-1)!} = -\frac{e}{2}.$

L 91- Sean a y b dos números irracionales y $\frac{a}{b}$ irracional. Sea $N = ma + nb,$ tomando m y n todos los valores enteros independientemente. De esta forma se obtiene un conjunto E de números N. Demostrar que cada número de E es un límite de números de E.

Solución: En el entorno de un N cualquiera hay infinitos números de E. En efecto: $N = ma + nb,$ $N + \epsilon = m'a + n'b,$ $a(m' - m) + b(n' - n) \to 0$. Luego, $\frac{a}{b} = \frac{n-n'}{m'-m}$. Esta fracción se puede desarrollar en fracción continua, de forma que a partir de una determinada reducida, la diferencia con $\frac{n-n'}{m'-m}$ sea tan pequeña como se quiera. A partir de esa reducida, todas las siguientes darán infinitas ecuaciones resolubles en m' y n', con límite $ma + nb$.

L 92- Demostrar que si $\sum z_i$ converge y los números complejos z_i son tales que $-\alpha < \arg z_i < \alpha$, siendo $\alpha < \frac{\pi}{2}$, la convergencia de la serie es absoluta, es decir, que también converge $\sum |z_i|$.

Solución: Si $\sum z_i$ converge, también lo hacen $\sum x_i$ y $\sum y_i$. También converge absolutamente $\sum x_i$ ya que por ser $|\arg z_i| < \frac{\pi}{2}$, x siempre es positiva, es decir: $\sum x_i = \sum |x_i|$. Dado que las series $\sum x_i$, $\sum y_i$ y $\sum |x_i|$ son convergentes, también es convergente $\sum (x_i y_i)$. Aplicando esto a las series $\sum (x_i + iy_i)$ y $\sum (x_i - iy_i)$, se obtiene que $\sum (x_i^2 + y_i^2) = \sum |z_i|$ también converge.

L 93- Calcular $L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{h=1}^{n} h^2(\ln h)^3}{(n+a)^3[\ln(n+h)]^3}.$

Solución: $L = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}$. Se tiene que: $A_n - A_{n-1} = n^2(\ln n)^3$, y que: $B_n - B_{n-1} =$ $= (n+a)^3[\ln(n+h)]^3 - (n+a-1)^3[\ln(n+h-1)]^3 \equiv 3(n+a)^2[\ln(n+h)]^3$. Luego el límite pedido es: $L = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\ln n)^3}{3(n+a)^2[\ln(n+h)]^3} = \frac{1}{3}.$

L 94- Hallar el radio de convergencia de la serie $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{(1,1)} + \ldots + \frac{x^n}{\underbrace{(1,1,\ldots 1)}_{n \text{ veces}}} + \ldots$

Solución: $y = 1 + \frac{x}{U_1} + \frac{x^2}{U_2} + \ldots + \frac{x^n}{U_n} + \ldots,$ siendo U_n el término n-ésimo de la serie de Fibonacci. Por tanto: $U_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$. Luego: $\lim \frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$. El radio es: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

L 95- Hallar el verdadero valor de $A = \frac{(a^2+ax+x^2)^{\frac{1}{2}} - ((a^2-ax+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$, cuando $x \to 0$.

Solución: $A = \frac{a + \frac{a}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) + \ldots - a - \frac{a}{2}\left(\frac{-x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) + \ldots}{\sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{2}\frac{x}{a} + \ldots - \sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{2}\frac{x}{a}\ldots} = \frac{1+\epsilon}{\frac{1}{\sqrt{a}} + \epsilon} = \sqrt{a}.$

L 96- Calcular $A = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^x}{x\binom{n+x}{n}}$.

Solución: $A = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^x n! x!}{x(n+x)!} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^x(x-1)!}{(n+x)(n+x-1)\dots(n+1)}$. Operando, se tiene que: $A = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(x-1)!}{\underbrace{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{x-1}{n})\dots(1+\frac{1}{n})}_{x \text{ factores}}} = (x-1)!$

L 97- Hallar el verdadero valor de $A = \dfrac{(n+1)^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}}}{(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}} \cdot n^{\frac{1}{12}}$ para $n \to \infty$.

Solución: Operando, se tiene que: $A = \dfrac{(n+1)^{\frac{3}{12}} - n^{\frac{3}{12}}}{(n+1)^{\frac{4}{12}} - n^{\frac{4}{12}}} \cdot n^{\frac{1}{12}} = \dfrac{(n+1)^{\frac{3}{12}} - n^{\frac{3}{12}}}{(n+1)^{\frac{4}{12}} - n^{\frac{4}{12}}} \cdot n^{\frac{1}{12}} =$ $= \dfrac{(1+\frac{3}{n}+\dots)^{\frac{1}{12}} - 1^{\frac{1}{12}}}{(1+\frac{4}{n}+\dots)^{\frac{1}{12}} - 1^{\frac{1}{12}}} = \dfrac{1+\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{n} - 1 + \dots}{1+\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{n} - 1 + \dots} = \dfrac{3}{4}$.

L 98- Estudiar la convergencia de $U_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot 2n}\right]^p$.

Solución: $U_n = \left[\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^p \equiv \left[\dfrac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}}{2^{2n}\left[n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,\right]^2}\right]^p = \dfrac{1}{(\sqrt{\pi n}\,)^p}$. Por tanto: $\dfrac{\ln(\pi n)^{\frac{p}{2}}}{\ln n} = \dfrac{p}{2}$. Luego, si $\dfrac{p}{2} > 1$, U_n es convergente. Para $\dfrac{p}{2} \leq 1$ es divergente.

L 99- Determinar una función que para $x = +\infty$, tienda a $+\infty$ más lentamente que $\sqrt{x}$, pero más rápidamente que x^k, siendo k un número cualquiera racional menor que $\dfrac{1}{2}$.

Solución: Es de aplicación el siguiente teorema: Si se divide un infinito fundamental por otro inferior, el orden queda comprendido entre aquél y el que resulta de disminuir el parámetro tan poco como se quiera. Dividiendo $\sqrt{x}$ por $(\log_b x)^m$, la función $y = \dfrac{\sqrt{x}}{(\log_b x)^m}$, para $b > 1$, al tender $x \to +\infty$, tenderá a $+\infty$ más lentamente que $\sqrt{x}$ y un poco más rápidamente que x^k, para $k < \dfrac{1}{2}$. Otra función que cumple es: $\sqrt{x}\,(\ln x)^{-b}$.

L 100- Siendo $P = (1+\dfrac{a}{n^2})(1+\dfrac{2a}{n^2})\dots(1+\dfrac{3na}{n^2})\dots$, donde a es un número finito y positivo, hallar $\lim_{n\to\infty} P$,

Solución: Tomando logaritmos neperianos: $\lim_{n\to\infty} \ln P = \lim_{n\to\infty}\left[\ln(1+\dfrac{a}{n^2}) + \ln(1+\dfrac{2a}{n^2}) + \dots\right] =$ $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{a}{n}\left[\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\dots+\dfrac{3n}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a}{n^2}[1+2+\dots+3n] = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a}{n^2}\,\dfrac{3n(3n+1)}{2} = \dfrac{9a}{2}$. Luego se tiene que: $\lim P = e^{\frac{9a}{2}}$.

L 101- Dada la sucesión $U_1,\ U_2,\dots,\ U_n,\dots$, calcular $\lim_{n\to\infty} U_n$, sabiendo que $U_1 = 1$, $U_2 = 2^2$, $U_3 = 3^2$ y que $3U_{n+3} - U_{n+2} - U_{n+1} - Un = 0$.

Solución: Ecuación característica: $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, cuyas raíces son: 1 y $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}$ (cuyo módulo es $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y la tangente de su argumento θ es $\sqrt{2}$, por lo que: $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$). Luego se tiene: $U_n = A\cdot 1^n + (\dfrac{\sqrt{3}}{3})^n(B\cos n\theta + C\sin n\theta)$, $U_1 = A + (\frac{\sqrt{3}}{3})(B\cos\theta + C\sin\theta) =$ $= A + \dfrac{B}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{3}C = 1$, $U_2 = A + (\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2(B\cos 2\theta + C\sin 2\theta) = A - \dfrac{B}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{9}C = 4$, $U_3 = A +$

$+(\frac{\sqrt{3}}{3})^3(B\cos 3\theta + C\sin 3\theta) = A - \frac{5B}{27} + \frac{\sqrt{2}}{27}C = 9$, De donde: $A = 10$, $B = 0$, $C = -\frac{27}{\sqrt{2}}$, por lo que: $U_n = 10 - \frac{27}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin n\theta}{3^{\frac{n}{2}}}$. Por tanto: $\lim_{n\to\infty} U_n = 10$.

L 102- Se dan cuatro números positivos a_0, b_0, m, p y se considera la serie de razones $\frac{a_0}{b_0}$, $\frac{a_1}{b_1}, \ldots,$ $\frac{a_n}{b_n}, \ldots,$ sabiendo que $a_n = a_{n-1}\sqrt{mp^2+1} + mpb_{n-1}$ y que $b_n = pa_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{mp^2+1}$. Considerando la diferencia $a_n^2 - mb_n^2$, demostrar que la serie de dichas razones tiene límite cuando $n \to \infty$ y calcularlo.

Solución: Elevando al cuadrado: $a_n^2 = a_{n-1}^2(mp^2+1) + m^2p^2b_{n-1}^2 + 2mpa_{n-1}b_{n-1}\sqrt{mp^2+1}$, $mb_n^2 = mp^2a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2m(mp^2+1) + 2mpa_{n-1}b_{n-1}\sqrt{mp^2+1}$. Restando ambos valores, se tiene: $a_n^2 - mb_n^2 = a_{n-1}^2 - mb_{n-1}^2$, y así sucesivamente, hasta: $a_1^2 - mb_1^2 = a_0^2 - mb_0^2$. Sumando estas n igualdades, se tiene: $a_n^2 - mb_n^2 = a_0^2 - mb_0^2$. Luego: $\frac{a_n^2}{b_n^2} = m + \frac{a_0^2 - mb_0^2}{b_n^2}$. Como: $\lim_{n\to\infty} b_n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} = m$. Luego: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{m}$.

L 103- Dada la expresión $E = \frac{1}{x^{2n+1}}[a_1\sin x + a_2\sin 2x + a_3\sin 3x + \ldots + a_n\sin nx + \sin(n+1)x]$, elegir las constantes a de tal manera que la expresión tenga límite finito cuando $x \to 0$ y calcularlo.

Solución: Desarrollando $\sin nx$, se tiene: $\sin nx = nx - \frac{n^3x^3}{3!} + \frac{n^5x^5}{5!} - \ldots \pm \frac{n^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} \mp \ldots$ Por lo que: $E \cdot x^{2n+1} = x(a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n + n + 1) - \frac{x^3}{3!}(a_1 + 2^3a_2 + \ldots + n^3a_n + (n+1)^3) \pm \ldots \pm$ $\pm \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}(a_1 + 2^{2n-1}a_2 + \ldots + n^{2n-1}a_n + (n+1)^{2n-1}) \mp$ $\mp \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(a_1 + 2^{2n+1}a_2 + \ldots + n^{2n+1}a_n + (n+1)^{2n+1}) \pm \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}(\ldots) \mp \ldots$ Anulando los coeficientes de x, $x^3, \ldots,$ x^{2n-1} (un sistema S de n ecuaciones con n incógnitas), queda como sigue: $\lim_{x\to 0} E = \pm\frac{1}{(2n+1)!}[a_1 + 2^{2n+1}a_2 + \ldots + n^{2n+1}a_n + (n+1)^{2n+1}] = (-1)^n$. El sistema S que determina las constantes a, es el siguiente: $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n + n + 1 = 0$,
$a_1 + 2^3a_2 + \ldots + n^3a_n + (n+1)^3 = 0$, ..., $a_1 + 2^{2n-1}a_2 + \ldots + n^{2n-1}a_n + (n+1)^{2n-1} = 0$.
El determinante de los coeficientes de las incógnitas es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2^3 & \ldots & n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{2n-1} & \ldots & n^{2n-1} \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2^2 & \ldots & n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{2n-2} & \ldots & n^{2n-2} \end{vmatrix} = n!\mathrm{Vandermonde}(1, 2^2, \ldots, n^2) =$$

$= 1!3!5!\ldots(2n-1)!$. El valor de a_h viene dado por:

$$a_h = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & -(n+1) & \ldots & n \\ 1 & 2^3 & \ldots & -(n+1)^3 & \ldots & n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{2h-1} & \ldots & -(n+1)^{2h-1} & \ldots & n^{2h-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{2n-1} & \ldots & -(n+1)^{2n-1} & \ldots & n^{2n-1} \end{vmatrix}}{1!3!5!\ldots(2n-1)!} =$$

$$= \frac{-1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2^2 & \ldots & (n+1)^2 & \ldots & n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{2h-2} & \ldots & (n+1)^{2h-2} & \ldots & n^{2h-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{2n-2} & \ldots & (n+1)^{2n-2} & \ldots & n^{2n-2} \end{vmatrix}}{1!3!5!\ldots(2n-1)!} =$$

$$= \frac{-1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot n\cdot \text{Vandermonde}\,(1,2^2,\ldots,(n+1)^2,\ldots,n^2)}{1!3!5!\ldots(2n-1)!}.$$

En el cuadro siguiente se exponen los valores de los coeficientes a y de E para $n = 1,\ 2, 3,\ 4$:

n	a_1	a_2	a_3	a_4	E
1	–2				–1
2	5	–4			1
3	–14	14	–6		–1
4	42	–48	27	–8	1

L 104- ¿Se podría demostrar el teorema de Bolzano-Waierstrass del máximo y mínimo de una función continua exigiéndose la continuidad de dicha función sólo en el intervalo abierto (a,b)?

Solución: Supongamos una función monótona, continua en $[a,b]$, tiene un máximo absoluto en un extremo del intervalo, y un mínimo absoluto en el otro. Si sólo fuera continua en (a,b), tiene extremo superior e inferior, pero no máximo absoluto ni mínimo absoluto, ya que (suponiendo que $\underline{a}$ es extremo inferior), siempre se puede encontrar un punto del intervalo (a,b), mayor que otro dado de él, por ejemplo $\underline{a+2\epsilon}$, pues se podría coger el $\underline{a+\epsilon}$, $\underline{a+\frac{\epsilon}{2}}$, $\underline{a+\frac{\epsilon}{4}}$,..., por lo que la función carece de máximo absoluto. Siguiendo un razonamiento similar, también carece de mínimo absoluto. Luego la continuidad en $[a,b]$ es necesaria, aunque no suficiente.

L 105- Demostrar el teorema de Darboux: si $f(x)$ es continua y derivable en el intervalo (a,b), $f'(x)$ no puede pasar de un valor a otro en este intervalo sin pasar por todos los valores intermedios.

Solución: Si $f(a)$ y $f(b)$ son de signo contrario, $f(x)$ es creciente en uno y decreciente en otro, luego el máximo no se puede alcanzar en ellos, sino en un punto interior donde, por tanto, debe ser $f'(\xi) = 0$. Si k está comprendido entre $f'(a)$ y $f'(b)$, la función $f(x) - kx$ cambia de signo, luego en algún punto intermedio debe ser $f'(\xi) - k = 0$, es decir, $f'(\xi) = k$.

L 106- Dada la ecuación $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, hallar la condición que deben satisfacer sus coeficientes para que las ecuaciones $f'(x) = 0$ y $f'''(x) = 0$ tengan una raíz común. Supuesta cumplida dicha condición, indicar un procedimiento para resolver la ecuación $f(x) = 0$, y aplicarlo para $f(x) = 225x^4 + 1800x^3 + 5366x^2 + 7064x + 3465$.

Solución: $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$, $f'''(x) = 24ax + 6b$. Luego la raíz común es: $x = \frac{-b}{4a}$. Sustituyendo este valor en f', se tiene la condición: $8da^2 - 4abc + b^3 = 0$. Al desarrollar $f(x)$ en serie de potencias de $(x-m)$, se tiene la expresión: $f(x) = f(m) + \frac{f'(m)}{1!}(x-m) + \frac{f''(m)}{2!}(x-m)^2 + \frac{f'''(m)}{3!}(x-m)^3 + \frac{f^{(4}(m)}{4!}(x-m)^4$. Siendo $f'(m)$ y $f'''(m)$ nulas para $m = \frac{-b}{4a}$, se tiene: $f(x) = f(m) + \frac{f''(m)}{2!}(x-m)^2 + \frac{f^{(4}(m)}{4!}(x-m)^4 = 0$, es decir, una ecuación bicuadrada cuyas raíces son: $\pm\alpha$, $\pm\beta$, y por tanto las raíces de la ecuación dada son: $m\pm\alpha$, $m\pm\beta$. Para la ecuación dada se tiene que: $m = \frac{-1800}{4\cdot 225} = -2$, $f(-2) = 1$, $f'(-2) = 0$, $f''(-2) = 68$, $f'''(-2) = 0$, $f^{(4}(-2) = 5400$. Por tanto, se tiene la siguiente ecuación: $f(x+2) = 1 + \frac{68}{2}(x+2)^2 + \frac{5400}{4!}(x+2)^4 = 1 + 34(x+2)^2 + 225(x+2)^4$. Las raíces de esta ecuación en $(x+2)$, son: $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{5}$. Las raíces de la ecuación dada son: $-\frac{5}{3}$, $-\frac{7}{3}$, $-\frac{9}{5}$, $-\frac{11}{5}$.

L 107- Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n}{1}\frac{\ln(1!)}{\ln 1} + \binom{n}{2}\frac{\ln(2!)}{\ln 2^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{\ln(n!)}{\ln n^n}}{2^n - 1}$.

Solución: $A = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n}{1}\frac{\ln(1!)}{\ln 1} + \binom{n}{2}\frac{\ln(2!)}{\ln 2^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{\ln(n!)}{\ln n^n}}{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}}$. Aplicando Stolz se tiene que:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{n}\frac{\ln(n!)}{\ln n^n}}{\binom{n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi})}{n\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n + \frac{1}{2}\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi}}{n\ln n} = 1.$$

L 108- Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} A = \dfrac{(\frac{1}{2n})^p + (\frac{2}{2n})^p + (\frac{3}{2n})^p + \ldots + (\frac{2n}{2n})^p}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})^p + (\frac{1}{2} + \frac{2}{2n})^p + (\frac{1}{2} + \frac{3}{2n})^p + \ldots + (\frac{1}{2} + \frac{2n}{2n})^p}$.

Solución: Dividiendo numerador y denominador por $2n$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} A = \frac{\dfrac{(\frac{1}{2n})^p + (\frac{2}{2n})^p + (\frac{3}{2n})^p + \ldots + (\frac{2n}{2n})^p}{2n}}{\dfrac{(\frac{1}{2n})^p + (\frac{2}{2n})^p + (\frac{3}{2n})^p + \ldots + (\frac{2n}{2n})^p}{2n}} = \frac{\int_0^1 x^p dx}{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}+x\right)^p dx} = \frac{\left|\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right|_0^1}{\left|\frac{1}{p+1}(\frac{1}{2}+x)^{p+1}\right|_0^1} =$$

$$= \frac{1}{(\frac{1}{2}+1)^{p+1} - (\frac{1}{2})^{p+1}} = \frac{2^{p+1}}{3^{p+1} - 1}.$$

L 109- Siendo $U_n = \dfrac{(n+a_1)\ldots(n+a_k)}{(n+b_1)\ldots(n+b_k)}$, donde $\sum a_i = \sum b_i$, se sabe que $\lim \prod\limits_1^\infty U_n = \dfrac{\Gamma(1+b_1)\ldots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\ldots\Gamma(1+a_k)}$. Calcular $\lim \prod\limits_1^\infty \left[1 - \dfrac{4x^2}{(n\pi+x)^2}\right]$.

Solución: $\lim \prod\limits_1^\infty \left[1 - \dfrac{4x^2}{(n\pi+x)^2}\right] = \lim \prod\limits_1^\infty \left[1 - \dfrac{4(\frac{x}{\pi})^2}{(n+\frac{x}{\pi})^2}\right] =$

$$= \lim \prod_1^\infty \left[1 + \frac{\frac{2x}{\pi}}{n+\frac{x}{\pi}}\right]\left[1 - \frac{\frac{2x}{\pi}}{n+\frac{x}{\pi}}\right] = \lim \prod_1^\infty \frac{n+\frac{3x}{\pi}}{n+\frac{x}{\pi}} \cdot \frac{n-\frac{x}{\pi}}{n+\frac{x}{\pi}} =$$

$$= \frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\right]^2}{\Gamma(1+\frac{3x}{\pi}) \cdot \Gamma(1-\frac{x}{\pi})}.$$

L 110- Siendo $U_n = \dfrac{(n+a_1)\ldots(n+a_k)}{(n+b_1)\ldots(n+b_k)}$, donde $\sum a_i = \sum b_i$, se sabe que $\lim \prod\limits_1^\infty U_n = \dfrac{\Gamma(1+b_1)\ldots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\ldots\Gamma(1+a_k)}$. Calcular $\lim \prod\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \dfrac{4x^2}{(n\pi+x)^2}\right]$.

Solución: $\lim \prod\limits_1^\infty \left[1 - \dfrac{4x^2}{(n\pi+x)^2}\right] = \lim \prod\limits_1^\infty \cdot \prod\limits_0 \cdot \prod\limits_{-\infty}^{-1} \left[1 - \dfrac{4(\frac{x}{\pi})^2}{(n+\frac{x}{\pi})^2}\right] =$

$$= \frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\right]^2}{\Gamma(1+\frac{3x}{\pi}) \cdot \Gamma(1-\frac{x}{\pi})}(-3)\lim \prod_{-\infty}^{-1} \left[1 + \frac{\frac{2x}{\pi}}{n+\frac{x}{\pi}}\right]\left[1 - \frac{\frac{2x}{\pi}}{n+\frac{x}{\pi}}\right] =$$

$$= \frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\right]^2}{\Gamma(1+\frac{3x}{\pi}) \cdot \Gamma(1-\frac{x}{\pi})}(-3)\lim \prod_1^\infty \left[1 + \frac{\frac{2x}{\pi}}{-n+\frac{x}{\pi}}\right]\left[1 - \frac{\frac{2x}{\pi}}{-n+\frac{x}{\pi}}\right] =$$

$$= \frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\right]^2}{\Gamma(1+\frac{3x}{\pi}) \cdot \Gamma(1-\frac{x}{\pi})}(-3)\lim \prod_1^\infty \frac{n-\frac{3x}{\pi}}{n-\frac{x}{\pi}} \cdot \frac{n+\frac{x}{\pi}}{n-\frac{x}{\pi}} =$$

$$= \frac{-3\left[\Gamma\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\right]^2\left[\Gamma\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\right]^2}{\Gamma(1+\frac{3x}{\pi})\Gamma(1-\frac{x}{\pi})\Gamma(1-\frac{3x}{\pi})\Gamma(1+\frac{x}{\pi})}.$$

L 111- Siendo $U_n = \dfrac{(n+a_1)\ldots(n+a_k)}{(n+b_1)\ldots(n+b_k)}$, donde $\sum a_i = \sum b_i$, se sabe que $\lim \prod_1^{\infty} U_n = \dfrac{\Gamma(1+b_1)\ldots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\ldots\Gamma(1+a_k)}$. Calcular $\lim(1+\frac{x}{1})(1-\frac{x}{2})\ldots$

Solución: $\lim(1+\frac{x}{1})(1-\frac{x}{2})\ldots = \lim(\frac{1+x}{1})(\frac{2-x}{2})\ldots = \lim \prod_1^{\infty}(\frac{2n-1+x}{2n-1})(\frac{2n-x}{2n}) =$
$= \lim \prod_1^{\infty}\left(\dfrac{n-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}}{n-\frac{1}{2}}\right)\left(\dfrac{n-\frac{x}{2}}{n}\right) = \dfrac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{x+1}{2})\Gamma(\frac{2-x}{2})} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{x+1}{2})\Gamma(\frac{2-x}{2})}$.

L 112- Sea idénticamente $f(x) = f(2x)$. ¿Se puede afirmar sin más, que la función $f(x)$ es una constante? Estudiar lo que sucede en el origen, si se supone además la continuidad.

Solución: Con sólo la primera condición, la función no tiene por qué ser una constante, como se puede observar en la función de Dirichlet, en la que $f(x) = 0$, si x es irracional, y $f(x) = 1$, si x es racional. Ahora bien, si $f(x)$ es continua en el origen, ha de existir el límite ordinario, y al tender hacia él por valores de x del tipo $\frac{x}{2^n}$, los correspondientes valores de $y = f(\frac{x}{2^n}) \equiv f(x)$ forman sendas sucesiones idénticas, luego para la existencia del límite en $x = 0$, es preciso que todas las $f(x)$ sean iguales entre sí. Es decir, que $f(x)$ sea una constante.

L 113- Hallar el límite al que tiende $I = \int_a^b \dfrac{dx}{\sqrt{F(x)}}$, cuando $a \to b$, siendo a y b dos raíces consecutivas de $F(x) = 0$, siendo $F(x) > 0$ en (a,b). Este problema necesita del Cálculo para su resolución.

Solución: $F(x) = (x-a)(b-x)f(x)$. Sean a' y a'', los valores de x que corresponden al mayor y menor de los valores de $f(x)$ en el intervalo (a,b). Por tanto el valor de I se encuentra en el intervalo definido: $\dfrac{1}{\sqrt{f(a')}}\int_a^b \dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} < I < \dfrac{1}{\sqrt{f(a'')}}\int_a^b \dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$. Como se tiene que: $\int_a^b \dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \left|2\arctan\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}\right|_a^b = \pi$, el valor de I está comprendido entre $\dfrac{\pi}{\sqrt{f(a')}}$ y $\dfrac{\pi}{\sqrt{f(a'')}}$. Cuando $a \to b$, $a' \to a''$, por lo que: $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{f(a)}}$. Ahora bien, se tiene que: $F''(x) = -2f(x) - 4(x - \frac{a+b}{2})f'(x) + (x-a)(b-x)f'(x)$. Para $x = a = b$, $F''(a) = -2f(a)$, $f(a) = -\dfrac{F''(a)}{2}$. Por tanto: $\lim I = \dfrac{\pi}{\sqrt{f(a)}} = \pi\sqrt{\dfrac{-2}{F''(a)}}$.

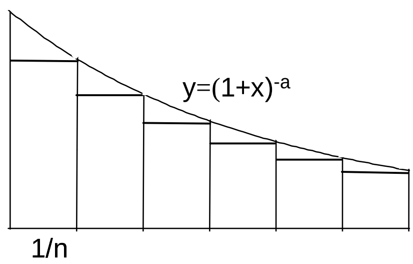
L 114- Sea (C) un conjunto infinito de puntos situados sobre una recta, y sea (C') su derivado. Demostrar que si (C') es numerable, lo es también (C).

Solución: El conjunto (C) se descompone en dos conjuntos: (C_0) formado por los puntos aislados, y (C_a) formado por los puntos de acumulación. El conjunto derivado (C') está formado por los puntos de acumulación de (C), de los que (C_a) pertenecen a (C), y (C'_a) no pertenecen a (C). El conjunto (C_0) es numerable por ser sus puntos aislados. El conjunto (C_a) es numerable, pues lo es $(C') = (C_a) + (C'_a)$. Luego (C) es numerable, al serlo (C_0) y (C_a).

Nota: Conjunto numerable es el coordinable con el conjunto natural $(1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n,\ldots)$. Si (C) no es infinito, no tiene puntos de acumulación. El punto A es de acumulación del conjunto (C), si en cualquier entorno reducido de A, hay infinitos puntos de (C). Los puntos de un conjunto, o son aislados o son de acumulación. El conjunto (C) es denso, si (C) está contenido en (C'), por tanto $(C_0) = 0$ y $(C) = (Ca)$. El conjunto (C) es cerrado o completo, si (C') está contenido en (C), por tanto $(C'_a) = 0$ y $(C') = (C_a)$. El conjunto (C) es perfecto (denso y cerrado), si (C) coincide con (C'), por tanto $(C_0) = 0$, $(C'_a) = 0$ y $(C) = (C') = (C_a)$. Si (C') es infinito, es cerrado, pues todo A de (C') tiene puntos de (C).

L 115- Calcular $L = \lim_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{a-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{n}{n+h})^{-a}\right]$. Este problema necesita del Cálculo para su resolución.

Solución: Se tiene que: $L = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{1}{a-1} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{h}{n})^{-a}\cdot\dfrac{1}{n}\right]$. Se considera $\dfrac{h}{n} = x$, con lo que: $\int_0^\infty (1+x)^{-a}dx = \left|\dfrac{(1+x)^{-a+1}}{-a+1}\right|_0^\infty = \dfrac{1}{a-1}$. Por tanto, $\dfrac{1}{a-1}$ es el área de la curva $y = (1+x)^{-a}$. La suma: $n\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{h}{n})^{-a}\dfrac{1}{n}$, corresponde a la suma de las áreas de los n rectángulos de base $\dfrac{1}{n}$, y altura igual a las ordenadas de la curva citada, correspondientes a las abscisas $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots$ Luego, el límite pedido corresponde al área de los n triángulos incluidos entre la citada curva y los rectángulos indicados. La suma de las áreas de estos triángulos viene dada por la expresión: $n\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}[y(0)-y(1)] + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}[y(1)-y(2)] + \ldots + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}[y(n-1)-y(n)]\right]$, cuyo límite para $n\to\infty$, es: $\dfrac{1}{2}[y(0)-y(\infty)] = \dfrac{1}{2}[1-0] = \dfrac{1}{2}$. Luego el límite pedido es: $\dfrac{1}{2}$.



L 116- Calcular $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n\pi}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^2+h^2}\right]$. Este problema necesita del Cálculo para su resolución.

Solución: Se tiene que: $L = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{\pi}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+(\frac{h}{n})^2}\cdot\dfrac{1}{n}\right]$. Se considera $\dfrac{h}{n} = x$, con lo que: $\int_0^\infty \dfrac{dx}{1+x^2} = |\arctan x|_0^\infty = \dfrac{\pi}{2}$. Por tanto, $\dfrac{\pi}{2}$ es el área de la curva $y = (1+x^2)^{-1}$. La suma $n\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{h}{n})^{-a}\dfrac{1}{n}$, corresponde a la suma de las áreas de los n rectángulos de base $\dfrac{1}{n}$, y altura igual a las ordenadas de la curva citada, correspondientes a las abscisas $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots$ Luego, por el mismo razonamiento que el del problema L 115, el límite pedido corresponde al área de los n triángulos incluidos entre la citada curva y los rectángulos indicados. La suma de las áreas de estos triángulos viene dada por la expresión: $n\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}[y(0)-y(1)] + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}[y(1)-y(2)] + \ldots + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}[y(n-1)-y(n)]\right]$, cuyo límite para $n\to\infty$, es: $\dfrac{1}{2}[y(0)-y(\infty)] = \dfrac{1}{2}[1-0] = \dfrac{1}{2}$. Luego el límite pedido es: $\dfrac{1}{2}$.

L 117- Siendo $M = \int_0^k f(x)dx$, hallar $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left[nM - \sum\limits_{i=0}^{kn} f(\dfrac{i}{n})\right]$, siendo n número natural. Este problema necesita del Cálculo para su resolución.

Solución: Sea $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m + \ldots$ Como $M = \int_0^k f(x)dx$, se tiene que: $M = \int_0^k (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m + \ldots)dx = \left|a_0x + a_1\dfrac{x^2}{2} + a_2\dfrac{x^3}{3} + \ldots + a_m\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + \ldots\right|_0^k =$
$= a_0k + a_1\dfrac{k^2}{2} + a_2\dfrac{k^3}{3} + \ldots + a_m\dfrac{k^{m+1}}{m+1} + \ldots$, $\quad f(\dfrac{i}{n}) = a_0 + a_1\dfrac{i}{n} + a_2(\dfrac{i}{n})^2 + \ldots + a_m(\dfrac{i}{n})^m + \ldots$,
Además: $\sum\limits_{i=0}^{kn} f(\dfrac{i}{n}) = (kn+1)a_0 + (\dfrac{1+2+\ldots+kn}{n})a_1 + \ldots + \left[\dfrac{1+2^m+\ldots+(kn)^m}{n^m}\right]a_m + \ldots$ Luego

se obtiene que: $\lim\left[nM-\sum_{i=0}^{kn}f(\frac{i}{n})\right]=(nk-nk-1)a_0+(n\frac{k^2}{2}-\frac{1+2+\ldots+kn}{n})a_1+$ $+\ldots+(n\frac{k^{m+1}}{m+1}-\frac{1+2^m+\ldots+(kn)^m}{n^m})a_m+\ldots$. Como se tienen los siguientes límites: $\lim(n\frac{k^2}{2}-\frac{1+2+\ldots+kn}{n})=n\frac{k^2}{2}-\frac{kn(kn+1)}{2n}=-\frac{k}{2}$; $\lim(n\frac{k^3}{3}-\frac{1+2^2+\ldots+(kn)^2}{n^2})=$ $=n\frac{k^3}{3}-\frac{nk(nk+1)(2nk+1)}{6n^2}=-\frac{k^2}{2}$; y como finalmente también se tiene: $\frac{a_m}{a_{m-1}}=\lim\frac{n\frac{k^{m+1}}{m+1}-\frac{1+2^m+\ldots+(kn)^m}{n^m}}{n\frac{k^m}{m}-\frac{1+2^{m-1}+\ldots+(kn)^{m-1}}{n^{m-1}}}=\frac{\frac{(kn)^{m+1}}{n^{m+2}-n^{m+1}}}{\frac{(kn)^m}{n^{m+1}-n^m}}=k$, se deduce que el coeficiente de a_m es: $-\frac{1}{2}k^m$.

Resumiendo: $L=\lim_{n\to\infty}\left[nM-\sum_{i=0}^{kn}f(\frac{i}{n})\right]=-a_0-\frac{1}{2}a_1k-\frac{1}{2}a_2k^2-\ldots-\frac{1}{2}a_mk^m-\ldots$

Operando: $L=-\frac{1}{2}a_0-\frac{1}{2}a_0-\frac{1}{2}a_1k-\frac{1}{2}a_2k^2-\ldots-\frac{1}{2}a_mk^m-\ldots=-\frac{1}{2}[f(0)+f(k)]$.

L 118- Siendo $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\tan\frac{\pi i}{4n}(1+\tan^2\frac{\pi i}{4n})$, calcular $S=\lim_{n\to\infty}S_n$ y $T=\lim_{n\to\infty}(Sn-S)$. Este problema necesita del Cálculo para su resolución.

Solución: Operando se tiene que: $S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\frac{\sin\frac{\pi i}{4n}}{\cos^3\frac{\pi i}{4n}}$. Haciendo: $x_i=\frac{\pi i}{4n}$, $dx_i=\frac{\pi}{4n}di$, se pasa la suma a integral: $S=\lim S_n=\frac{16}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^3x}dx=\frac{16}{\pi^2}\left|\frac{x}{2\cos^2x}-\frac{1}{2}\tan x\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4(\pi-2)}{\pi^2}$.
$T=\lim(S_n-S)=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]$, siendo $a=0$, $b=\frac{\pi}{4}$. Luego, $T=\frac{\pi}{8}\left|\frac{x\sin x}{\cos^3x}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}$.

L 119- Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{x+1}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^x}{\sqrt[n]{e^i}}$. Este problema necesita del Cálculo para su resolución.

Solución: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{x+1}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^x}{\sqrt[n]{e^i}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^x}{\sqrt[n]{e^i}\,n^x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\frac{i}{n})^x}{e^{\frac{i}{n}}}$. Haciendo: $\frac{i}{n}=y$, $\frac{1}{n}dy$, se tiene: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\frac{i}{n})^x}{e^{\frac{i}{n}}}=\int_0^{\infty}\frac{y^x}{e^y}dy=\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

L 120- Encontrar una serie S ordenada según las potencias enteras y positivas de x, de forma que la expresión $F=x(1+x)[2+(2-p)x]S''+[(p^2-p-2)x^2-4x-2]S'+\;+2p[1+(2-p)x]S$, sea idénticamente nula, siendo S' y S'', las series de las derivadas primeras y segundas de los términos de S, respecto de la variable x. Estudiar la convergencia de S y especialmente las soluciones que se anulan para $x=0$. Analizar los casos en que p es un número entero y positivo, especialmente los casos en que p es igual a $1,2,-1$.

Solución: Siendo $S=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\ldots$,
$S'=a_1+2a_2x+\ldots+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\ldots$,
$S''=2a_2+6a_3x+\ldots+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+n(n-1)a_nx^{n-2}+n(n+1)a_{n+1}x^{n-1}+\ldots$

Aplicadas estas series a F, se obtiene el coeficiente de x^n, que al igualarlo a cero, se obtiene: $(n-3)(n-p-1)(2-p)a_{n-1}+(n-2)[(4-p)n-p]a_n+2(n^2-1)a_{n+1}\equiv 0$, que es una ecuación de recurrencia que permite obtener los coeficientes de S. Por tanto, los sucesivos coeficientes en función de a_0 son: $a_1=pa_0$, $a_3=\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}a_0$, $a_4=\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}a_0,\ldots$, $a_n=\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n)}{n!}a_0=\binom{p}{n}a_0$. No se obtiene ninguna condición para a_2, que puede ser cualquiera. Por tanto: $S=a_0+\binom{p}{1}a_0x+a_2x^2+\ldots+\binom{p}{n}a_0x^n+\ldots=$
$=[a_2-\binom{p}{2}]x^2+a_0[1+\binom{p}{1}x+\binom{p}{2}x^2+\ldots+\binom{p}{n}x^n+\ldots]=[a_2-\binom{p}{2}]x^2+a_0(1+x)^p=$

$= bx^2 + a_0(1+x)^p$, donde b y a_0 pueden ser cualesquiera. La convergencia de S, es la misma que la del binomio $(1+x)^p$. Por tanto, converge si $|x| < 1$, diverge si $|x| > 1$, y para $|x| = 1$, converge si $p \geq 0$, y diverge si $p < 0$. Las soluciones que se anulan para $x = 0$, son de la forma $S = bx^2$. Para p entero y positivo, S es un polinomio entero de grado p. Para $p = 1$, $S = bx^2 + a_0(1+x)$. Para $p = 2$, $S = bx^2 + a_0(1+x)^2$. Para $p = -1$, $S = bx^2 + \dfrac{a_0}{1+x}$.

L 121- Calcular $L = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[\pi - \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{(n+i)\sqrt{i}}\right]$. Este problema necesita del Cálculo para su resolución.

Solución: Haciendo las sustituciones: $\dfrac{i}{n} = x$, $\dfrac{1}{n} = dx$, se pasa de la suma $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{(n+i)\sqrt{i}} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+\frac{i}{n})\sqrt{\frac{i}{n}}}$, a la integral $\int_0^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$. Haciendo: $x = \tan^2\theta$, se tiene: $\int_0^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2d\theta = \pi$. Por tanto, π es el área de la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}$. La suma $n\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{(n+i)\sqrt{i}} = n\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{(1+\frac{i}{n})\sqrt{\frac{i}{n}}}$, corresponde a la suma de las áreas de los n rectángulos de base $\dfrac{1}{n}$, y altura igual a las ordenadas de la curva citada, correspondientes a las abscisas $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots$ Luego el límite pedido corresponde al área de los n triángulos incluidos entre la citada curva y los rectángulos indicados. La suma de las áreas de estos triángulos es: $n\left[\frac{1}{2}\frac{1}{n}[y(0) - y(1)] + \frac{1}{2}\frac{1}{n}[y(1) - y(2)] + \ldots + \frac{1}{2}\frac{1}{n}[y(n-1) - y(n)]\right]$, cuyo límite para $n \to \infty$, es $\frac{1}{2}[y(0) - y(\infty)] = \frac{1}{2}[\infty - 0] = \infty$. Luego el límite pedido es ∞.

L 122- Demostrar que si $f(x)$ es una función positiva no creciente, y cuyo límite es cero para $x \to \infty$, la serie $\sum f(n)$, es convergente si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)} < 1$, y es divergente si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)} > 1$.

Solución: Suponiendo que se verifica que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)} < 1$, entonces desde un $x \geq A$, se tiene que $\dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)} < p$, siendo $0 < p < 1$, es decir que $e^x f(e^x) < pf(x)$. Integrando, se tiene: $\int_A^x e^x f(e^x)dx < p\int_A^x f(x)dx$. Haciendo las sustituciones: $e^x = t$, $e^x dx = dt$, $e^x = x'$, $e^A = A'$, se tiene: $\int_{A'}^{x'} f(t)dt < p\int_A^x f(x)dx$. Luego se obtienen las siguientes relaciones entre las integrales: $(1-p)\int_{A'}^{x'} f(t)dt < p\left[\int_A^x f(x)dx - \int_{A'}^{x'} f(x)dx\right] = p\left[\int_A^{A'} f(x)dx + \int_{A'}^{x'} f(x)dx + \int_{x'}^{x} f(x)dx - \int_{A'}^{x'} f(x)dx\right] =$
$= p\left[\int_A^{A'} f(x)dx - \int_x^{x'} f(x)dx\right] < p\int_A^{A'} f(x)dx$. Es decir: $(1-p)\int_{A'}^{x'} f(x)dx < p\int_A^{A'} f(x)dx$. Como A y A' son fijos, la integral $\int_A^{A'} f(x)dx$ está acotada y como $f(x)$ es no creciente, al tender x' a ∞, tiene límite finito. Luego $\int_{A'}^{\infty} f(x)dx$ es convergente y la serie $\sum f(n)$ también lo es. Análogamente, si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)} > 1$, $e^x f(e^x) > pf(x)$ para un valor de $x > A$. Integrando, se tiene: $\int_A^x e^x f(e^x)dx > p\int_A^x f(x)dx$, de donde $\int_{A'}^{x'} f(x)dx > p\int_A^x f(x)dx$, y procediendo como antes, se tiene

que: $\int_{A'}^{x'} f(x)dx > k,$ luego $\int_{A'}^{\infty} f(x)dx$ es divergente, siéndolo también $\sum f(n)$.

L 123- Calcular $E = \lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{b-a}{n})\right]$. Este problema necesita del Cálculo para su resolución.

Solución: Desarrollando $f(x)$ en un entorno de a, utilizando la fórmula de Taylor, se tiene que: $\sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{b-a}{n}) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{f^{(p}(a)}{p!}(\frac{b-a}{2n})^p S_p$, siendo $S_p = 1+3^p+5^p+\ldots+(2n-1)^p+\ldots$ Aplicando la fórmula sumatoria de Mac Laurin, se tiene la siguiente igualdad: $S_p = \frac{1}{2(p+1)}\left[(2n)^{p+1} - \frac{p(p-1)}{3!}(2n)^{p-1} + \frac{p(p-1)(p-2)}{4!}(2n)^{p-2}\right]$. Tomando valores para $p \geq 2$, $S_0 = n$, $S_1 = n^2$. Luego se obtiene que: $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{b-a}{2}) =$ $= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{f^{(p}(n)}{p!}\frac{(b-a)^{p+1}}{p+1} - \frac{(b-a)^2}{24n^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{f^{(p}(a)}{p!}\frac{(b-a)^{p-1}}{p} + 0(\frac{1}{n^3})$. Teniendo en cuenta el significado de los coeficientes en el desarrollo de Taylor, esta última expresión es igual a: $\int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)^2}{24n^2}[f'(b)-f'(a)] + 0(\frac{1}{n^3})$. Sustituyendo este valor en la definición de E, se tiene: $E = \lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{(b-a)^2}{24n^2}(f'(b)-f'(a)) + 0(\frac{1}{n^3})\right] = \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b)-f'(a))$.

L 124- Encontrar una función que en el punto (a,b), tenga límites distintos en distintas direcciones. Demostrar que la función $z = \frac{y-3}{x-2}$, definida en el conjunto abierto formado por los puntos interiores al círculo $x^2+y^2 = 4$, es continua en él, pero no uniformemente continua.

Solución: La función $z = \frac{\alpha x+\beta y}{\gamma x+\delta y}$, tiene límites distintos en $(0,0)$, según las distintas direcciones. Trasladada al punto (a,b), se tiene la función pedida $z = \frac{\alpha x+\beta y-a\alpha-b\beta}{\gamma x+\delta y-a\gamma-b\delta}$. En cualquier punto del intervalo abierto, $0 \leq x^2+y^2 < 4$, la función $z = \frac{y-3}{x-2}$ es continua, ya que el límite de z existe y coincide con el valor que toma la función en dicho punto. En los puntos en los que $x = 2$, la función no es continua, pero están fuera del conjunto definido. Ahora bien, la función no es uniformemente continua, pues dado un punto (x_1,y_1), tal que $\sqrt{x_1^2+y_1^2} = 2-\varepsilon$, se tiene que: $|z(x_1,y_1) - z(x_1+\varepsilon, y_1+\varepsilon)| \not< \eta$, ya que la función pasa de valores finitos a valores mayores que cualquier número por grande que este sea.

L 125- Calcular $\lim \alpha\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha}$, para $\alpha \to +0$. Este problema necesita del Cálculo para su resolución.

Solución: Como se tiene que: $\frac{1}{1^{1+\alpha}} + \frac{1}{2^{1+\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^{1+\alpha}} - \int_1^n \frac{dx}{x^{1+\alpha}} < \frac{1}{1^{1+\alpha}} = 1$, se obtienen las desigualdades: $\int_1^n \frac{dx}{x^{1+\alpha}} < \sum_1^{n-1} n^{-1-\alpha} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$. Luego, $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}} \leq \sum_1^{\infty} n^{-1-\alpha} \leq 1 + \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}}$. Como $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \left|-\frac{1}{\alpha}x^{-\alpha}\right|_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha}$, se tiene que: $\frac{1}{\alpha} \leq \sum_1^{\infty} n^{-1-\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha}$, o bien: $1 \leq \alpha\sum_1^{\infty} n^{-1-\alpha} \leq \alpha + 1$. Luego, $\lim_{\alpha\to+0} \alpha\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha} = 1$.

L 126- Sabiendo que $\lim\left[\lambda(a_{n+1}-a_n) + (1-\lambda)\frac{a_n}{n}\right] = A$, donde $\lambda > 0$, calcular $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$.

Solución: Como a_n no puede depender de potencias de n iguales o superiores a 2, pues en caso contrario $\frac{a_n}{n}$ sería infinito, y A también, se pueden plantear las siguientes igualdades:

$a_n = a_0 + a_1 n$, $a_{n+1} = a_0 + a_1(n+1)$. Luego se tiene que: $a_{n+1} - a_n = a_1$. Por lo que: $A = \left[\lambda a_1 + (1-\lambda)\dfrac{a_0 + a_1 n}{n}\right] = \lambda a_1 + (1-\lambda)a_1 + \dfrac{a_0(1-\lambda)}{n}$. Por tanto, para $n \to \infty$, $A = a_1$. De donde se deduce que: $a_n = a_0 + a_1 n = a_0 + An$, $a_{n+1} = a_0 + a_1(n+1) = a_0 + A(n+1)$, obteniéndose que: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = A$.

L 127- Se sabe que $f(x)$ es una función positiva, monótona decreciente, tal que $f(x) \to 0$, cuando $x \to \infty$, y que $\int_a^\infty f(x)dx$ es divergente. Calcular $\lim[f_1 - (f_1 + f_2)x + (f_1 + f_2 + f_3)x^2 + \ldots]$, en función de $S = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} f(n)$.

Solución: $\lim[f_1 - (f_1 + f_2)x + (f_1 + f_2 + f_3)x^2 + \ldots] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f_1 - f_2 x + f_3 x^2 - \ldots}{1+x} = \dfrac{S}{2}$.

Sección M - SERIES

M 1- Calcular la suma $\dfrac{3}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{5}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{7}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{201}{100\cdot 101\cdot 102}$.

Solución: $U_n=\dfrac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2n}+\dfrac{2}{2n+2}-\dfrac{3}{2n+4}$. Desarrollando, se tiene:
$U_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}-\dfrac{3}{6}(a)$, $U_2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{6}(a)-\dfrac{3}{8}(b)$, $U_3=\dfrac{1}{6}(a)+\dfrac{2}{8}(b)-\dfrac{3}{10}(c)$,
$U_4=\dfrac{1}{8}(b)+\dfrac{2}{10}(c)-\dfrac{3}{12}(d)$,..., $U_{98}=\dfrac{1}{196}(f)+\dfrac{2}{198}(g)-\dfrac{3}{200}(h)$,
$U_{99}=\dfrac{1}{198}(g)+\dfrac{2}{200}(h)-\dfrac{3}{202}$, $U_{100}=\dfrac{1}{200}(h)+\dfrac{2}{202}-\dfrac{3}{204}$. Las tres fracciones marcadas con (a) se anulan. Lo mismo sucede con las marcadas con (b), (c), $(d),\ldots,$ (h), quedando como suma de los cien términos las siguientes fracciones:
$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{202}+\dfrac{2}{202}-\dfrac{3}{204}=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{202}-\dfrac{3}{204}=\dfrac{4225}{3434}\simeq 1,23.$

M 2- Calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\dfrac{2n+1}{n(n+2)(n+4)}$.

Solución: $U_n=\dfrac{2n+1}{n(n+2)(n+4)}=\dfrac{1}{8n}+\dfrac{6}{8(n+2)}-\dfrac{7}{8(n+4)}$. Desarrollando se tiene:
$U_1=\dfrac{1}{8}+\dfrac{6}{24}-\dfrac{7}{40}(a)$, $U_2=\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}-\dfrac{7}{48}(b)$, $U_3=\dfrac{1}{24}+\dfrac{6}{40}(a)-\dfrac{7}{56}(c)$,
$U_4=\dfrac{1}{32}+\dfrac{6}{48}(b)-\dfrac{7}{64}(d)$, $U_5=\dfrac{1}{40}(a)+\dfrac{6}{56}(c)-\dfrac{7}{72}(e)$,...,
$U_{96}=\dfrac{1}{8\cdot 96}(f)+\dfrac{6}{8\cdot 98}(g)-\dfrac{7}{8\cdot 100}(h)$, $U_{97}=\dfrac{1}{8\cdot 97}(i)+\dfrac{6}{8\cdot 99}(j)-\dfrac{7}{8\cdot 101}$,
$U_{98}=\dfrac{1}{8\cdot 98}(g)+\dfrac{6}{8\cdot 100}(h)-\dfrac{7}{8\cdot 102}$, $U_{99}=\dfrac{1}{8\cdot 99}(f)+\dfrac{6}{8\cdot 101}-\dfrac{7}{8\cdot 103}$,
$U_{100}=\dfrac{1}{8\cdot 100}(h)+\dfrac{6}{8\cdot 102}-\dfrac{7}{8\cdot 104}$. Las tres fracciones marcadas con (a), (b), $(c),\ldots,$ (h) se anulan, quedando como suma de los cien términos las siguientes fracciones:
$\dfrac{1}{8}+\dfrac{6}{24}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{32}-\dfrac{7}{8\cdot 101}-\dfrac{7}{8\cdot 102}+\dfrac{6}{8\cdot 101}-\dfrac{7}{8\cdot 103}+\dfrac{6}{8\cdot 102}-$
$-\dfrac{7}{8\cdot 104}=\dfrac{13}{24}-\dfrac{1}{808}-\dfrac{1}{816}-\dfrac{7}{824}-\dfrac{7}{832}\simeq 0,5223.$

M 3- Calcular la suma de la serie $\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots$

Solución: $U_n=\dfrac{1}{n(n+2)(n+4)}=\dfrac{1}{8n}-\dfrac{1}{4(n+2)}+\dfrac{1}{8(n+4)}=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)-$
$-\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{11}{96}\simeq 0,1146.$

M 4- Demostrar por inducción que la suma de los cubos de los n primeros números naturales viene dada por la fórmula $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Solución: Se cumple para $n=1$, $n=2$, etc. Suponiendo que se cumple para $n=h$, hay que comprobar que se cumple para $n=h+1$. En efecto, para $n=h$ se tiene: $1^3+2^3+3^3+\ldots+h^3=$
$=\dfrac{h^2(h+1)^2}{4}$, y para $n=h+1$ se tiene: $1^3+2^3+3^3+\ldots+h^3+(h+1)^3=\dfrac{(h+1)^2(h+2)^2}{4}$.
Restando ambas expresiones: $\dfrac{(h+1)^2[(h+2)^2-h^2]}{4}=(h+1)^2\cdot\dfrac{4h+4}{4}=(h+1)^3$, con lo que queda demostrado.

M 5- Demostrar por inducción que para todo valor de n se verifica que:
$(p-1)(1+p+p^2+\ldots+p^n)+1=p^{n+1}$.

Solución: Para $p=1$, $p=2$, se verifica. Suponiendo que se verifica para $n=h$, se tiene:
$(p-1)(1+p+p^2+\ldots+p^h)+1=p^{h+1}$. Luego para $n=h+1$, se debe tener:
$(p-1)(1+p+p^2+\ldots+p^h+p^{h+1})+1=p^{h+2}$. Restando ambas expresiones:
$(p-1)p^{h+1}=p^{h+2}-p^{h+1}$, con lo que queda demostrado.

M 6- Calcular la suma: $S = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots$

Solución: $U_n = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{1}{3(n+2)} - \frac{9}{3(n+3)} + \frac{18}{3(n+4)} - \frac{10}{3(n+5)}$

$U_1 = \frac{1}{9} - \frac{9}{12} + \frac{18}{15} - \frac{10}{18}(a)$

$U_2 = \frac{1}{12} - \frac{9}{15} + \frac{18}{18}(a) - \frac{10}{21}(b)$

$U_3 = \frac{1}{15} - \frac{9}{18}(a) + \frac{18}{21}(b) - \frac{10}{24}(c)$

$U_4 = \frac{1}{18}(a) - \frac{9}{21}(b) + \frac{18}{24}(c) - \frac{10}{27}(d)$, . . .

Las cuatro fracciones marcadas con (a), se anulan, así como las cuatro marcadas con (b), etc. Luego, $S = \frac{1}{9} - \frac{9}{12} + \frac{18}{15} + \frac{1}{12} - \frac{9}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{9} = 0,\overset{\frown}{1}.$

M 7- Calcular: $S = 1^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + 100^2\left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$

Solución: Partiendo de: $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{101} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$, y haciendo $\frac{1}{2} = x$, se tiene: $1 + x + x^2 + \ldots + x^{100} = \frac{x^{101} - 1}{x - 1}$. Sea la función: $\varphi(t) = \frac{x^{101}e^{101t} - 1}{xe^t - 1} =$

$= 1 + xe^t + \ldots + x^{100}e^{100t}$. Derivando respecto a t: $\varphi'(t) = xe^t + \ldots + x^{100}100e^{100t} =$

$= \frac{100x^{102}e^{102t} - x^{101}e^{101t}101 + xe^t}{(xe^t - 1)^2}$. Volviendo a derivar respecto a t, se tiene: $\varphi''(t) = xe^t + \ldots + x^{100}100^2e^{100t} =$

$$= \frac{(100x^{102}102e^{102t} - x^{101}101^2e^{101t} + xe^t)(xe^t - 1)^2 - 2(xe^t - 1)xe^t(100x^{102}e^{102t} - x^{101}e^{101t}101 + xe^t)}{(xe^t - 1)^4}$$

Haciendo las siguientes sustituciones: $x = \frac{1}{2}$, $t = 0$, se tiene la suma pedida: $S = \varphi''\left(t = 0, x = \frac{1}{2}\right) = 40800\left(\frac{1}{2}\right)^{102} - 4044\left(\frac{1}{2}\right)^{101} - 404\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + 6 = 6 + \frac{3887}{2^{99}} \simeq 6.$

M 8- Calcular: $1^2\binom{100}{1}2 + 2^2\binom{100}{2}2^2 + \ldots + 100^2\binom{100}{100}2^{100}.$

Solución: Se parte de la igualdad: $\binom{100}{1}2 + \binom{100}{2}2^2 + \ldots + \binom{100}{100}2^{100} = (1+2)^{100} - 1$. Se hace: $f(t) = \binom{100}{1}xe^t + \binom{100}{2}x^2 2e^{2t} + \ldots + \binom{100}{100}x^{100}100e^{100t} = (1 + xe^t)^{100} - 1$. Derivando dos veces, se tiene: $f'(t) = \binom{100}{1}xe^t + \binom{100}{2}x^2 2e^{2t} + \ldots + \binom{100}{100}x^{100}100e^{100t} = 100(1 + xe^t)^{99}$,

$f''(t) = \binom{100}{1}xe^t + \binom{100}{2}x^2 2^2e^{2t} + \ldots + \binom{100}{100}x^{100}100^2e^{100t} =$
$= 100[99(1 + xe^t)^{98}x^2e^{2t} + xe^t(1 + xe^t)^{99}]$.

Luego: $f''(t = 0, x = 2) = 100[99 \cdot 3^{98}2^2 + 2 \cdot 3^{99}] = 13.400 \cdot 3^{99}$.

M 9- Demostrar por inducción que la suma de los n primeros términos de la sucesión a, b, $a + b$, $a + 2b$, $2a + 3b$, $3a + 5b$, $5a + 8b$,..., es igual al término $(n + 2)$-ésimo disminuido en b.

Solución: Se comprueba fácilmente que la fórmula es cierta para los valores de $n = 1, 2,$ etc. La ley de formación es: $U_{n+2} = U_n + U_{n+1}$. Se supone que: $\sum_{n=1}^{h} U_n = U_{h+2}$. Sumando U_{h+1} a los dos miembros de la igualdad, se tiene: $\sum_{n=1}^{h} U_n + U_{h+1} = U_{h+2} + U_{h+1}$. Luego: $\sum_{n=1}^{h+1} U_n = U_{n+3}$, puesto que por la ley de formación $U_{n+3} = U_{n+2} + U_{n+1}$, con lo que queda demostrado.

M 10- Calcular: $C = \binom{m}{1}\cos a + 2\binom{m}{2}\cos 2a + \ldots + m\binom{m}{m}\cos ma.$

Solución: $C = \sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n}\cos na$. Y sea: $S = \sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n}\sin na$. Por tanto: $C + iS = \sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n}e^{nai}$.

Haciendo: $x = e^{ai}$, $C + iS = \sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n}x^n = (1 + x)^m - 1 = y$. Derivando: $y' = m(1 + x)^{m-1}$.

Luego: $C+iS = x\cdot y' = me^{ai}(1+e^{ai})^{m-1} = me^{ai}e^{\frac{ai(m-1)}{2}}\left[e^{\frac{-ai}{2}}+e^{\frac{ai}{2}}\right]^{m-1} =$
$= me^{\frac{ai(m+1)}{2}}\left[\cos\frac{a}{2}-i\sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}+i\sin\frac{a}{2}\right]^{m-1} = m2^{m-1}e^{\frac{m+1}{2}ai}\cos^{n-1}\frac{a}{2}$.
Luego la suma pedida es: $C = m2^{m-1}\cos(\frac{m+1}{2}a)\cos^{n-1}\frac{a}{2}$.

M 11- Calcular las sumas: $S = \frac{\sin(a+b)}{1!}+\frac{2^2\sin(a+2b)}{2!}+\ldots+\frac{n^2\sin(a+nb)}{n!}$,
$C = \frac{\cos(a+b)}{1!}+\frac{2^2\cos(a+2b)}{2!}+\ldots+\frac{n^2\cos(a+nb)}{n!}$.

Solución: $C+iS = \frac{1}{1!}e^{(a+b)i}+\frac{2^2}{2!}e^{(a+2b)i}+\ldots+\frac{n^2}{n!}e^{(a+nb)i} = e^{ai}(\frac{1}{1!}e^{bi}+\ldots+\frac{n^2}{n!}e^{nbi}) = e^{ai}\cdot A$. Haciendo: $e^{bi}=x$, se tiene: $A = x+\ldots+\frac{n^2}{n!}x^n$. Como: $e^x = 1+\ldots+\frac{n}{n!}x^{n-1}$, multiplicando por x y derivando: $1+\ldots+\frac{n^2x^{n-1}}{n!} = e^x+x^2e^x = e^x(1+x^2)$. De donde: $A = xe^x(1+x^2)$. Por tanto: $C+iS = e^{ai}e^{bi}e^{ebi}(1+e^{2bi}) = e^{(a+b)i}e^{\cos b}e^{i\sin b}(1+e^{2bi}) = e^{\cos b}[e^{(a+b+\sin b)i}+e^{(a3b+\sin b)i}]$. Luego las sumas son: $S = e^{\cos b}[\sin(a+b+\sin b)+\sin(a+3b+\sin b)]$,
$C = e^{\cos b}[\cos(a+b+\sin b)+\cos(a+3b+\sin b)]$.

M 12- Calcular $\sum_{n=1}^{m} n\binom{m}{n}\cos^2 nx$.

Solución: Sean: $A=\sum_{n=1}^{m} n\binom{m}{n}\cos^2 nx$, $B=\sum_{n=1}^{m} n\binom{m}{n}\sin^2 nx$. Luego: $A+B=\sum_{n=1}^{m} n\binom{m}{n} = m\cdot 2^{m-1}$, $A-B = D = \sum_{n=1}^{m} n\binom{m}{n}\cos 2nx$. Sean: $E=\sum_{n=1}^{m} n\binom{m}{n}\sin 2nx$, $F = D+iE = \sum_{n=1}^{m} n\binom{m}{n}e^{2nxi}$. Haciendo: $y = e^{2xi}$, $F=\sum_{n=1}^{m} n\binom{m}{n}y^n$, se tiene: $\sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n}y^n = (1+y)^m-1$, $\sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n}ny^{n-1} = m(1+y)^{m-1} =$
$= F = me^{2xi}(1+e^{2xi})^{m-1} = me^{2xi}e^{x(m-1)i}(e^{-xi}+e^{xi})^{m-1} = me^{(m+1)xi}(2\cos x)^{m-1}$. De donde se tiene que: $D = m\cdot 2^{m-1}\cos^{m-1}x\cdot\cos(m+1)x$, $2A = m\cdot 2^{m-1}+D$. Por tanto, la suma pedida es: $A = m\cdot 2^{m-2}[1+\cos^{m-1}x\cdot\cos(m+1)x]$.

M 13- Calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+n)\cos na}{n!}$.

Solución: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+n)\cos na}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cos na}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos na}{n!} = A+B$. Siendo: $B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos na}{n!}$, se hace: $D=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin na}{n!}$. Haciendo: $e^{ai}=x$, se tiene: $B+Di = \sum\frac{nx^n}{n!} = xe^x$. Siendo: $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cos na}{n!}$, se hace: $E=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sin na}{n!}$. Luego: $A+iE = \sum\frac{n^2x^n}{n!} = x(xe^x)' = x(e^x+xe^x)$. Por tanto, la suma pedida es la parte real de la siguiente expresión: $xe^x+x(e^x+xe^x) = xe^x(2+x) = (\cos a+i\sin a)e^{\cos a+i\sin a}(2+\cos a+i\sin a) =$
$= (\cos a+i\sin a)e^{\cos a}[\cos(\sin a)+i\sin(\sin a)](2+\cos a+i\sin a)$. Operando, dicha parte real es: $[\cos a\cos(\sin a)-\sin a\sin(\sin a)](2+\cos a)-\sin a[\sin a\cos(\sin a)+\cos a\sin(\sin a)] =$
$= (\cos 2a+2\cos a)\cos(\sin a)-(\sin 2a+2\sin a)\sin(\sin a)$.

M 14- Calcular: $S = \binom{m}{2}+\binom{m}{6}+\binom{m}{10}+\ldots$

Solución: Se parte de las siguientes cuatro igualdades:
$A = (1+x)^m = 1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\binom{m}{4}x^4+\ldots$
$B = (1-x)^m = 1-\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2-\binom{m}{3}x^3+\binom{m}{4}x^4-\ldots$
$C = (1+xi)^m = 1+\binom{m}{1}xi-\binom{m}{2}x^2-\binom{m}{3}x^3i+\binom{m}{4}x^4+\ldots$
$D = (1-xi)^m = 1-\binom{m}{1}xi-\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3i+\binom{m}{4}x^4+\ldots$ Para $x=1$, se tiene que: $\frac{A+B-C-D}{4} = \binom{m}{2}+\binom{m}{6}+\binom{m}{10}+\ldots$, que es la suma pedida. Luego se obtiene que: $S = \binom{m}{2}+\binom{m}{6}+\binom{m}{10}+\ldots = \frac{2^m+(1+i)^m+(1-i)^m}{4} =$

$$= \frac{2^m + 2^{\frac{m}{2}}(\cos\frac{m\pi}{4} + i\sin\frac{m\pi}{4}) + 2^{\frac{m}{2}}(\cos\frac{-m\pi}{4} + i\sin\frac{-m\pi}{4})}{4} =$$

$$= \frac{2^m + 2^{\frac{m}{2}+1}\cos\frac{m\pi}{4}}{4} = 2^{m-2} + 2^{\frac{m-2}{2}}\cos\frac{m\pi}{4}.$$

M 15- Calcular $\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \cos^2 na \sin^2 nb$.

Solución: $S = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \cos^2 na \sin^2 nb = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \frac{1+\cos 2na}{2} \cdot \frac{1-\cos 2nb}{2} =$

$= \sum_{n=0}^{m} \frac{\binom{m}{n}}{4}(1+\cos 2na - \cos 2nb - \cos 2na \cos 2nb) =$

$= \sum_{n=0}^{m} \frac{\binom{m}{n}}{4}(1+\cos 2na - \cos 2nb - \frac{\sin 2n(a+b) - \sin 2n(a-b)}{2}) =$

$= \sum_{n=0}^{m} \frac{\binom{m}{n}}{4} + \sum_{n=0}^{m} \frac{\binom{m}{n}}{4}\cos 2na - \sum_{n=0}^{m} \frac{\binom{m}{n}}{4}\cos 2nb - \sum_{n=0}^{m} \frac{\binom{m}{n}}{8}\sin 2n(a+b) + \sum_{n=0}^{m} \frac{\binom{m}{n}}{8}\sin 2n(a-b).$

Siendo: $A = \sum_{n=0}^{m} \frac{\binom{m}{n}}{4} = \frac{2^m}{4} = 2^{m-2}$, $B = \sum_{n=0}^{m} \frac{\binom{m}{n}}{4}\cos 2na = 2^{m-2}\cos ma \cos^m a,$

$C = \sum_{n=0}^{m} \frac{\binom{m}{n}}{4}\cos 2nb = 2^{m-2}\cos mb \cos^m b,$

$D = \sum_{n=0}^{m} \frac{\binom{m}{n}}{8}\sin 2n(a+b) = 2^{m-3}\sin m(a+b)\cos^m(a+b),$

$E = \sum_{n=0}^{m} \frac{\binom{m}{n}}{8}\sin 2n(a-b) = 2^{m-3}\sin m(a-b)\cos^m(a-b)$, se tiene que: $S = A+B-C-D+E =$
$= 2^{m-2} + 2^{m-2}\cos ma \cos^m a - 2^{m-2}\cos mb \cos^m b - 2^{m-3}\sin m(a+b)\cos^m(a+b) +$
$+2^{m-3}\sin m(a-b)\cos^m(a-b).$

M 16- Calcular $C = \cos^4 a + \cos^4 2a + \ldots + \cos^4 ma$.

Solución: $C = \sum_{n=1}^{m} \cos^4 na = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{m}(1+2\cos 2na + \cos^2 2na) =$

$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{m}(1+2\cos 2na + \frac{1+\cos 4na}{2}) = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{m}(3+4\cos 2na + \cos 4na).$

Como: $\sum_{n=1}^{m} \cos nx = \frac{\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{m+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$, se tiene que:

$$C = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{m}(3+4\cos 2na+\cos 4na) = \frac{1}{8}\left[3m + 4\frac{\sin ma \cos(m+1)a}{\sin a} + \frac{\sin 2ma \cos 2(m+1)a}{\sin 2a}\right].$$

M 17- Calcular $\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \cos^3 na$.

Solución: $\cos^3 a = \frac{1}{2^3}(2\cos 3a + 3\cos a + 3).$

$S = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \cos^3 na = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \frac{1}{2^3}(2\cos 3na + 3\cos na + 3) = A+B+C.$

$A = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \frac{1}{2^3} 2\cos 3na = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}\cos 3na = 2^{m-2}(\cos\frac{3a}{2})^m \cos\frac{3ma}{2},$

$B = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \frac{1}{2^3} 3\cos na = \frac{3}{8}2^m(\cos\frac{a}{2})^m\cos\frac{ma}{2} = 3 \cdot 2^{m-3}(\cos\frac{a}{2})^m\cos\frac{ma}{2},$

$C = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n} = 3 \cdot 2^{m-3}.$

$S = A + B + C = 2^{m-2}(\cos\frac{3a}{2})^m \cos\frac{3ma}{2} + 3\cdot 2^{m-3}(\cos\frac{a}{2})^m \cos\frac{ma}{2} + 3\cdot 2^{m-3}$.

M 18- Calcular $S = \cos^6 x + \cos^6 2x + \cos^6 3x + \ldots + \cos^6 mx$.

Solución: $\cos^6 x = \frac{1}{2^6}(2\cos 6x + 12\cos 4x + 60\cos 2x + 20)$.

$S = \frac{1}{2^6}(2\sum_{n=1}^{m}\cos 6nx + 12\sum_{n=1}^{m}\cos 4nx + 60\sum_{n=1}^{m}\cos 2nx + \sum_{n=1}^{m} 20) = \frac{1}{2^6}(A+B+C+D)$.

$A = 2\sum_{n=1}^{m}\cos 6nx = 2\frac{\sin 3(n+1)x\cos 3nx}{\sin 3x}$, $B = 12\sum_{n=1}\cos 4nx = 12\frac{\sin 2(n+1)x\cos 2nx}{\sin 2x}$,

$C = 60\sum_{n=1}^{m}\cos 2nx = 60\frac{\sin(n+1)x\cos nx}{\sin x}$, $D = \sum_{n=1}^{m} 20 = 20m$.

$S = \frac{1}{2^5}\left[\frac{\sin 3(n+1)x\cos 3nx}{\sin 3x} + 6\frac{\sin 2(n+1)x\cos 2nx}{\sin 2x} + 30\frac{\sin(n+1)x\cos nx}{\sin x} + 10m\right]$.

M 19- Calcular $S = \sum_{n=0}^{m}\binom{2m}{2n}\cos^2 n$.

Solución: $S = \sum_{n=0}^{m}\binom{2m}{2n}\frac{1+\cos 2n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}\binom{2m}{2n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}\binom{2m}{2n}\cos 2n = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.

$(1+x)^{2m} = \binom{2m}{0} + \binom{2m}{1}x + \binom{2m}{2}x^2 + \ldots + \binom{2m}{2m}x^{2m}$,
$(1-x)^{2m} = \binom{2m}{0} - \binom{2m}{1}x + \binom{2m}{2}x^2 - \ldots + \binom{2m}{2m}x^{2m}$,
$\frac{1}{2}[(1+x)^{2m} + (1-x)^{2m}] = \binom{2m}{0} + \binom{2m}{2}x^2 + \ldots + \binom{2m}{2m}x^{2m}$.

Haciendo: $x = 1$, se tiene: $\binom{2m}{0} + \ldots + \binom{2m}{2m} = A = \frac{1}{2}2^m = 2^{m-1}$.

$B = \binom{2m}{0}\cos 0 + \binom{2m}{2}\cos 2 + \binom{2m}{4}\cos 4 + \ldots + \binom{2m}{2m}\cos 2m$,
$C = \binom{2m}{0}\sin 0 + \binom{2m}{2}\sin 2 + \binom{2m}{4}\sin 4 + \ldots + \binom{2m}{2m}\sin 2m$,
$B + Ci = \binom{2m}{0}e^{0i} + \binom{2m}{2}e^{2i} + \binom{2m}{4}e^{4i} + \ldots + \binom{2m}{2m}e^{2mi}$.

Haciendo: $e^i = x$, se tiene: $\binom{2m}{0}x^0 + \binom{2m}{1}x + \binom{2m}{2}x^2 + \ldots + \binom{2m}{2m}x^{2m} = (1+x)^{2m}$,
$\binom{2m}{0}x^0 - \binom{2m}{1}x + \binom{2m}{2}x^2 - \ldots + \binom{2m}{2m}x^{2m} = (1-x)^{2m}$,

$B + Ci = \frac{1}{2}[(1+x)^{2m} + (1-x)^{2m}] = \frac{1}{2}[(1+e^i)^{2m} + (1-e^i)^{2m}] =$

$= \frac{1}{2}\left[e^{mi}(e^{\frac{-i}{2}} + e^{\frac{i}{2}})^{2m} + e^{mi}(e^{\frac{-i}{2}} - e^{\frac{i}{2}})^{2m}\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[(\cos m + i\sin m)(2\cos\frac{1}{2})^{2m} + (\cos m + i\sin m)(2i\sin\frac{1}{2})^{2m}\right]$.

La parte real es: $B = \frac{1}{2}\left[(\cos m)(2\cos\frac{1}{2})^{2m} + (-1)^m(\cos m)(2\sin\frac{1}{2})^{2m}\right]$.

Luego: $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 2^{2m-2} + 2^{2m-2}\cos m\left[(\cos\frac{1}{2})^{2m} + (-1)^m(\sin\frac{1}{2})^{2m}\right]$.

M 20- Calcular $S = \binom{2m-1}{m} - \binom{2m}{1}\binom{2m-2}{m-1} + \binom{2m}{2}\binom{2m-3}{m-2} - \ldots + (-1)^m\binom{2m}{m}\binom{m-1}{0}$.

Solución: $S = \sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{2m}{n}\binom{2m-n-1}{m-n} = (-1)^m$.

M 21- Calcular $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$

Solución: $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$, $f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \ldots = \frac{1}{1+x^2}$, $f(x) = \arctan x$.
$f(1) = S = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

M 22- Calcular $S = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-4} + \frac{1}{6n-5} - \frac{5}{6n}\right]$.

Solución: Sea: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{6n-1}}{6n-1} + \frac{x^{6n-2}}{6n-2} + \ldots - \frac{5x^{6n}}{6n})$. Se tiene que: $S = f(x=1)$, Derivando: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^{6n-2} + x^{6n-3} + \ldots - 5x^{6n-1}) = \dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - 5x^5}{1 - x^6} =$

$= \dfrac{(5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)(1 - x)}{(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(1 - x)} = \dfrac{(5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)}{(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}.$

Integrando: $f(x) = \ln(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. Luego: $S = f(1) = \ln 6$.

M 23- Calcular $S = \dfrac{\sin x}{1} - \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} - \dfrac{\sin 4x}{4} + \ldots$ y

$C = 1 + \dfrac{\cos x}{1} - \dfrac{\cos 2x}{2} + \dfrac{\cos 3x}{3} - \dfrac{\cos 4x}{4} + \ldots$

Solución: $C - 1 + iS = e^{xi} - \dfrac{e^{2xi}}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{e^{nxi}}{n} + \ldots$ Haciendo: $z = e^{xi}$, se tiene:

$C - 1 + iS = z - \dfrac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n} + \ldots$ Haciendo: $W = z - z^2 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots =$

$= \dfrac{z}{1+z} = 1 - \dfrac{1}{1+z}, \quad \dfrac{1}{1+z} = 1 - W = 1 - z + z^2 - \ldots - (-1)^n z^n + \ldots$

Integrando: $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \ldots - (-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n} + \ldots = C - 1 + iS$.

Luego: $C - 1 + iS = \ln(1+z) = \ln(1 + e^{xi}) = \ln|(1 + e^{xi})| + i\arg(1 + e^{xi})$.

Como: $|(1 + e^{xi})| = |1 + \cos x + i\sin x| = 2\cos\dfrac{x}{2}$. Y como: $\tan\theta = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan\dfrac{x}{2}$,

$\theta = \dfrac{x}{2} + k\pi$. Por tanto, se tiene que: $C - 1 + iS = \ln(2\cos\dfrac{x}{2}) + i\dfrac{x}{2}$.

De donde: $S = \dfrac{x}{2}$; $C = 1 + \ln(2\cos\dfrac{x}{2})$.

M 24- Calcular $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{a} - 1 + \dfrac{1}{a+1} + \ldots + \dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{2} + \ldots$

Solución: $S = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{na - a + 1} + \dfrac{1}{na - a + 2} + \ldots + \dfrac{1}{na} - \dfrac{a}{na}\right]$.

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{x^{na-a+1}}{na - a + 1} + \dfrac{x^{na-a+2}}{na - a + 2} + \ldots + \dfrac{x^{na}}{na} - \dfrac{ax^{na}}{na}\right]$.

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}[x^{na-a} + x^{na-a+1} + \ldots + x^{na-1} - ax^{na-1}] = \sum_{n=1}^{\infty}[x^{na-1} + \ldots + x^{na-a} - ax^{na-1}] =$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x^a}{1 - x^a} + \dfrac{1}{x^a}\cdot\dfrac{x^a}{1 - x^a} + \ldots - \dfrac{a}{x}\cdot\dfrac{x^a}{1 - x^a}\right] =$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1 - x^a}[x^{a-1} + \ldots + x^{a-2} + x^0 - ax^{a-1}] =$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(a-1)x^{a-2} + (a-2)x^{a-3} + \ldots + 1}{x^{a-1} + x^{a-2} + \ldots + 1}$, $f(x) = \ln(x^{a-1} + x^{a-2} + \ldots + 1)$, $S = f(1) = \ln a$.

M 25- Calcular $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx \cdot \cos nx}{n}$.

Solución: $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin 2nx}{2n}$, $C = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos 2nx}{2n}$, $C + iS = \dfrac{1}{2}e^{2xi} - \dfrac{1}{4}e^{4xi} + \ldots$

Haciendo: $e^{2xi} = y$, se tiene: $f(y) = \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{4}y^2 + \ldots = \dfrac{1}{1+y}$, $2f(y) = y - \dfrac{y2}{2} + \dfrac{y^3}{3} - \ldots$,

$2f'(y) = 1 - y + y^2 - \ldots = \dfrac{1}{1+y}$. Integrando: $f(y) = \dfrac{\ln(1+y)}{2}$. Luego: $C + iS = \dfrac{\ln(1 + e^{2xi})}{2} =$

$= \frac{1}{2}\ln[e^{xi}(e^{-xi} + e^{xi})] = \frac{1}{2}[xi + \ln(e^{-xi} + e^{xi})] = \frac{1}{2}[xi + \ln(2\cos x)]$. Luego la parte imaginaria es: $S = \dfrac{x}{2}$.

M 26- Calcular $S = \dfrac{2\cdot 1 + 1}{1^3 + 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1} + \ldots + \dfrac{2n + 1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$.

Solución: $\dfrac{2n+1}{n^3 + 3n^2 + 2n} = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{3}{2n+4}$. Dando valores a n, se tiene:

n	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{-3}{2n+4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{6}(a)$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}(a)$	$-\frac{3}{8}(b)$
3	$\frac{1}{6}(a)$	$\frac{1}{4}(b)$	$-\frac{3}{10}(c)$
4	$\frac{1}{8}(b)$	$\frac{1}{5}(c)$	$-\frac{3}{12}(d)$

. Las fracciones marcadas con (a), (b), etc, se anulan.

Luego: $S = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{2n+2}-\frac{3}{2n+4}$.

Para $n \to \infty$, $S = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

M 27- Calcular la suma de los productos ternarios de los n primeros números naturales.

Solución: La suma pedida es: $S_{(1,1,1)} = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} 1 & (1) & (1) \\ (1) & 1 & (1) \\ (1) & (1) & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3!}(S_1^3+2S_3-3S_2S_1)$.

Como: $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, se tiene que:
$S_{(1,1,1)} = \frac{n^6-n^5-3n^4+n^3+2n^2}{48}$.

M 28- Calcular $S = \binom{2m}{1}-3\binom{2m}{3}+5\binom{2m}{5}-\ldots$

Solución: Dada la igualdad: $(1+x)^{2m} = \binom{2m}{0}+\binom{2m}{1}x+\binom{2m}{2}x^2+\ldots$, se tiene que:
$2m(1+x)^{2m-1} = \binom{2m}{1}+2\binom{2m}{2}x+\ldots$ Sustituyendo x por los valores de las raíces cuartas de la unidad, y sumando los resultados $(*)$, se tiene:
$2m(1+1)^{2m-1}+2m(1-1)^{2m-1}+2m(1+i)^{2m-1}+2m(1-i)^{2m-1} =$
$= 4[\binom{2m}{1}+5\binom{2m}{5}+\ldots] = 4S_1 = 2^{2m}m+2m[(1+i)^{2m-1}+(1-i)^{2m-1}]$. Multiplicando por x^2 y efectuando las mismas sustituciones que antes, y sumando los resultados, se tiene: $2m(1+1)^{2m-1}1^2+2m(1-1)^{2m-1}(-1)^2+2m(1+i)^{2m-1}i^2+2m(1-i)^{2m-1}(-i)^2 =$
$= 4[3\binom{2m}{3}+7\binom{2m}{7}+\ldots] = 4S_2 = 2^{2m}m+2m[-(1+i)^{2m-1}-(1-i)^{2m-1}]$.
Por lo tanto: $S = S_1-S_2 = m[(1+i)^{2m-1}+(1-i)^{2m-1}] = m\cdot 2^{\frac{2m+1}{2}}\cdot\cos(\frac{2m-1}{4}\pi)$.
Para $m = \dot{4}$ y $m = \dot{4}+1$, $S = 2^m m$. Para $m = \dot{4}+2$ y para $m = \dot{4}+3$, $S = -2^m m$.
$(*)$ La suma de las potencias k de las raíces n-simas de la unidad, es cero si $k \neq \dot{n}$, y es n si $k = \dot{n}$.

M 29- Calcular $\sum_{h=0}^{m} h^2\binom{2m}{2h}\cos 2h\theta$.

Solución: Partiendo de $C = \sum_{h=0}^{m}\binom{2m}{2h}\cos 2h\theta$, $S = \sum_{h=0}^{m}\binom{2m}{2h}\sin 2h\theta$, se tiene: $C+iS = \sum_{h=0}^{m}\binom{2m}{2h}e^{2h\theta i}$.
Haciendo: $e^{\theta i} = x$, se tiene que: $f(x) = \sum_{h=0}^{m}\binom{2m}{2h}x^{2h} = \frac{1}{2}\left[(1+x)^{2m}+(1-x)^{2m}\right]$. Derivando: $f' = \sum_{h=0}^{m}2h\binom{2m}{2h}x^{2h-1}$. Luego: $xf' = \sum_{h=0}^{m}2h\binom{2m}{2h}x^{2h}$. Derivando esta última expresión:
$f'+xf'' = 4\sum_{h=0}^{m}h^2\binom{2m}{2h}x^{2h-1}$. Por lo que: $\sum_{h=0}^{m}h^2\binom{2m}{2h}x^{2h} = \frac{1}{4}(xf'+x^2f'') =$
$= \frac{m}{4}x\left[(1+x)^{2m-1}-(1-x)^{2m-1}+x(2m-1)\left[(1+x)^{2m-2}+(1-x)^{2m-2}\right]\right] =$
$= \frac{m}{4}e^{\theta i}\left[(1+e^{\theta i})^{2m-1}-(1-e^{\theta i})^{2m-1}+e^{\theta i}(2m-1)\left[(1+e^{\theta i})^{2m-2}+(1-e^{\theta i})^{2m-2}\right]\right]$, cuya parte real es la suma pedida. Operando y teniendo en cuenta que: $\left(e^{\frac{\theta i}{2}}+e^{\frac{-\theta i}{2}}\right)^m = 2^m(\cos\frac{\theta}{2})^m$, la suma es: $2^{2m-4}m[\cos^{2m-2}\frac{\theta}{2}[\cos m\theta+2m\cos(m+1)\theta]+(-1)^{m-1}\sin^{2m-2}\frac{\theta}{2}[2m\cos(m+1)\theta-\cos m\theta]]$.

M 30- Sumar $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$.

Solución: Se parte de las igualdades siguientes: $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$, $(1+\frac{1}{x})^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{x} + \binom{n}{2}\frac{1}{x^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{x^n}$. Luego: $(1+x)^n \cdot (1+\frac{1}{x})^n = \frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$, cuyo término independiente es: $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 x\frac{1}{x} + \binom{n}{2}^2 x^2\frac{1}{x^2} + \ldots + \binom{n}{n}^2 x^n\frac{1}{x^n} = \frac{\binom{2n}{n}x^n}{x^n}$. Luego la suma pedida es: $\binom{2n}{n}$.

M 31- Efectuar la siguiente suma: $S_n^1 + S_n^2 + S_n^3 + \ldots + S_n^n$, sabiendo que $S_r^h = \sum_{p=1}^{r} S_p^{h-1}$, y que $S_n^1 = 1 + 2 + \ldots + n$.

Solución: Son de aplicación las siguientes fórmulas: $S_n^1 = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{n-1}$; $\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-3}{n-1} + \ldots + \binom{k}{n-1} + \binom{k-1}{n-1} = \binom{m}{n}$, o bien, haciendo $m = 2n+1$, la fórmula es: $\binom{2n}{n-1} + \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-2}{n-1} + \ldots + \binom{n+1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1} = \binom{2n+1}{n}$. Operando, se tienen las siguientes igualdades: $S_n^1 = \binom{n+1}{n-1}$, $S_n^2 = \binom{n+2}{n-1}$, $S_n^3 = \binom{n+3}{n-1}$,..., $S_n^n = \binom{n+n}{n-1} = \binom{2n}{n-1}$. Por tanto, la suma es: $S_n^1 + S_n^2 + S_n^3 + \ldots + S_n^n = \binom{n+1}{n-1} + \binom{n+2}{n-1} + \ldots + \binom{2n}{n-1} = \binom{2n+1}{n} - \binom{n}{n-1} - \binom{n-1}{n-1} = \binom{2n+1}{n} - n - 1$.

M 32- Dado el triángulo de Pascal cuyas dos primeras filas son

3	5	
3	8	5

, hallar $\sum_{\substack{i=p\\ j=1}}^{\substack{i=p+k\\ j=k+1}} a_{ij}$, siendo a_{ij} el elemento perteneciente a la fila i y a la columna j.

Solución: El triángulo de Pascal planteado, en el que los elementos iniciales son 3 y 5, es el siguiente:

$1\cdot 3$	$1\cdot 5$				
$1\cdot 3 = 3$	$1\cdot 3 + 1\cdot 5 = 8$	$1\cdot 5 = 5$			
$1\cdot 3 = 3$	$2\cdot 3 + 1\cdot 5 = 11$	$1\cdot 3 + 2\cdot 5 = 13$	$1\cdot 5 = 5$		
$1\cdot 3 = 3$	$3\cdot 3 + 1\cdot 5 = 14$	$3\cdot 3 + 3\cdot 5 = 24$	$1\cdot 3 + 3\cdot 5 = 18$	$1\cdot 5 = 5$	
$1\cdot 3 = 3$	$4\cdot 3 + 1\cdot 5 = 17$	$6\cdot 3 + 4\cdot 5 = 38$	$4\cdot 3 + 6\cdot 5 = 42$	$1\cdot 3 + 4\cdot 5 = 23$	$1\cdot 5 = 5$

El elemento a_{ij} es igual a: $\binom{i-1}{j-1}3 + \binom{i-1}{j-2}5$. La suma pedida es:
$\left[\binom{p-1}{0} + \binom{p}{1} + \ldots + \binom{p+k-1}{k}\right]3 + \left[\binom{p+1}{1} + \ldots + \binom{p+k}{k}\right]5 = \binom{p+k}{k}3 + \binom{p+k}{k-1}5$.

M 33- Calcular la suma de los productos binarios de los n primeros términos de la sucesión de Fibonacci.

Solución: Sea U_n el término n-ésimo de Fibonacci: $U_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\sqrt{5}\cdot 2^n}$. Sea S_n la suma de los n primeros términos de dicha serie: $S_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+2} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}\cdot 2^{n+2}} - 1$. Siendo P_n la suma de los productos binarios de los n primeros términos de dicha serie, se tiene: $P_n = P_{n-1} + U_n \cdot S_{n-1} = P_{n-1} + \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\sqrt{5}\cdot 2^n}\left[\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+2} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}\cdot 2^{n+2}} - 1\right]$.

En el siguiente cuadro se incluyen los primeros términos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
U_n	1	1	2	3	5	8	13	21
S_n	1	2	4	7	12	20	33	54
P_n		1	5	17	52	148	408	1101

También se puede calcular P_n teniendo en cuenta que:

$$P_n = \sum_1^n U_i U_j = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_1^n U_n\right)^2 - \sum_1^n U_n^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left[\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+2} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}\cdot 2^{n+2}} - 1\right]^2 - \frac{1}{5}A\right],$$

siendo: $A = \left[\dfrac{\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} - 1} - 2\sum(-1)^n\right].$

M 34- Dada $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$, hallar la suma de la serie sabiendo que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ y que $a_0 = 1$ y $a_2 = 3$.

Solución: Ecuación característica: $R^{n+2} - R^{n+1} - R^n = 0$, $R^2 - R - 1 = 0$. La suma de la serie es: $S = \dfrac{A+Bx}{1-x-x^2} = A + (A+B)x + \ldots$ Como $a_1 = a_2 - a_0 = 2$, se tiene que: $A = a_0 = 1$, $A + B = a_1 = 2$, $B = 1$. Por tanto: $S = \dfrac{1+x}{1-x-x^2}$.

M 35- Calcular $S = 1 + 2\cdot\dfrac{1}{3} + a_2\dfrac{1}{3^2} + \ldots + a_n\dfrac{1}{3^n} + \ldots$, sabiendo que $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$.

Solución: Se tiene que: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8, \ldots$ Luego: $a_n = 2^n$. Por tanto: $S = 1 + \dfrac{2}{3} + (\dfrac{2}{3})^2 + (\dfrac{2}{3})^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3}} = 3$.

M 36- Hallar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{1}{3^n}$, donde $f(n) = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$.

Solución: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{3^n(2-1)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} =$ $= 6 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$.

M 37- Calcular $\binom{1000}{0}^2 - \binom{1000}{1}^2 + \ldots + (-1)^h\binom{1000}{h}^2 + \ldots + \binom{1000}{1000}^2$.

Solución: Partiendo de los desarrollos: $(1+x)^a = \binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \ldots + \binom{a}{a}x^a$, $(1-\dfrac{1}{x})^a = \binom{a}{0} - \binom{a}{1}\dfrac{1}{x} + \binom{a}{2}\dfrac{1}{x^2} + \ldots + \binom{a}{a}\dfrac{1}{x^a}$, se tiene que: $(1+x)^a(1-\dfrac{1}{x})^a = \dfrac{(x^2-1)^a}{x^a}$, cuyo término independiente es: $\binom{a}{0}^2 - \binom{a}{1}^2 + \ldots + \binom{a}{a}^2 = \binom{a}{a/2}$. La suma pedida es: $\binom{1000}{500}$.

M 38- Calcular $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{1}{2^n}$, si $f(n) = \binom{a}{a-1} + \binom{a+1}{a-1} + \binom{a+2}{a-1} + \ldots + \binom{a+n-1}{a-1}$.

Solución: Como: $\binom{a-1}{a-1} + \binom{a}{a-1} + \ldots + \binom{a+n-1}{a-1} = \binom{a+n}{a}$, se tiene que: $f(n) = \binom{a+n}{a} - 1$. Luego la suma es: $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{a+n}{a} - 1\right]\frac{1}{2^n} =$

$$= \binom{a}{a} + \frac{\binom{a+1}{a}}{2} + \frac{\binom{a+2}{a}}{2^2} + \ldots + \frac{\binom{a+n}{a}}{2^n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{\binom{a+1}{a}}{2} + \frac{\binom{a+2}{a}}{2^2} + \ldots + \frac{\binom{a+n}{a}}{2^n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Como: $\dfrac{1}{(1-x)^{a+1}} = (1-x)^{-a-1} = \binom{-a-1}{0} - \binom{-a-1}{1}x + \binom{-a-1}{2}x^2 + \ldots =$

$= 1 + \binom{a+1}{1}x + \binom{a+2}{2}x^2 + \ldots = 1 + \binom{a+1}{a}x + \binom{a+2}{a}x^2 + \ldots$, para $x = \dfrac{1}{2}$, se tiene:

$(1 - \dfrac{1}{2})^{-a-1} = 2^{a+1} = 1 + \dfrac{\binom{a+1}{a}}{2} + \dfrac{\binom{a+2}{a}}{2^2} + \ldots$

Por tanto: $S = (2^{a+1} - 1) - \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2^{a+1} - 2 = 2(2^a - 1)$.

M 39- Calcular $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{5^n}$, siendo $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ y $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = n^2 + 1$.

Solución: Como: $a_n = An^2 + Bn + C.$, se tiene que a_{n+1} y a_{n+2} valen:
$a_{n+1} = A(n+1)^2 + B(n+1) + C = An^2 + n(2A+B) + A + B + C$,
$a_{n+2} = An^2 + n(4A+B) + 4A + 2B + C$.
Luego: $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = n^2 2A + n(-6A+2B) - A - 3B + 2C \equiv n^2 + 1$. Por tanto: $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$, $C = 3$. En consecuencia: $a_n = C_1 3^n + C_2 2^n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 3$. Aplicando para $n = 0$, $a_0 = 1$, y para $n = 1$, $a_1 = 4$, se obtienen las coeficientes: $C_1 = 3$, $C_2 = -5$. Por tanto: $a_n = 3 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 3$. Aplicando esta igualdad, se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} = \sum 3(\frac{3}{5})^n - \sum 5(\frac{2}{5})^n + \sum \frac{1}{2}\frac{n^2}{5^n} + \sum \frac{3}{2}\frac{n}{5^n} + \sum \frac{3}{5^n} =$$
$$= 3 \cdot \frac{5}{2} - 5 \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{64} + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{1405}{384}.$$

M 40- Calcular la suma de los cuadrados de las raíces del polinomio $f(x) = (1+\frac{x}{n})^n - (1-\frac{x}{n})^n$ donde $n = 2m+1$, y hallar su descomposición en factores binomios.

Solución: Se tienen los desarrollos: $(1+\frac{x}{n})^n = \binom{n}{0}(\frac{x}{n})^n + \binom{n}{1}(\frac{x}{n})^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}(\frac{x}{n})^0$, $(1-\frac{x}{n})^n = -\binom{n}{0}(\frac{x}{n})^n + \binom{n}{1}(\frac{x}{n})^{n-1} - \ldots - \binom{n}{n}(\frac{x}{n})^0$ (para n impar). Restando, dividiendo por 2 e igualando a cero, se tiene: $(\frac{x}{n})^n + \binom{n}{2}(\frac{x}{n})^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} = 0$. De donde se obtiene: $x^n + \binom{n}{2}n^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}n^n = 0$. Dividiendo su derivada por este polinomio, el coeficiente de x^3 corresponde a la suma de los cuadrados de las raíces, es decir: $\sum x_i^2 = -2\binom{n}{2}n^2 = -n^3(n-1)$. De la ecuación: $(1+\frac{x}{n})^n - (1-\frac{x}{n})^n = 0$, se deduce: $\frac{(1+\frac{x}{n})^n}{(1-\frac{x}{n})^n} = 1$. Luego: $\frac{1+\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = \varepsilon_n$ (raíces n-ésimas de la unidad), por lo que: $x = \frac{n(\varepsilon-1)}{1+\varepsilon}$. Por tanto, la descomposición en factores binomios pedida, es: $\prod_{k=1}^{n}\left(x - \frac{n(\varepsilon_k - 1)}{1+\varepsilon_k}\right) = 0$, siendo ε_k las raíces n-ésimas de la unidad.

M 41- Calcular $S = \csc^2\theta + \csc^2 3\theta + \ldots + \csc^2(2n-1)\theta$, siendo csc el símbolo de la cosecante. Aplicación para $\theta = \frac{\pi}{4n}$.

Solución: $\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos^n\theta + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta \cdot i \cdot \sin\theta + \ldots =$
$= \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \ldots + i(\ldots)$. Haciendo: $x = \cos\theta$, se tiene que: $\cos n\theta = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2 + \ldots = A(x-x_1)\ldots(x-x_n) =$
$= B(1-\frac{x}{x_1})\ldots(1-\frac{x}{x_n})$. Para: $\cos n\theta = 0$, $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Por tanto, se deduce que: $\cos n\theta = A(x - \cos\frac{\pi}{2n})(x - \cos\frac{3\pi}{2n})\ldots = B(1 - \frac{x}{\cos\frac{\pi}{2n}})(1 - \frac{x}{\cos\frac{3\pi}{2n}})\ldots$,
$A = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \frac{(1+1)^n - (1-1)^n}{2} = 2^{n-1}$. Para $n = 2m$, se tiene que: $\cos n\theta = \cos^{2m}\theta - \binom{2m}{2}\cos^{2(m-1)}\theta\sin^2\theta + \ldots$ En esta misma igualdad, haciendo $y = \sin\theta$, se obtiene el desarrollo: $\cos n\theta = (1-y^2)^m - \binom{2m}{2}(1-y^2)^{m-1}y^2 + \ldots(*) = A_1(y-y_1)\ldots(y-y_n) =$
$= B_1(1-\frac{y}{y_1})(1-\frac{y}{y_2})\ldots$ Para el valor $\cos 2m\theta = 0$, $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{4m}$, el desarrollo es: $\cos 2m\theta = B_1 \prod_{h=0}^{m-1}\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2\frac{2h+1}{4m}\pi}\right) = B_1 \prod_{h=0}^{m-1}\left(1 - y^2\csc^2\frac{2h+1}{4m}\pi\right)$. El coeficiente del término en y^2 es: $-\csc^2\frac{\pi}{4m} - \csc^2\frac{3\pi}{4m} - \ldots - \csc^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}$. Pero este coeficiente en la ecuación señalizada más arriba con $(*)$, es: $-\binom{m}{1} - \binom{2m}{2} = -2m^2$. Luego: $S = 2m^2$. Para $\theta = \frac{\pi}{4n}$, el valor es: $S = 2n^2$.

M 42- Se sabe que $a_0 = 0$ y que en la sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_n$, se cumple la siguiente relación entre dos términos consecutivos: $a_{n+1} - 2a_n = 2^n + n^2 + \cos\frac{n\pi}{4}$. Calcular $\sum_{h=0}^{n} a_h$.

Solución: Para la obtención de a_n se tiene, de acuerdo con la relación del enunciado, que: $a_n = b_n + c_n + d_n + f_n$, donde: $b_n = k \cdot 2^n$, $c_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$, $c_{n+1} = \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma$. Luego: $c_{n+1} - 2c_n = -\alpha n^2 + (2\alpha - \beta)n + \alpha + \beta - \gamma \equiv n^2$. Por tanto: $\alpha = -1, \beta = -2, \gamma = -3$, $c_n = -n^2 - 2n - 3$. Además: $d_n = \rho n 2^n$, $d_{n+1} = \rho(n+1)2^{n+1}$. Luego: $d_{n+1} - 2d_n = 2\rho \cdot 2^n = 2^n$. Por lo que: $\rho = \frac{1}{2}$, $d_n = \frac{1}{2} n 2^n = n \cdot 2^{n-1}$. Además: $f_n = \lambda \cos \frac{n\pi}{4} + \mu \sin \frac{n\pi}{4}$. De donde: $f_{n+1} - 2f_n = \lambda \cos \frac{(n+1)\pi}{4} + \mu \sin \frac{(n+1)\pi}{4} - 2\lambda \cos \frac{n\pi}{4} - 2\mu \sin \frac{n\pi}{4} \equiv \cos \frac{n\pi}{4}$. Operando, dando valores a n, se obtiene: $\lambda = -\frac{3\sqrt{2}+16}{34}$, $\mu = \frac{5\sqrt{2}+4}{34}$. Por todo ello: $a_n = k \cdot 2^n - n^2 - 2n - 3 + n \cdot 2^{n-1} - \frac{3\sqrt{2}+16}{34} \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{5\sqrt{2}+4}{34} \sin \frac{n\pi}{4}$. Como para $n = 0$, $a_0 = 0$, se tiene que: $k = \frac{118 + 3\sqrt{2}}{34}$, obteniéndose la expresión definitiva para a_n, es decir: $a_n = \frac{118+3\sqrt{2}}{34} 2^n - n^2 - 2n - 3 + n \cdot 2^{n-1} - \frac{3\sqrt{2}+16}{34} \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{5\sqrt{2}+4}{34} \sin \frac{n\pi}{4}$.

Los primeros términos de la serie son: 0, 1, $\frac{14+\sqrt{2}}{2}$, $22 + \sqrt{2}$,... La suma es: $\sum_{h=0}^{n} a_h = \sum_{n=0}^{n} \frac{118+3\sqrt{2}}{34} 2^n - \sum_{n=0}^{n} n^2 - \sum_{n=0}^{n} 2n - \sum_{n=0}^{n} 3 + \sum_{n=0}^{n} n \cdot 2^{n-1} - \sum_{n=0}^{n} \frac{3\sqrt{2}+16}{34} \cos \frac{n\pi}{4} +$ $+ \sum_{n=0}^{n} \frac{5\sqrt{2}+4}{34} \sin \frac{n\pi}{4} = \frac{118+3\sqrt{2}}{34}(2^{n+1} - 1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2n(n+1) - 3n + (n+1)2^n -$ $- \frac{(3\sqrt{2}+16)\sin \frac{(n+1)\pi}{8} \cos \frac{n\pi}{8}}{34 \sin \frac{\pi}{8}} + \frac{(5\sqrt{2}+4)\sin \frac{(n+1)\pi}{8} \sin \frac{n\pi}{8}}{34 \sin \frac{\pi}{8}}$.

M 43- Descomponer en forma de producto de factores binomios en las dos formas $f(x) = A\Pi(x - x_i)$ y $f(x) = B\Pi(1 - \frac{x}{x_i})$, el polinomio $f(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{x_i}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{x_i}{n}\right)^n\right]$, para $n = 2m$.

Solución: Partiendo de: $\left(1 + \frac{x_i}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{x_i}{n}\right)^n = 0$, $\left(\frac{n + x_i}{n - x_i}\right)^n = -1 = z^n$, $z = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}$, $x = \frac{n(z-1)}{i(1+z)} = \frac{n}{i} \cdot \frac{e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}} - 1}{1 + e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}} = n \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $x_h = n \tan \frac{(2h+1)\pi}{2n} = -x_h$. Por ello: $f(x) = A(x^2 - x_1^2)\ldots(x^2 - x_m^2) = A(x^2 - n^2 \tan^2 \frac{\pi}{2n})\ldots(x^2 - n^2 \tan^2 \frac{(2m-1)\pi}{2n})$, siendo A el coeficiente de x^{2m} en: $f(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^n + (-1)^n \frac{1}{n^n} i^n\right] = \frac{(-1)^m}{n^n}$. Por tanto: $f(x) = \frac{(-1)^m}{n^n}(x^2 - n^2 \tan^2 \frac{\pi}{2n})\ldots(x^2 - n^2 \tan^2 \frac{(2m-1)\pi}{2n})$.
$f(x) = B(1 - \frac{x^2}{n^2 \tan^2 \frac{\pi}{2n}})\ldots(1 - \frac{x^2}{n^2 \tan^2 \frac{(2m-1)\pi}{2n}})$. B es el término independiente, igual a 1.
Luego: $f(x) = (1 - \frac{x^2}{n^2 \tan^2 \frac{\pi}{2n}})\ldots(1 - \frac{x^2}{n^2 \tan^2 \frac{(2m-1)\pi}{2n}})$.

M 44- Hallar $\sin 9\theta - \sin 9a$ en forma de polinomio en $x = \sin\theta$, y obtener su descomposición en factores binomios de las dos formas $f(x) = A\Pi(x - x_i)$ y $f(x) = B\Pi(1 - \frac{x}{x_i})$.

Solución: Se parte de la ecuación: $\sin 9\theta - \sin 9a = 0$, $\theta = a + \frac{2k\pi}{9}$. Se establece la función: $f(x) = A \prod_{k=0}^{8} \left[x - \sin(a + \frac{2k\pi}{9})\right] = B \prod_{k=0}^{8} \left[1 - \frac{x}{\sin(a + \frac{2k\pi}{9})}\right] = 0$. Como se tiene que: $\cos 9\theta + i \sin 9\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^9 = \cos^9\theta + \binom{9}{1} i \cos^8\theta \sin\theta + \ldots + \binom{9}{9} i^9 \sin^9\theta =$
$= (\ldots) + i(\binom{9}{1}\cos^8\theta \sin\theta - \binom{9}{3}\cos^6\theta \sin^3\theta + \ldots + \binom{9}{9}\sin^9\theta$, se deduce para $\sin^9\theta$ la siguiente expresión: $\sin^9\theta = \binom{9}{1}(1-x^2)^4 x - \binom{9}{3}(1-x^2)^3 x^3 + \ldots + \binom{9}{9} x^9 =$
$= x^9[\binom{9}{1} + \binom{9}{3} + \ldots + \binom{9}{9}] + \ldots + \binom{9}{1} x = 2^8 x^9 + \ldots + 9x$. Por tanto: $A = 2^8$, pues en efecto: $\frac{1}{2}\left[(1+1)^9 - (1-1)^9\right] = \binom{9}{1} + \binom{9}{3} + \ldots + \binom{9}{9} = \frac{1}{2} 2^9 = 2^8$. Por otro lado, al igualar los

términos independientes de las dos formas de $f(x)$, se tiene para B la expresión: $B = -A\sin a \sin(a+\frac{2\pi}{9})\ldots\sin(a+\frac{16\pi}{9}) = -2^8\frac{\sin 9a}{2^8} = -\sin 9a$. De donde, en definitiva: $f(x) = 2^8\prod_{k=0}^{8}\left[x-\sin(a+\frac{2k\pi}{9})\right] = -\sin 9a\prod_{k=0}^{8}(1-\frac{x}{\sin(a+\frac{2k\pi}{9})})$.

M 45- Sabiendo que $U_0 = 1$, $U_1 = 2$, $U_3 = 5$ y que $U_{n+3}-6U_{n+2}+11U_{n+1}-6U_n = n+\sin\frac{n\pi}{3}$, calcular U_n.

Solución: De acuerdo con el enunciado, sea: $U_n = a_n+b_n+c_n$, donde: $a_n = \alpha+\beta\cdot 2^n+\gamma\cdot 3^n$, $b_n = \zeta n^2+\rho n$, $c_n = \lambda\sin\frac{n\pi}{3}+\mu\cos\frac{n\pi}{3}$. Para calcular b_n, se tiene que: $b_{n+3}-6b_{n+2}+11b_{n+1}-6b_n = n(6\zeta-24\zeta+22\zeta)+\zeta(9-24+11)+\rho(3-12+11) =$ $= 4\zeta n-4\zeta+2\rho \equiv n$. Luego: $\zeta = \frac{1}{4}$, $\rho = \frac{1}{2}$. Es decir: $b_n = \frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}$. Para calcular c_n se tiene que: $c_{n+3}-6c_{n+2}+11c_{n+1}-6c_n = (-\lambda+3\lambda+3\sqrt{3}\,\mu+\frac{11\lambda}{2}-\frac{11\sqrt{3}\,\mu}{2}-6\lambda)\sin\frac{n\pi}{3}+$ $+(-\mu+3\mu-3\sqrt{3}\,\lambda+\frac{11\mu}{2}+\frac{11\sqrt{3}\,\lambda}{2}-6\mu)\cos\frac{n\pi}{3} \equiv \sin\frac{n\pi}{3}$. Luego: $\lambda = \frac{1}{14}$, $\mu = \frac{-5\sqrt{3}}{42}$. Es decir: $c_n = \frac{1}{14}\sin\frac{n\pi}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{42}\cos\frac{n\pi}{3}$. Para calcular a_n se tiene que:

$a_0 = \alpha+\beta+\gamma-\frac{5\sqrt{3}}{42} = 1$, $a_1 = \alpha+2\beta+3\gamma+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{28}-\frac{5\sqrt{3}}{84} = 2$,

$a_2 = \alpha+4\beta+9\gamma+1+1+\frac{\sqrt{3}}{28}+\frac{5\sqrt{3}}{84} = 5$. De donde: $\alpha = \frac{11}{8}+\frac{2\sqrt{3}}{7}$, $\beta = -1-\frac{5\sqrt{3}}{21}$, $\gamma = \frac{5}{8}+\frac{\sqrt{3}}{14}$. Es decir: $a_n = \frac{11}{8}+\frac{2\sqrt{3}}{7}-\left(1+\frac{5\sqrt{3}}{21}\right)2^n+\left(\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{3}}{14}\right)3^n$. Por tanto: $U_n =$ $= \frac{11}{8}+\frac{2\sqrt{3}}{7}-\left(1+\frac{5\sqrt{3}}{21}\right)2^n+\left(\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{3}}{14}\right)3^n+\frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}+\frac{1}{14}\sin\frac{n\pi}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{42}\cos\frac{n\pi}{3}$.

M 46- Calcular $C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdot\ldots\cdot3n}\cdot\frac{\cos n\theta}{3^n}$.

Solución: $C+iS = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdot\ldots\cdot3n}\cdot\frac{\cos n\theta+i\sin\theta}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)!!!}{3n!!!}\cdot\frac{e^{n\theta i}}{3^n}$.

Con $x = e^{\theta i}$, $C+iS = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)!!!}{3n!!!}\cdot(\frac{x}{3})^n \to (1-\frac{x}{3})^{\frac{-1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}}(3-\cos\theta-i\sin\theta)^{\frac{-1}{3}}$.

Haciendo: $3-\cos\theta-i\sin\theta = re^{\omega i}$, se tiene que: $r = \sqrt{(3-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$, $\tan\omega = \frac{-\sin\theta}{3-\cos\theta}$, $\omega = \arctan\frac{-\sin\theta}{3-\cos\theta}$. Luego: $(3-\cos\theta-i\sin\theta)^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}e^{\frac{\omega i}{3}} = r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\omega}{3}+i\sin\frac{\omega}{3})$. Por tanto: $C = r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\omega}{3} = \left[(3-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{6}}\cos\left(\frac{\arctan\frac{\sin\theta}{3-\cos\theta}}{3}\right) =$

$= [10-6\cos\theta]^{\frac{1}{6}}\cos\left(\frac{\arctan\frac{\sin\theta}{3-\cos\theta}}{3}\right)$.

M 47- Hallar la suma de los n primeros términos de la sucesión $U_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

Solución: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{2n+2}$. Se trata de una progresión hipergeométrica, pues: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$, por lo que: $S_n = \frac{U_n(\alpha n+\beta)-U_1\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$. Siendo: $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, se tiene que: $S_n = \frac{(2n+1)U_n-2U_1}{1} = (2n+1)!!-1$.

M 48- Calcular $P = \cos\theta\cdot\cos(\theta+\frac{2\pi}{n})\ldots\cos(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})$.

Solución: $\cos n\omega+i\sin n\omega = (\cos\omega+i\sin\omega)^n = x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}i\sin\omega+\binom{n}{2}x^{n-2}i^2(1-x^2)+\ldots=$

$= x^n + \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \ldots + i[\ldots]$, siendo: $x = \cos\omega$. De donde se deduce que: $\cos n\omega = x^n[1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots] + x^{n-2}[\ldots] + \ldots$ Se plantea la ecuación: $\cos n\omega - \cos n\theta = 0$, $\omega = \theta + \frac{2k\pi}{n}$. Luego la ecuación queda: $A(x - \cos\theta)(x - \cos(\theta + \frac{2\pi}{n})\ldots = 0$, siendo: $A = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \frac{1}{2}[(1+1)^n + (1-1)^n] = 2^{n-1}$. Por tanto, se tiene la expresión: $A(-1)^n \prod_{h=0}^{n-1}(\cos\theta + \frac{2h\pi}{n}) = (-1)^n 2^{n-1}P$. Para $\cos\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\theta = (-1)^n 2^{n-1}P$, pues los demás términos de la ecuación son nulos. Luego: $P = (-1)^n \dfrac{\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\theta}{2^{n-1}}$.

Para $n = 2m+1$, $P = -\dfrac{0 - \cos n\theta}{2^{n-1}} = \dfrac{\cos n\theta}{2^{n-1}}$.

Para $n = 2m$, y m par: $P = \dfrac{\cos m\pi - \cos n\theta}{2^{n-1}} = \dfrac{1 - \cos n\theta}{2^{n-1}} = \dfrac{\sin^2 m\theta}{2^{n-2}}$.

Para $n = 2m$, y m impar: $P = \dfrac{\cos m\pi - \cos n\theta}{2^{n-1}} = \dfrac{-1 - \cos n\theta}{2^{n-1}} = -\dfrac{\cos^2 m\theta}{2^{n-2}}$.

M 49- Hallar $\sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{b_n}$, siendo a_n la factorial n de base a y diferencia d, y b_n la factorial n de base b y diferencia d.

Solución: $a_n = a(a+d)\ldots(a+(n-1)d) = a^{n/d}$, $b_n = b(b+d)\ldots(b+(n-1)d) = b^{n/d}$. Por tanto: $U_n = \dfrac{a(a+d)\ldots(a+(n-1)d)}{b(b+d)\ldots(b+(n-1)d)}$, $U_{n+1} = \dfrac{a(a+d)\ldots(a+nd)}{b(b+d)\ldots(b+nd)}$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{dn+a}{dn+b}$. Se trata de una progresión hipergeométrica (Rey Pastor - Análisis algebraico, pág. 209), en la que: $\alpha = d$, $\beta = a$, $\gamma = b$. $\sum_{n=0}^{m} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\frac{a(a+d)\ldots(a+md)}{b(b+d)\ldots(b+md)}(md+a) - \frac{a}{b}b}{d+a-b} = \dfrac{\frac{a^{(m+1)/d}}{b^{(m+1)/d}}(md+a) - a}{d+a-b}$.

M 50- Calcular $\dfrac{1}{\sin^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2 3\theta} + \dfrac{1}{\sin^2 5\theta} + \ldots + \dfrac{1}{\sin^2(p-2)\theta}$, siendo p número impar.

Solución: $\cos n\omega + i\sin n\omega = (\cos\omega + i\sin\omega)^n = \cos^n\omega + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\omega i\sin\omega + \ldots + \binom{n}{n}i^n\sin^n\omega$. Siendo n par: $\cos n\omega = \cos^n\omega - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\omega\sin^2\omega + \ldots + \binom{n}{n}i^n\sin^n\omega$. Haciendo la sustitución: $y = \sin\omega$, siendo $n = 2m$, se tiene: $\cos n\omega = (1-y^2)^m - \binom{n}{2}(1-y^2)^{m-1}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}(-1)^m y^{2m} = 1^m + y^2[-\binom{m}{1} - \binom{n}{2}] + \ldots = 0$. Haciendo $z = \frac{1}{y}$, se tiene: $z^{2m} - [\binom{m}{1} + \binom{n}{2}]z^{2n-2} + \ldots = 0$. Dividiendo la derivada de este polinomio por él mismo, el coeficiente de z^{-3} corresponde a la suma de los cuadrados de sus raíces, que es: $2[\binom{m}{1} + \binom{n}{2}] = n^2$. Las raíces lo son de la ecuación: $\cos n\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$. Para $k = 0$, $\omega_1 = \theta = \frac{\pi}{2n}$. Para $k = 1$, $\omega_2 = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} = 3\theta, \ldots$, $\omega_n = (2n-1)\theta$. Luego: $\dfrac{1}{\sin^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2 3\theta} + \ldots + \dfrac{1}{\sin^2(2n-1)\theta} = n^2$ (n par; el número de sumandos es $n = \frac{p-1}{2}$). Haciendo: $2n-1 = p-2$, $n = \frac{p-1}{2}$. La suma pedida es: $\dfrac{(p-1)^2}{4}$.

M 51- Hallar la suma siguiente:

$$1 \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} + \frac{1!!}{2!!} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} + \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot 1.$$

Solución: Ver en Rey Pastor - Análisis algebraico, pág. 211, que: $a^{n/d} = (-1)^n n! d^n \binom{-a/d}{n}$. El término general es: $\dfrac{(2h-1)!!(2n-2h-1)!!}{(2h)!!(2n-2h)!!} = \dfrac{1^{h/2} \cdot 1^{(n-h)/2}}{2^{h/2} \cdot 2^{(n-h)/2}} = \dfrac{\binom{-\frac{1}{2}}{\frac{h}{2}}\binom{-\frac{1}{2}}{n-h}}{\binom{-1}{\frac{h}{2}}\binom{-1}{n-h}}$. De donde:

$$\sum_{h=0}^{n} \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{\frac{h}{2}}\binom{-\frac{1}{2}}{n-h}}{\binom{-1}{\frac{h}{2}}\binom{-1}{n-h}} \to \frac{\overbrace{(1+x)^{\frac{-1}{2}}}^{\text{término en } \frac{h}{2}}\ \overbrace{(1+x)^{\frac{-1}{2}}}^{\text{término en } (n-h)}}{\underbrace{(1+x)^{-1}}_{\text{término en } \frac{h}{2}}\ \underbrace{(1+x)^{-1}}_{\text{término en } (n-h)}} \to \frac{\overbrace{(1+x)^{-1}}^{\text{término en } (n-\frac{h}{2})}}{\underbrace{(1+x)^{-2}}_{\text{término en } (n-\frac{h}{2})}} \to \overbrace{(1+x)}^{\text{término independiente}} \to 1.$$

Otra forma de encontrar la solución, es pasando a factoriales en el término general:

$$\frac{(2h-1)!!(2h-2)!!(2n-2h-1)!!(2n-2h-2)!!}{(2h)!!(2h-2)!!(2n-2h)!!(2n-2h-2)!!}=$$

$$=\frac{(2h-1)!(2n-2h-1)!}{2^h h!2^{h-1}(h-1)!2^{n-h}(n-h)!2^{n-h-1}(n-h-1)!}=\frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2h-1}{h}\binom{2n-2h-1}{n-h}.$$

Como: $\sum_{h=0}^{n}\binom{2h-1}{h}\binom{2n-2h-1}{n-h}=(1+x)^{2h-1}(1+x)^{2n-2h-1}$. Para $x=1$, esta suma vale: $(1+x)^{2n-2}=2^{2n-2}$. Luego la suma pedida es: $\frac{2^{2n-2}}{2^{2n-2}}=1$.

M 52- Calcular $S=\tan^4\frac{\pi}{21}+\tan^4\frac{2\pi}{21}+\ldots+\tan^4\frac{10\pi}{21}$.

Solución: Generalizando la suma pedida: $S=\sum_{h=1}^{m}\tan^4\frac{h\pi}{2m+1}$. Partiendo de la ecuación: $f(x)=\frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{xi}{n}\right)^n-\left(1-\frac{xi}{n}\right)^n\right]=0$, se tiene: $\left[\frac{n+xi}{n-xi}\right]^n=1=z^n$, $x=\frac{n(z-1)}{i(z+1)}=$ $=\frac{n\left[e^{\frac{2k\pi i}{n}}-1\right]}{i+ie^{\frac{2k\pi}{n}-1}}=n\tan\frac{k\pi}{n}$. Para $k=0$, $x=0$. Para $k=h$, $x=n\tan\frac{h\pi}{n}$. Para $k=-h$, $x=n\tan\frac{-h\pi}{n}=-n\tan\frac{h\pi}{n}$. Luego hay una raíz nula y las restantes raíces forman parejas con signo cambiado. Por ello: $f(x)=Ax(x+x_1)(x-x_1)\ldots=Ax(x^2-x_1^2)$, donde A es el coeficiente de x^n, es decir: $A=\frac{1}{2i}\left[\frac{i^n}{n^n}-\frac{(-i)^n}{n^n}\right]=\frac{(-1)^m}{n^n}$, siendo $n=2m+1$. Por tanto: $f(x)=\frac{(-1)^m}{n^n}x^n+\frac{(-1)^{m-1}\binom{n}{2}}{n^{n-2}}x^{n-2}+\ldots=$ $=x\left[\frac{(-1)^m}{n^n}x^{2m}+\frac{(-1)^{m-1}\binom{n}{2}}{n^{n-2}}x^{n-3}+\frac{(-1)^{m-2}\binom{n}{4}}{n^{n-4}}x^{n-5}+\ldots\right]=0$. La suma de las cuartas potencias de las raíces es: $2\binom{n}{2}^2n^4-4\binom{n}{4}n^4$, que es el coeficiente de x^{-5} al dividir la derivada del polinomio por él mismo. Como la suma pedida es su mitad dividida por n^4, se obtiene que la suma, para $n=21$, es: $\binom{21}{2}^2-2\binom{21}{4}=32.130$.

M 53- Hallar la suma $S=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(2h)!!}{(2h+6)!!}$.

Solución: Aplicando las siguientes igualdades: $(2h)!!=2^h\cdot h!$, $(2h+6)!!=2^h\cdot(h+3)!$, se tiene: $S=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{h!}{(h+3)!}=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(h+3)(h+2)(h+1)}=\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2(h+1)}-\frac{1}{h+2}+\frac{1}{2(h+3)}\right)$. Se obtiene el cuadro siguiente para los sucesivos valores de h:

h	$\frac{1}{2(h+1)}$	$-\frac{1}{h+2}$	$\frac{1}{2(h+3)}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{6}(a)$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{3}(a)$	$\frac{1}{8}(b)$
2	$\frac{1}{6}(a)$	$\frac{-1}{4}(b)$	$\frac{1}{10}(c)$
3	$\frac{1}{8}(b)$	$\frac{-1}{5}(c)$	$\frac{1}{12}(d)$
4	$\frac{1}{10}(c)$	$\frac{-1}{6}(d)$	$\frac{1}{14}(e)$

Los sumandos marcados con (a) se anulan, lo mismo sucede con los marcados con $(b),(c)$, etc. Luego: $S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

M 54- Hallar el término general y la suma de los n primeros términos de la sucesión: 15, 105, 315, 693, 1287.

Solución: En el cuadro se establecen las sucesivas diferencias:

15	105	315	693	1287
90	210	378	594	
120	168	216		
48	48			
0				

Luego el término general es: $U_n = 15 + 90\binom{n}{1} + 120\binom{n}{2} + 48\binom{n}{3} = 8n^3 + 36n^2 + 46n + 15$. Por tanto, la suma es: $S = 15\binom{n}{1} + 90\binom{n}{2} + 120\binom{n}{3} + 48\binom{n}{4} = 2n^4 + 8n^3 + 7n^2 - 2n$.

M 55- Hallar la suma de las potencias cuartas de los n primeros números naturales.

Solución: Las sucesivas diferencias son:

1	16	81	256	625	1296
15	65	175	369	671	
50	110	194	302		
60	84	108			
24	24				

Por tanto: $S = \binom{n}{1} + 15\binom{n}{2} + 50\binom{n}{3} + 60\binom{n}{4} + 24\binom{n}{5} = \dfrac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

M 56- Calcular $\dfrac{1}{\sin^2\theta} + \ldots + \dfrac{1}{\sin^2 k\theta}$, siendo $\theta = \dfrac{\pi}{2k+1}$.

Solución: Se parte de: $\cos n\omega + i\sin n\omega = (\cos\omega + i\sin\omega)^n = i^n\sin^n\omega + \binom{n}{1}i^{n-1}\sin^{n-1}\omega\cos\omega + \ldots =$ $= i(-1)^m\sin^n\omega + \binom{n}{1}\ldots + \binom{n}{2}(-i)(-1)^m\sin^{n-2}\omega\cos^2\omega + \ldots$ (siendo $n = 2m+1$). Teniendo en cuenta la parte imaginaria, se tiene: $\sin n\omega = (-1)^m\sin^n\omega - (-1)^m\binom{n}{2}\sin^{n-2}\omega\cos^2\omega + \ldots =$ $= (-1)^m\left[x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \ldots + (-1)^h\binom{n}{2m}x(1-x^2)^m\right]$, siendo $x = \sin\omega$. Para $\sin n\omega = 0$, $\omega = \dfrac{k\pi}{n}$. Como $\sin k\pi = -\sin(-k\pi)$, las raíces son: $-\dfrac{k\pi}{n}, \ldots, 0, \ldots, \dfrac{k\pi}{n}$. Por tanto: $\sin n\omega = Ax(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ldots$, o bien: $\sin n\omega = Bx\left(1 - \dfrac{x^2}{x_1^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{x_2^2}\right)\ldots$ Del desarrollo anterior se tiene: $\sin n\omega = (-1)^m\left[x^n(\ldots) - x^{n-2}(\ldots) + x^3\left[\binom{n}{2m-2} + \binom{n}{2m}\binom{m}{1}\right](-1)^{h+1} + \binom{n}{2m}x(-1)^h\right]\ldots$. La suma pedida es: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{x_2\ldots x_n + \ldots}{x_1x_2\ldots x_n} = (-1)\dfrac{\text{penúltimo coeficiente}}{\text{último coeficiente}} =$ $= \dfrac{\binom{n}{2m-2} + \binom{n}{2m}\binom{m}{1}}{\binom{n}{2m}} == \dfrac{n^2-1}{6} = \dfrac{(2k+1)^2-1}{6} = \dfrac{2}{3}k(k+1)$.

M 57- Hallar la suma $S = \displaystyle\sum_{h=0}^{n} \dfrac{(2h-5)!!(2n-2h+3)!!}{(2h)!!(2n-2h)!!}$.

Solución: Operando: $S = \displaystyle\sum_{h=0}^{n} \dfrac{(2h-5)!!(2n-2h+3)!!}{(2h)!!(2n-2h)!!} \cdot \dfrac{(2n-2h+3)!!(2n-2h+2)!!}{(2n-2h+3)!!(2n-2h+2)!!} =$

$$= \sum_{h=0}^{n} \frac{(2h-5)!(2n-2h+3)!}{2^h h! 2^{h-3}(h-3)! 2^{n-h}(n-h)! 2^{n-h+1}(n-h+1)!} =$$

$$= \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2h-5}{h}\frac{(n-h+3)(n-h+2)}{(h-3)(h-4)}\binom{2n-2h+3}{n-h} = \frac{1}{2^{2n-2}}\sum_{h=0}^{n}\binom{2h-5}{h}\binom{2n-2h+3}{n-h}\frac{\binom{n-h+3}{2}}{\binom{h-3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2^{2n-2}} \underset{\text{para } x=1}{\underleftrightarrow{(1+x)^{2h-5}(1+x)^{2n-2h+3}}} \frac{\overset{\text{3º coeficiente}}{(1+x)^{n-h+3}}}{\underset{\text{3º coeficiente}}{(1+x)^{h-3}}} = \frac{1}{2^{2n-2}} \underset{\text{para } x=1}{\underleftrightarrow{(1+x)^{2n-2}}}\underset{\text{coef indep.}}{(1+x)^n} = \frac{2^{2n-2}}{2^{2n-2}} = 1.$$

Nota: $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$, $(-3)!! = -1$, $(-5)!! = \dfrac{1}{3}$. Es decir: $[-(2n+1)]!! = \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)!!}$.

M 58- Hallar la suma $S = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{8} + \ldots + \arctan\dfrac{1}{2n^2}$, cuando $n \to \infty$.

Solución: $\arctan\dfrac{1}{2n^2} = \arctan\alpha - \arctan\beta$, $\dfrac{1}{2n^2} = \tan(\arctan\alpha - \arctan\beta) = \dfrac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$. Es decir: $2n^2(\alpha - \beta) = 1 + \alpha\beta$. Haciendo: $\alpha - \beta = k$, se tiene: $1 + \alpha\beta = 2n^2k$. Resolviendo el sistema:

$\alpha-\beta=k$, $\alpha\beta=2n^2k-1$, se obtiene: $\alpha^2-k\alpha+1-2n^2k=0$, $\alpha=\dfrac{1}{2}\left[k\pm\sqrt{k^2-4+8n^2k}\right]$. Para $k=2$, la raíz es exacta: $\alpha=2n+1$, $\beta=2n-1$. Luego se tiene la siguiente igualdad: $\arctan\dfrac{1}{2n^2}=\arctan(2n+1)-\arctan(2n-1)$. Por tanto:

$\arctan\dfrac{1}{2}=\arctan 3-\arctan 1$

$\arctan\dfrac{1}{2\cdot 2^2}=\arctan 5-\arctan 3$

$\arctan\dfrac{1}{2\cdot 3^2}=\arctan 7-\arctan 5$

....

$\arctan\dfrac{1}{2\cdot n^2}=\arctan(2n+1)-\arctan(2n-1)$

Sumando las igualdades anteriores, se tiene: $S=\arctan(2n+1)-\arctan 1$. Luego para $n\to\infty$, $S=\arctan\infty-\arctan 1=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$.

M 59- Calcular $S=k\binom{a}{k}+(k-1)\binom{a}{k-1}\binom{b}{1}+(k-2)\binom{a}{k-2}\binom{b}{2}+\ldots+\binom{a}{1}\binom{b}{k-1}$.

Solución: Como: $(k-n)\binom{a}{k-n}=a\binom{a-1}{k-n-1}$, se tiene que:

$S=a\binom{a-1}{k-1}+a\binom{a-1}{k-2}\binom{b}{1}+a\binom{a-1}{k-3}\binom{b}{2}+\ldots+a\binom{a-1}{0}\binom{b}{k-1}=$

$=a\left[\binom{a-1}{k-1}+\binom{a-1}{k-2}\binom{b}{1}+\binom{a-1}{k-3}\binom{b}{2}+\ldots+\binom{a-1}{0}\binom{b}{k-1}\right]=$

$=a\binom{a+b-1}{k-1}=a\dfrac{(a+b-1)!}{(k-1)!(a+b-k)!}$.

M 60- Calcular $S=\binom{m-p}{0}\binom{m}{m-p}-\binom{m-p+1}{1}\binom{m}{m-p+1}+\ldots+(-1)^p\binom{m}{p}\binom{m}{m}$.

Solución: Como: $\binom{m-p+n}{n}\binom{m}{m-p+n}=\binom{m}{p}\binom{p}{n}$, se tiene que:

$S=\binom{m}{p}\binom{p}{0}-\binom{m}{p}\binom{p}{1}+\ldots+(-1)^p\binom{m}{p}\binom{p}{p}=\binom{m}{p}\left[\binom{p}{0}-\binom{p}{1}+\ldots+(-1)^p\binom{p}{p}\right]=$

$=\binom{m}{p}(1-x)^p$. Para $x=1$, $S=0$.

M 61- Calcular $S=\binom{m-p}{0}\binom{m}{m-p}+\binom{m-p+1}{1}\binom{m}{m-p+1}+\ldots+\binom{m}{p}\binom{m}{m}$.

Solución: Como: $\binom{m-p+n}{n}\binom{m}{m-p+n}=\binom{m}{p}\binom{p}{n}$, se tiene que:

$S=\binom{m}{p}\binom{p}{0}+\binom{m}{p}\binom{p}{1}+\ldots+\binom{m}{p}\binom{p}{p}=$

$=\binom{m}{p}\left[\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\ldots+\binom{p}{p}\right]=\binom{m}{p}(1+x)^p$. Para $x=1$, $S=2^p\binom{m}{p}$.

M 62- Demostrar que $\left[1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots\right]^2+\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\ldots\right]^2=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots$

Solución: Sea: $A=1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots$, $B=\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\ldots$ Se tiene que: $(1+i)^n=1+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^2+\ldots=1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots+i\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\ldots\right]=A+Bi$. El cuadrado del módulo de $(1+i)^n$, es $|(1+i)^n|^2=A^2+B^2$. Pero: $(1+i)^n=\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^n$, siendo el cuadrado de su módulo: 2^n, que es igual a: $(1+1)^n=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots$ Por tanto, se tiene que: $A^2+B^2=\left[1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots\right]^2+\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\ldots\right]^2$, es igual a $2^n=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots$

M 63- En una progresión geométrica de n términos, se da la suma S de los $n-1$ primeros y la suma S' de los $n-1$ últimos. Hallar la razón y el primer término.

Solución: Siendo a el primer término y r la razón, se tiene que: $S=\dfrac{ar^{n-1}r-a}{r-1}=\dfrac{ar^n-a}{r-1}$. $S'=\dfrac{ar^nr-ar}{r-1}=\dfrac{ar^n-a}{r-1}r$. Luego: $r=\dfrac{S'}{S}$, $a=S\dfrac{r-1}{r^n-1}=S^{n-1}\dfrac{S'-S}{S'^{n-1}-S^{n-1}}$.

M 64- En cada intervalo formado por dos términos consecutivos de la progresión geométrica 1, q, $q^2,\ldots,$ q^n, se interpolan k medios aritméticos, de los que se pide su suma total expresada en función de q, n, k, Hallar el valor de esta suma cuando la progresión geométrica dada sea decreciente e indefinida.

Solución: En el intervalo, q^h-q^{h+1}, los k medios aritméticos son: q^h+d, $q^h+2d,\ldots,$ q^h+kd, siendo: $q^h+(k+1)d=q^{h+1}$. Por tanto: $d=\dfrac{q^{h+1}-q^h}{k+1}$, siendo la suma de los k medios:

$\frac{1}{2}kq^h(1+q)$. La suma en el total de los n intervalos es: $\frac{1}{2}k(1+q)[1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}] = = \frac{1}{2}k(1+q)\frac{q^n-1}{q-1}$. En el caso de la progresión decreciente ilimitada ($q<1$), la suma es: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}k(1+q)\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{1}{2}k\frac{1+q}{1-q}$.

M 65- Hallar la suma S de los k sumandos siguientes:

$S = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k+2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(k+1)+3\cdot4\cdot\ldots\cdot(k+2)+\ldots+k(k+1)\ldots(2k-1)$.

Solución: $U_n = n(n+1)\ldots(n+k-1)$, $U_{n+1} = (n+1)\ldots(n+k)$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+k}{n}$. Se trata de una progresión hipergeométrica en la que: $\alpha = 1$, $\beta = k$, $\gamma = 0$, cuya suma es: $S = U_k\frac{(k+k)}{k+1} = k(k+1)\ldots(k+k-1)\frac{2k}{k+1} = \frac{(2k-1)!2k}{(k-1)!(k+1)} = \frac{(2k)!k}{(k+1)!}$.

M 66- En la progresión hipergeométrica $1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\ldots+(2n-1)(2n+1)$, la suma de los m primeros términos vale 215, y la suma de los m últimos términos vale 1.655. Hallar el número de términos y la suma total.

Solución: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2n+3}{2n-1}$. Luego: $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$. Por lo tanto: $U_m = (2m-1)(2m+1)$, $S_m = \frac{(2m-1)(2m+1)(3+2m)+3}{6} = \frac{m(4m^2+6m-1)}{3} = 215$. De aquí se tiene: $4m^3+6m^2-m-645 = 0$. Esta ecuación tiene la raíz entera $m = 5$, es decir que dicha suma corresponde a los cinco primeros términos. La suma de los n términos es: $S_n = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$, y la suma de los primeros $(n-5)$ términos es la siguiente: $S_{n-5} = \frac{(n-5)[4(n-5)^2+6(n-5)-1]}{3}$. Luego la suma de los cinco últimos términos es: $S_n - S_{n-5} = 20n^2-80n+115 = 1655$. Esta ecuación tiene las raíces: -7 y 11. Por tanto, la progresión tiene 11 términos, y la suma total de estos 11 términos es: $S_{11} = 2013$.

M 67- Dada la serie $|+-|$, $|-+|$, $|-++-|$, $|-++-+--+|$, $|-++-+--++--+-++-|,\ldots$, hallar el signo correspondiente al lugar n.

Solución: Dentro del intervalo $2^h, 2^{h+1}$, el lugar $n-2^h$ puede estar en el subintervalo $2^i, 2^{i+1}$. Dentro de este subintervalo, el lugar $n-2^h-2^i$ puede estar en el subsubintervalo $2^j, 2^{j+1}$, etc. hasta que se llega al lugar 0 ó 1, correspondiendo al 0 el signo +, y al 1 el signo $-$. Seguidamente se cambia el signo tantas veces como intervalos se hayan encontrado. Por ejemplo, para $n = 37$, $37-32 = 5$, $5-4 = 1$; luego le corresponde el signo $-$ por ser 1, y como se han encontrado 3 intervalos (37 está en el tercer intervalo) tres cambios dan el signo +. Otro ejemplo: $n = 18$, $18-16 = 2$, $2-2 = 0$, luego le corresponde el signo + por ser 0, y como se han encontrado dos intervalos (18 está en el segundo intervalo), se mantiene el signo +. Lo anterior es similar a poner el número n en base 2. Si $n_{(2}$ termina en 0, le corresponde el signo +, que se cambia tantas veces como dígitos 1 tenga $n_{(2}$ Si $n_{(2}$ termina en 1, le corresponde el signo $-$, que se cambia tantas veces como dígitos 1 tenga $n_{(2}$.

M 68- Hallar la suma $S = a+\frac{1}{a}+2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+3\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+\ldots+n\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)$. Aplicar para $a = 10$, $n = 3$.

Solución: $S = S_1+S_2 = \underbrace{a+2a^2+\ldots+na^n}_{S_1}+\underbrace{a^{-1}+2a^{-2}+\ldots+na^{-n}}_{S_2}$, $S_1 = a+2a^2+\ldots+na^n$, $aS_1 = a^2+\ldots+na^{n+1}$, $S_1(1-a) = a+a^2+\ldots+a^n-na^{n+1}$, $S_1 = \frac{\frac{a^{n+1}-a}{a-1}-na^{n+1}}{1-a}$. De forma similar, $S_2 = \frac{\frac{a^{-n-1}-a^{-1}}{a^{-1}-1}-na^{-n-1}}{1-a^{-1}}$. Luego, $S = \frac{\frac{a^{n+1}-a}{a-1}-na^{n+1}}{1-a}+\frac{\frac{a^{-n-1}-a^{-1}}{a^{-1}-1}-na^{-n-1}}{1-a^{-1}} = = \frac{na^{2n+2}-(n+1)a^{2n+1}+2a^{n+1}-(n+1)a+n}{(a-1)^2a^n}$. Aplicación: $a = 10$, $n = 3$, $S = 3.210,123$.

M 69- Demostrar que $S_n = 2^{n-1} + \frac{n}{1!}2^{n-2} + \frac{n(n+1)}{2!}2^{n-3} + \ldots + \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!} = 4^{n-1}$.

Solución: La suma es: $S_n = 2^{n-1} + \binom{n}{1}2^{n-2} + \binom{n+1}{2}2^{n-3} + \ldots + \binom{2n-4}{n-3}2^2 + \binom{2n-3}{n-2}2 + \binom{2n-2}{n-1}$. $S_{n-1} = 2^{n-2} + \binom{n-1}{1}2^{n-3} + \binom{n}{2}2^{n-4} + \ldots + \binom{2n-4}{n-3}2 + \binom{2n-4}{n-2}$. Como: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$, se tiene que: $S_n = 2^{n-1} + \binom{n-1}{1}2^{n-2} + \binom{n}{2}2^{n-3} + \binom{n+1}{3}2^{n-4} + \ldots + \binom{2n-5}{n-3}2^2 + \binom{2n-4}{n-2}2 + \binom{2n-3}{n-1} + \binom{n-1}{0}2^{n-2} + \binom{n}{1}2^{n-3} + \binom{n}{2}2^{n-4} + \ldots + \binom{2n-5}{n-4}2^2 + \binom{2n-4}{n-3}2 + \binom{2n-3}{n-2} = 2S_{n-1} + \binom{2n-3}{n-1} + \frac{S_n - \binom{2n-2}{n-1}}{2}$. Luego: $S_n = 4S_{n-1} + 2\binom{2n-3}{n-1} - \binom{2n-2}{n-1} = 4S_{n-1}$. Siendo: $S_1 = 2^0 = 1$, $S_2 = 4, .S_n = 4^{n-1}$, con lo que queda demostrado.

M 70- Estudiar la serie $3 + x - 5x^2 - 7x^3 + 3x^4 + 17x^5 + 11x^6 - 23x^7 - 45x^8 + \ldots$ y sumarla si es posible.

Solución: Para comprobar si hay una ley de recurrencia entre los coeficientes, se calcula su determinante y sus menores: $\begin{vmatrix} -45 & -23 & 11 & 17 & 3 \\ -23 & 11 & 17 & 3 & -7 \\ 11 & 17 & 3 & -7 & -5 \\ 17 & 3 & -7 & -5 & 1 \\ 3 & -7 & -5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Los menores de 4º y 3º orden son nulos, los de 2º no. Luego hay una ley de recurrencia del tipo: $A \cdot U_{n+2} + B \cdot U_{n+1} + C \cdot U_n = 0$. Resolviendo el sistema: $-5A + B + 3C = 0$, $-7A - 5B + C = 0$, $3A - 7B - 5C = 0$, se obtiene: $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$. Luego la ley de recurrencia es: $U_{n+2} - xU_{n+1} + 2x^2U_n = 0$. Las raíces de $x^2 - x + 2 = 0$, son: $\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$, siendo su módulo $\sqrt{2}$. Por tanto, la serie converge para $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. La suma es: $S = \frac{3-2x}{1-x+2x^2}$.

M 71- Aplicando la teoría de las diferencias sucesivas, sumar la serie de término general $U_n = \frac{f(n)}{n!}$, siendo $f(n)$ un polinomio de grado p.

Solución: Sea la suma: $\sum \frac{f(n)}{n!}x^n = \left[\sum \frac{(x\nabla)^n}{n!}\right]f(0) = (e^{x\nabla})f(0) = e^{x+x\Delta}f(0) = e^x[e^{x\Delta}]f(0) = e^x\left[1 + \frac{x\Delta}{1!} + \frac{x^2\Delta^2}{2!} + \ldots + \frac{x^p\Delta^p}{p!}\right]f(0)$. Luego para $x = 1$ se tiene la suma pedida: $e\left[1 + \frac{\Delta}{1!} + \frac{\Delta^2}{2!} + \ldots + \frac{\Delta^p}{p!}\right]f(0)$.

M 72- Sumar la serie de término general $U_n = \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$.

Solución: Derivando tres veces U_n, se tiene: $\frac{d^3U_n}{(dx)^3} = x^{n-3}$. De donde: $\frac{d^3S}{(dx)^3} = \sum x^{n-3}$, o lo que es equivalente: $\frac{d^3S}{(dx)^3} = \sum x^n = \frac{1}{1-x}$. Integrando: $\frac{d^2S}{(dx)^2} = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)$. Volviendo a integrar: $\frac{dS}{dx} = -\int \ln(1-x)dx = -x\ln(1-x) + x + \ln(1-x)$. De donde integrando se tiene: $S = \int[-x\ln(1-x) + x + \ln(1-x)]dx = \frac{3x^2-2x}{4} - (1-x)^2\ln\sqrt{1-x}$.

M 73- Calcular $S = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2n^2}$.

Solución: $S = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^4}{36}$.

M 74- Demostrar que $\frac{2\cos n}{n} = \sum(-1)^p \frac{1}{n-p}\binom{n-p}{p}q^{n-2p}$.

Solución: $\ln[1+x(x-2\cos\theta)] = \ln(1+xe^{\theta i}) + \ln(1+xe^{-\theta i})$. Desarrollando en serie e igualando los coeficientes de x^n, queda: $\dfrac{e^{n\theta i}+e^{-n\theta i}}{n} = \dfrac{2\cos n\theta}{n} = \sum(-1)^p \dfrac{1}{n-p}\binom{n-p}{p} q^{n-2p}$, con lo que queda demostrado. La suma sale de tomar los términos de x^n, en el desarrollo de $\ln[1+x(x-2\cos\theta)] = \sum(-1)^{n-1}\dfrac{x^n(x-2\cos\theta)^n}{n}$.

M 75- Hallar $\sum_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+(n-1)^2}\right]$.

Solución: $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2} = |\arctan x|_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$.

M 76- Dada la serie $1+x-x^2+x^3+3x^4-3x^5-x^6+\ldots$, hallar la función racional equivalente a dicha serie y el intervalo de valores de x para los que es cierta dicha equivalencia.

Solución: El determinante de los coeficientes es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Los menores de 3º orden no son nulos, por tanto existe una ley de recurrencia del tipo: $AU_{n+3}+BU_{n+2}+CU_{n+1}+DU_n = 0$. Resolviendo el sistema: $A-B+C+D=0$, $3A+B-C+D=0$, $-3A+3B+C-D=0$, $-A-3B+3C+D=0$, se obtiene: $A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=-2$. Luego los coeficientes verifican la ley: $a_{n+3}+a_{n+1}-2a_n = 0$, y los términos verifican la ecuación de recurrencia: $U_{n+3}+x^2U_{n+1}-2x^3U_n = 0$. Dando valores a n, se tiene:

para $n=0$: $U_3+U_1x^2-2U_0x^3 = 0$
para $n=1$: $U_4+U_2x^2-2U_1x^3 = 0$
para $n=2$: $U_5+U_3x^2-2U_2x^3 = 0$
....
para $n=n$: $U_{n+3}+U_{n+1}x^2-2U_nx^3 = 0$

Sumando estas ecuaciones, y considerando que: $S = U_0+U_1+U_2+\ldots+U_n$, se tiene: $S-U_0-U_1-U_2+x^2(S-U_0)-2x^3S = 0$, $S(1+x^2-2x^3) = U_0+U_1+U_2+U_0x^2$. Como: $U_0=1$, $U_1=x$, $U_2=-x^2$, $S = \dfrac{1+x-x^2+x^2}{1+x^2-2x^3} = \dfrac{1+x}{1+x^2-2x^3}$. Las raíces de la ecuación característica, $1+x^2-2x^3 = 0$, son: 1 y $\dfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{4}$, siendo por tanto sus módulos: 1 y $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, luego el radio de convergencia (inverso del módulo) es 1, por lo que el valor hallado para S es cierto para $x<1$.

M 77- Calcular $P = \prod_1^{\infty}\dfrac{n(a+b+n)}{(n+a)(n+b)}$, utilizando la función Γ.

Solución: $P = \prod_1^{\infty}\dfrac{n(a+b+n)}{(n+a)(n+b)} = \dfrac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1)\Gamma(a+b+1)} = \dfrac{a\Gamma(a)b\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)} = \dfrac{ab\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}$.

M 78- Demostrar que en el intervalo $(0,\pi)$, $\sum_0^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} = \dfrac{1}{8}\pi x(\pi-x)$. Calcular $\sum_0^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Solución: Sean las series: $S = \dfrac{\sin x}{1^3}+\dfrac{\sin 3x}{3^3}+\ldots$, $C = 1+\dfrac{\cos x}{1^3}+\dfrac{\cos 3x}{3^3}+\ldots$ y sea la función: $F(x) = C+iS = 1+\dfrac{e^{xi}}{1^3}+\dfrac{e^{3xi}}{3^3}+\ldots$ Haciendo: $y = e^{xi}$, se tiene que: $f(y) = 1+\dfrac{y}{1^3}+\dfrac{y^3}{3^3}+\ldots$ Derivando dos veces $F(x)$: $F'(x) = i\dfrac{e^{xi}}{1^2}+i\dfrac{e^{3xi}}{3^2}+\ldots$, $F''(x) = -\dfrac{e^{xi}}{1}-i\dfrac{e^{3xi}}{3}-\ldots$ Luego, $-F''(x) = \dfrac{y}{1}+\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{y^5}{5}+\ldots = -\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$. Integrando dos veces, se obtiene: $-2F(x) = \dfrac{y^2}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}+y\ln(y^2-1)+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y+1}{y-1}-y$. La parte imaginaria de $F(x)$ es: $i\left[\dfrac{x}{2}\arcsin^2 1-\dfrac{x^2}{4}\arcsin 1\right]$. Luego en el intervalo $(0,\pi)$ se tiene que:

$S = \left| \frac{x}{2}\arcsin^2 1 - \frac{x^2}{4}\arcsin 1 \right|_0^{\pi} = \frac{x}{2}\frac{\pi^2}{4} - \frac{x^2}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{8}\pi x(\pi - x)$. De donde se deduce: $\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \sum_0^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$ (para $x = \frac{\pi}{2}$) $= \frac{1}{8}\pi\frac{\pi}{2}(\pi - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^3}{32}$.

M 79- Calcular $f(x,y) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x^2}{(2n\pi - y)^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{(2n\pi + y)^2}\right) \right]$.

Solución: Operando, el producto es: $f(x,y) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n\pi - y)^2 + x^2}{(2n\pi - y)^2} \bullet \frac{(2n\pi + y)^2 + x^2}{(2n\pi + y)^2} \right] =$
$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n\pi - y - ix)(2n\pi - y + ix)(2n\pi + y - ix)(2n\pi + y + ix)}{(4n^2\pi^2 - y^2)^2} =$
$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{[4n^2\pi^2 - (y+ix)^2][4n^2\pi^2 - (y-ix)^2]}{(4n^2\pi^2 - y^2)^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 - \frac{\left(\frac{y+ix}{2}\right)^2}{n^2\pi^2}\right]\left[1 - \frac{\left(\frac{y-ix}{2}\right)^2}{n^2\pi^2}\right]}{\left[1 - \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{n^2\pi^2}\right]^2} =$

$= \frac{\frac{\sin(\frac{y+ix}{2})}{\frac{y+ix}{2}} \frac{\sin(\frac{y-ix}{2})}{\frac{y-ix}{2}}}{\left[\frac{\sin(\frac{y}{2})}{\frac{y}{2}}\right]^2} = \frac{y^2 \sin(\frac{y+ix}{2})\sin(\frac{y-ix}{2})}{(y^2 + x^2)\sin^2(\frac{y}{2})}$, Desarrollando y teniendo en cuenta que: $\sin\theta i = i\sinh\theta$, $\cos\theta i = \cosh\theta$, $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$, $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$, $\sinh^2\frac{\theta}{2} = \frac{\cosh\theta - 1}{2}$, $\cosh^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cosh\theta}{2}$, el producto pedido es: $f(x,y) = \frac{y^2(\cosh x - \cos y)}{(y^2+x^2)(1-\cos y)}$.

M 80- Determinar el valor de U_n en función de U_0, sabiendo que $U_{n+1}U_n^2 - U_{n+1} + 2U_n = 0$.

Solución: $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 - U_n^2}$. Haciendo $\theta = \arctan U_0$, se obtiene: $U_1 = \tan 2\theta$, $U_2 = \tan 4\theta, \ldots$, $U_n = \tan 2^n\theta$.

M 81- Hallar $S = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{4} + \ldots + \binom{2n}{2n}$.

Solución: $U_n = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{4} + \ldots + \binom{2n}{2n}$.
$U_{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{4} + \ldots + \binom{2n+2}{2n+2}$.
$U_{n+2} = \binom{n+2}{0} + \binom{n+3}{2} + \binom{n+4}{4} + \ldots + \binom{2n+4}{2n+4}$.
$V_n = \binom{n}{1} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{5} + \ldots + \binom{2n-1}{2n-1}$.
$V_{n+1} = \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{3} + \binom{n+3}{5} + \ldots + \binom{2n+1}{2n+1}$.
$V_{n+2} = \binom{n+2}{1} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{5} + \ldots + \binom{2n+3}{2n+3}$.
Se verifica que: $U_n + V_n = V_{n+1}$, $U_n + V_{n+1} = U_{n+1}$, $2U_n + V_n = U_{n+1}$, $2U_{n+1} + V_{n+1} = U_{n+2}$, $V_{n+1} = U_{n+2} - 2U_{n+1} = U_{n+1} - U_n$, es decir: $U_{n+2} = 3U_{n+1} - U_n$. La función generatriz es: $\frac{1-x}{1-3x+x^2} = 1 + 2x + 5x^2 + 13x^3 + 34x^4 + 89x^5 + \ldots$ Por tanto: $U_0 = 1$, $U_1 = 2$, $U_2 = 5$, $U_3 = 13$, $U_4 = 34$, $U_5 = 89, \ldots$ Para hallar estos valores en función de n, se tiene que la ecuación característica es la siguiente: $x^2 - 3x + 1 = 0$, cuyas raíces son: $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Luego: $U_n = A\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Dando valores a n, se obtiene: $A = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$, $B = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$. De donde: $U_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

M 82- Hallar el valor del producto infinito
$P = z(1 - \frac{z}{\pi})(1 - \frac{z}{2\pi})(1 - \frac{z}{3\pi})(1 + \frac{z}{\pi})(1 - \frac{z}{4\pi})(1 - \frac{z}{5\pi})(1 - \frac{z}{6\pi})(1 + \frac{z}{2\pi})\ldots$

Solución: Tomando logaritmos en el producto infinito $\frac{P}{z}$, se tiene: $\ln\frac{P}{z} = \ln(1 - \frac{z}{\pi}) + \ln(1 - \frac{z}{2\pi}) + \ln(1 - \frac{z}{3\pi}) + \ln(1 + \frac{z}{\pi}) + \ldots$ En esta serie hay tres términos que tienen signo negativo (son logaritmos de números menores que la unidad) por cada término con signo positivo. Luego la relación entre términos positivos y negativos es: $k=\frac{1}{3}$. Ordenando los términos de $\ln\frac{P}{z}$, se tiene: $\ln(1-\frac{z}{\pi})+\ln(1+\frac{z}{\pi})+\ln(1-\frac{z}{2\pi})+\ln(1+\frac{z}{2\pi})+\ldots+$ $+\ln(1-\frac{z}{n\pi})+\ln(1+\frac{z}{n\pi})=\sum_{n=1}^{n=\infty}\ln\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)=\ln\frac{\sin z}{z}$. En esta serie ordenada, en el conjunto de los $2n$ términos expuestos, se tiene que: $g=\lim_{n\to\infty}2nU_{2n}=\lim_{n\to\infty}2n\ln(1+\frac{z}{n\pi})=$ $=\lim_{n\to\infty}2\ln(1+\frac{z}{n\pi})^n=2\ln e^{\frac{z}{\pi}}=\frac{2z}{\pi}$. Aplicando la fórmula: $S'=S+\frac{1}{2}g\ln k$, que relaciona la suma S' de una serie dada, con la suma S de la serie ordenada, se tiene: $\ln\frac{P}{z}=\ln\frac{\sin z}{z}+\frac{1}{2}\frac{2z}{\pi}\ln\frac{1}{3}=\ln\left(\frac{\sin z}{z}\cdot 3^{\frac{-z}{\pi}}\right)$. Luego: $P=3^{\frac{-z}{\pi}}\sin z=\frac{\sin z}{3^{\frac{z}{\pi}}}$.

M 83- Hallar la función $f(x,y)$ definida por el producto infinito:

$$P=\left(1+\frac{x}{\pi-y}\right)\left(1-\frac{x}{\pi-y}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi-y}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi-y}\right)\left(1+\frac{x}{5\pi-y}\right)\left(1-\frac{x}{5\pi-y}\right)\ldots$$

Solución: Multiplicando los dos términos generales, se tiene:

$$\left[1+\frac{x}{(2n+1)\pi-y}\right]\left[1-\frac{x}{(2n+1)\pi+y}\right]=\frac{(2n+1)^2\pi^2-(x-y)^2}{(2n+1)^2\pi^2-y^2}=\frac{1-\dfrac{(x-y)^2}{(2n+1)^2\pi^2}}{1-\dfrac{y^2}{(2n+1)^2\pi^2}}.$$

Luego: $P=\prod_{n=0}^{n=\infty}\dfrac{1-\dfrac{(x-y)^2}{(2n+1)^2\pi^2}}{1-\dfrac{y^2}{(2n+1)^2\pi^2}}=\dfrac{\cos\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{y}{2}}$.

M 84- Haciendo $(1+x)^n=\sum a_p x^p$ para todo valor de n natural, demostrar que las tres sumas: $S_0=\sum a_{3q}$, $S_1=\sum a_{3q+1}$, $S_2=\sum a_{3q+2}$, son tales que siempre dos de ellas son iguales y difieren de la otra en una unidad.

Solución: Siendo $1,\varepsilon,\hat{\varepsilon}$, las raíces cúbicas de la unidad:

$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n$.

$(1+\varepsilon x)^n=1+\binom{n}{1}\varepsilon x+\binom{n}{2}\varepsilon^2x^2+\ldots+\binom{n}{n}\varepsilon^n x^n$.

$(1+\hat{\varepsilon}x)^n=1+\binom{n}{1}\hat{\varepsilon}x+\binom{n}{2}\hat{\varepsilon}^2x^2+\ldots+\binom{n}{n}\hat{\varepsilon}^n x^n$. Sumando las tres igualdades, se obtiene:

$(1+x)^n+(1+\varepsilon x)^n+(1+\hat{\varepsilon}x)^n=3[1+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots]$.

Luego: $1+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots=\dfrac{2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}}{3}=S_0$.

Procediendo de la misma forma con $x(1+x)^n$, $\varepsilon x(1+\varepsilon x)^n$, $\hat{\varepsilon}x(1+\hat{\varepsilon}x)^n$, se obtiene:

$x(1+x)^n+\varepsilon x(1+\varepsilon x)^n+\hat{\varepsilon}x(1+\hat{\varepsilon}x)^n=3[\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\ldots]$.

Luego: $\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\ldots=\dfrac{2^n-\cos\frac{n\pi}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}}{3}=S_2$.

Procediendo de la misma forma con $x^2(1+x)^n$, $\varepsilon^2x^2(1+\varepsilon x)^n$, $\hat{\varepsilon}^2x^2(1+\hat{\varepsilon}x)^n$, se obtiene:

$x^2(1+x)^n+\varepsilon^2x^2(1+\varepsilon x)^n+\hat{\varepsilon}^2x^2(1+\hat{\varepsilon}x)^n=3[\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\ldots]$.

$\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\ldots=\dfrac{2^n-\cos\frac{n\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}}{3}=S_1$.

Con las tres igualdades obtenidas, se demuestra el enunciado. En efecto: Para: $n=\dot{6}$, $S_1=S_2=S_0-1$. Para: $n=\dot{6}+1$, $S_0=S_1=S_2+1$. Para: $n=\dot{6}+2$, $S_0=S_2=S_1-1$. Para: $n=\dot{6}+3$, $S_1=S_2=S_0+1$. Para: $n=\dot{6}+4$, $S_0=S_1=S_2-1$. Y para: $n=\dot{6}+5$, $S_0=S_2=S_1+1$.

M 85- Sea $f(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+k^nx)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, siendo k una constante. Hallar el término general a_n del desarrollo.

Solución: El producto sólo converge si $|k|<1$ independientemente de lo que valga x, salvo en el caso $x = 0$. Como $f(kx) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + k^n(kx)]$, se tiene: $(1+kx)f(kx) = f(x)$. Al desarrollar ambos miembros en serie de potencias: $(1+kx)\sum_{n=1}^{\infty} a_n k^n x^n = \sum a_n x^n$, se obtiene la ley de recurrencia: $a_n = \dfrac{k^n}{1-k^n} a_{n-1}$, de lo que se deduce: $a_n = \dfrac{k}{1-k} \cdot \dfrac{k^2}{1-k^2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{k^n}{1-k^n}$.

M 86- Calcular el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{xa_n}{n}\right)$, siendo $a_n = \dfrac{(\sqrt{5}-1)^n - (-\sqrt{5}-1)^n}{2^n\sqrt{5}}$.

Solución: El producto es: $(1+x)(1-\frac{x}{2})(1+\frac{x}{4})(1-\frac{x}{5})(1+\frac{x}{7})\ldots =$

$$= (1+x)\prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{3n-1}\right)\left(1 + \frac{x}{3n+1}\right) = (1+x)\prod_{1}^{\infty}\frac{1 - \dfrac{(1+x)^2}{9n^2}}{1 - \dfrac{1}{9n^2}} =$$

$$= (1+x)\frac{\sin\dfrac{\pi(1+x)}{3}}{\dfrac{\pi(1+x)}{3}\sin\dfrac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi(1+x)}{3}.$$

M 87- Calcular la suma de la serie $S = \dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \dfrac{2}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots + \dfrac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} + \ldots$

Solución: La serie es convergente, descomponiéndose de la siguiente forma:

$$\sum\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \sum\frac{1}{16(2n-1)} + \sum\frac{1}{8(2n-1)} - \sum\frac{3}{16(2n+3)} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots\right) - \frac{3}{16}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots\right) =$$

$= \frac{1}{16}(1 + \frac{1}{3}) + \frac{1}{8}(\frac{1}{3})$, pues el resto de los sumandos se anulan entre sí, como es el caso de: $\frac{1}{5}(\frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{3}{16}) = 0$, etc. Por tanto: $S = \frac{1}{8}$.

M 88- Calcular $S = \cos x\cos y + \dfrac{\cos 2x\cos 2y}{2} + \dfrac{\cos 3x\cos 3y}{3} + \ldots + \dfrac{\cos nx\cos ny}{n} + \ldots$

Solución: $\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$. Por tanto, $S = A + B$, siendo:

$$A = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \frac{\cos(2x+2y)}{2} + \ldots + \frac{\cos(nx+ny)}{n} + \ldots\right],$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \frac{\cos(2x-2y)}{2} + \ldots + \frac{\cos(nx-ny)}{n} + \ldots\right],$$

$$D = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \frac{\sin(2x+2y)}{2} + \ldots + \frac{\sin(nx+ny)}{n} + \ldots\right],$$

$$E = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \frac{\sin(2x-2y)}{2} + \ldots + \frac{\sin(nx-ny)}{n} + \ldots\right].$$

Se tiene que: $A + iD = \frac{1}{2}\left[e^{(x+y)i} + \ldots + \frac{e^{(nx+ny)i}}{n} + \ldots\right] = \frac{1}{2}\left[e^{\theta i} + \ldots + \frac{e^{n\theta i}}{n} + \ldots\right]$, siendo: $\theta = x + y$. Derivando $A + iD$, se obtiene que: $(A+iD)' = \frac{i}{2}[e^{\theta i} + \ldots + e^{n\theta i} + \ldots] =$ $= \dfrac{i}{2}\dfrac{e^{\theta i}}{1-e^{\theta i}} = \dfrac{i}{2}\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta} = \dfrac{-\sin\theta + i(\cos\theta - 1)}{4(1-\cos\theta)}$. Luego: $A' = \dfrac{-\sin\theta}{4(1-\cos\theta)}$, $A = \int\dfrac{-\sin\theta}{4(1-\cos\theta)}d\theta = -\frac{1}{4}\ln(1-\cos\theta) = -\frac{1}{4}\ln[1-\cos(x+y)]$. De forma análoga: $B = -\frac{1}{4}\ln[1-\cos(x-y)]$. Luego: $S = A + B = -\frac{1}{4}\ln[1-\cos(x+y)] - \frac{1}{4}\ln[1-\cos(x-y)] =$ $= -\frac{1}{4}\ln\{[1-\cos(x+y)][1-\cos(x-y)]\} = -\frac{1}{4}\ln(\cos x - \cos y)^2 = -\frac{1}{2}\ln(\cos x - \cos y)$.

M 89- Hallar $S = \dfrac{3}{(x+3)(x-5)} - \dfrac{3\cdot 5}{(x+3)(x-5)(x+7)} - \dfrac{3\cdot 5\cdot 7}{(x+3)(x-5)(x+7)(x-9)} - \ldots$

Solución: Se tienen las siguientes relaciones: $\dfrac{3x}{(x+3)(x-5)} = \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{3\cdot 5}{(x+3)(x-5)}$, $\dfrac{-3\cdot 5x}{(x+3)(x-5)(x+7)} = \dfrac{-3\cdot 5}{(x+3)(x-5)} + \dfrac{3\cdot 5\cdot 7}{(x+3)(x-5)(x+7)}$, etc. Siendo el polinomio

$P_n(x) = (1+\frac{x}{3})(1-\frac{x}{5})(1+\frac{x}{7})\ldots(1+\frac{(-1)^n x}{2n-1})$, se tiene que: $xS_n = \frac{3}{x+3} - \frac{1}{P_n(x)}$. Para hallar su límite se agrupan de dos en dos los factores del polinomio: $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \prod_1^\infty \left[\left(1+\frac{x}{4n-1}\right)\left(1-\frac{x}{4n+1}\right)\right] = \prod_1^\infty \frac{1-(\frac{1-x}{4n})^2}{1-(\frac{1}{4n})^2} = \frac{\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi(1-x)}{4}}{\frac{\pi(1-x)}{4}\sin\frac{\pi}{4}} =$
$= \frac{\cos\frac{\pi x}{4} - \sin\frac{\pi x}{4}}{1-x}$. Luego: $S = \frac{3}{x(x+3)} + \frac{1-\frac{1}{x}}{\cos\frac{\pi x}{4} - \sin\frac{\pi x}{4}}$.

M 90- Calcular $P = U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot U_4 \cdot\ldots\cdot U_n \cdot\ldots$, sabiendo que $U_n = \frac{n^6-10n^4+31n^2-30}{n^6-21n^4+147n^2-343}$.

Solución: Operando: $U_n = \frac{(n^2-2)(n^2-3)(n^2-5)}{(n^2-7)^3} = \frac{(1-\frac{2}{n^2})(1-\frac{3}{n^2})(1-\frac{5}{n^2})}{(1-\frac{7}{n^2})^3}$. Luego: $P = \prod_1^\infty U_n = \frac{\prod_1^\infty(1-\frac{2}{n^2})\prod_1^\infty(1-\frac{3}{n^2})\prod_1^\infty(1-\frac{5}{n^2})}{\left[\prod_1^\infty(1-\frac{7}{n^2})\right]^3}$. Como: $\prod_1^\infty(1-\frac{k}{n^2}) = \frac{\sin\pi\sqrt{k}}{\pi\sqrt{k}}$, se tiene:

$$P = \frac{\frac{\sin\pi\sqrt{2}}{\pi\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\pi\sqrt{3}}{\pi\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin\pi\sqrt{5}}{\pi\sqrt{5}}}{\frac{\sin^3\pi\sqrt{7}}{(\pi\sqrt{7})^3}} = \sqrt{\frac{343}{30}}\,\frac{\sin\pi\sqrt{2}\cdot\sin\pi\sqrt{3}\cdot\sin\pi\sqrt{5}}{\sin^3\pi\sqrt{7}} \simeq 1{,}00553.$$

M 91- Calcular $\sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}\cos(2n+1)\theta}{2n+1}$.

Solución: Siendo: $C = \sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}\cos(2n+1)\theta}{2n+1}$, $S = \sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}\sin(2n+1)\theta}{2n+1}$, se tiene que: $C+iS = \sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}e^{i(2n+1)\theta} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+xe^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}$. La parte real de esta expresión, es la siguiente: $C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+xe^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1-2x^2\cos2\theta+x^4}}{1-2x\cos\theta+x^2}$.

M 92- Calcular $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}\cos(2n+1)\theta}{2n+1}$.

Solución: Siendo: $C = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}\cos(2n+1)\theta}{2n+1}$, $S = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}\sin(2n+1)\theta}{2n+1}$, se tiene que: $C+iS = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}e^{i(2n+1)\theta}}{2n+1} = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+ixe^{i\theta}}{1-ixe^{i\theta}}$. La parte real de esta expresión, es: $C = \frac{1}{2i}i\arg\frac{1+ixe^{i\theta}}{1-ixe^{i\theta}} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2x\cos\theta}{1-x^2}$.

M 93- Siendo $1, x_2, \ldots, x_n$, las raíces de $x^n-3x+2=0$, calcular $\sum_{i\neq1}^n \frac{1}{x_i-1}$.

Solución: Haciendo: $\frac{1}{x-1} = y$, $x = \frac{1+y}{y}$. Luego: $\frac{(1+y)^n}{y^n} - 3\frac{1+y}{y} + 2 = 0$, $(1+y)^n - 3(1+y)y^{n-1} + 2y^n = 0$, $(n-3)y^{n-1} + \binom{n}{2}y^{n-2} + \binom{n}{3}y^{n-3} + \ldots = 0$. Por tanto se tiene que: $\sum_{i\neq1}^n \frac{1}{x_i-1} = \sum y_i = -\frac{\binom{n}{2}}{n-3} = -\frac{n(n-1)}{2(n-3)}$.

M 94- Siendo $1, x_2, \ldots, x_n$, las n raíces de $x^n-3x+2=0$, calcular $\sum_{i\neq j}^n \frac{1}{(1+x_i)(1+x_j)}$.

Solución: Haciendo: $y=\dfrac{1}{1+x}$, $x=\dfrac{1-y}{y}$. Luego: $\dfrac{(1-y)^n}{y^n}-3\dfrac{1-y}{y}+2=0$, $(1-y)^n-3(1-y)y^{n-1}+2y^n=0$, $y^n[(-1)^n+5]+y^{n-1}\left[(-1)^{n-1}n-3\right]+y^{n-2}(-1)^{n-2}\binom{n}{2}+\ldots=0$. Por tanto: $\sum\limits_{i\neq j}^{n}\dfrac{1}{(1+x_i)(1+x_j)}=\sum y_iy_j=\dfrac{(-1)^{n-2}\binom{n}{2}}{(-1)^n+5}$. Para n par: $\sum=\dfrac{n(n-1)}{12}$. Para n impar: $\sum=\dfrac{-n(n-1)}{8}$.

M 95- Calcular $\sum\limits_{0}^{\infty}(3n-5-2^{n+2})x^n$, hallando el intervalo de convergencia. El cálculo se hará por descomposición en sumandos.

Solución: $\sum\limits_{0}^{\infty}(3n-5-2^{n+2})x^n=\sum\limits_{0}^{\infty}3nx^n+\sum\limits_{0}^{\infty}-5x^n+\sum\limits_{0}^{\infty}-2^{n+2}x^n=\sum_1+\sum_2+\sum_3$. $\sum_1=\dfrac{3x}{(1-x)^2}$, siendo su intervalo de convergencia $|x|<1$. $\sum_2=\dfrac{-5}{1-x}$, siendo su intervalo de convergencia $|x|<1$. $\sum_3=\dfrac{-4}{1-2x}$, siendo su intervalo de convergencia $|x|<\dfrac{1}{2}$. Luego: $\sum=\dfrac{3x}{(1-x)^2}+\dfrac{-5}{1-x}+\dfrac{-5}{1-x}=\dfrac{9-26x+20x^2}{(x-1)^2(2x-1)}$, para $|x|<\dfrac{1}{2}$.

M 96- Calcular $\sum\limits_{0}^{\infty}(3n-5-2^{n+2})x^n$, hallando el intervalo de convergencia. El cálculo se hará como serie recurrente.

Solución: Sea la división: $\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2}{b_o+b_1x+b_2x^2+b_3x^3}=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots$, De donde operando se tiene: $a_0+a_1x+a_2x^2=(c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots)(b_o+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)=$ $=c_0b_0+x(c_1b_0+b_1c_0)+x^2(c_0b_2+c_1b_1+c_2b_0)+\ldots$ Dando valores a n, se tienen las igualdades: $c_0=-9$, $c_1=-10$, $c_2=-15$, $c_3=-28,\ldots;b_0=-1$, $b_1=4$, $b_2=-5$, $b_3=2$. Luego: $a_0+a_1x+a_2x^2=(-9-10x-15x^2-28x^3+\ldots)(-1+4x+-5x^2+2x^3)==9-26x+20x^2$. Por tanto: $\sum=\dfrac{9-26x+20x^2}{-1+4x-5x^2+2x^3}$, con $|x|<\dfrac{1}{2}$.

M 97- Desarrollar en serie $y=\dfrac{1-2x+2x^2}{1-3x+4x^2-3x^3+x^4}$.

Solución: Descomponiendo en fracciones sencillas: $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1-x}{1-x+x^2}=$ $=(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots)+(-1-x-x^2-x^3-x^4-\ldots)+(1-x^2-x^3+x^5+x^6+\ldots)=$
$=\sum\limits_{0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum\limits_{0}^{\infty}x^n+\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^nx^{3n}+\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{3n+2}=$
$=\sum\limits_{0}^{\infty}[(6n+1)(x^{6n}+x^{6n+1}+x^{6n+2})+(6n+2)x^{6n+3}+(6n+4)x^{6n+4}+(6n+6)x^{6n+5}]=1+x+x^2+$
$+2x^3+4x^4+6x^5+7x^6+7x^7+7x^8+8x^9+10x^{10}+12x^{11}+\ldots+(6n+1)x^{6n}+(6n+1)x^{6n+1}+$
$+(6n+1)x^{6n+2}+(6n+2)x^{6n+3}+(6n+4)x^{6n+4}+(6n+6)x^{6n+5}+\ldots$. Estos valores se obtienen también al efectuar la división del enunciado.

M 98- Calcular $S=3-x+13x^2-9x^3+41x^4-53x^5+141x^6-\ldots$

Solución: $\begin{vmatrix}141 & -53 & 41 & -9\\ -53 & 41 & -9 & 13\\ 41 & -9 & 13 & -1\\ -9 & 13 & -1 & 3\end{vmatrix}=0$. Los menores de 3º orden no son nulos, luego los coeficientes tienen la siguiente ley recurrente: $AU_{n+3}+BU_{n+2}+CU_{n+1}+DU_n=0$. Resolviendo el sistema: $-9A+13B-C+3D=0$, $41A-9B+13C-D=0$, $-53A+41B-9C+13D=0$, se tiene: $A=1$, $B=0$, $C=-3$, $D=2$. Por tanto: $U_{n+3}-3U_{n+1}+2U_n=0$. De donde:

$U_{n+3} - 3x^2 U_{n+1} + 2x^3 U_n = 0$. $S = \dfrac{3 - x + 4x^2}{1 - 3x^2 + 2x^3}$, para $|x| < 1$.

M 99- Calcular $S = \sum_{n=0}^{p-1} \dfrac{\sin k(a+n\theta)}{\sin(a+n\theta)}$, siendo $k \leq 2p-1$ y $\theta = \dfrac{q\pi}{p}$.

Solución: Sean: $S = \sum_{n=0}^{p-1} \dfrac{\sin k(a+n\theta)}{\sin(a+n\theta)}$, $C = \sum_{n=0}^{p-1} \dfrac{\cos k(a+n\theta)}{\sin(a+n\theta)}$. $C + iS = \sum_{n=0}^{p-1} \dfrac{e^{ik(a+n\theta)}}{\sin(a+n\theta)} = \sum_{n=0}^{p-1} \dfrac{2ie^{ik(a+n\theta)}}{e^{i(a+n\theta)} - e^{-i(a+n\theta)}} = 2ie^{ika} \sum_{n=0}^{p-1} \dfrac{e^{ikn\theta}}{e^{i(a+n\theta)} - e^{-i(a+n\theta)}} = 2ie^{i(k-1)a} \sum_{n=0}^{p-1} \dfrac{e^{ikn\theta}}{e^{in\theta} - e^{-i(2a+n\theta)}} =$
$= 2ie^{i(k-1)a} \sum_{n=0}^{p-1} \dfrac{e^{i(k+1)n\theta}}{e^{i2n\theta} - e^{-i2a}}$. Haciendo: $e^{2\theta i} = t$, $e^{-2ai} = x$, se tiene: $C + iS = 2ie^{(k-1)ai} \sum_{n=0}^{p-1} \dfrac{t^{\frac{(k+1)n}{2}}}{t^n - x}$.
Descomponiendo en sumandos: $\dfrac{f(x)}{x^p - 1} = \sum \dfrac{A_n}{x - t^n}$, $A_n = \lim_{x \to t^n} \dfrac{(x - t^n) f(t^n)}{x^p - 1} = \lim \dfrac{f(t^n)}{px^{p-1}} =$ $= \dfrac{f(t^n)}{pt^{n(p-1)}} = t^{\frac{k+1}{2}n}$. Como $p \geq \dfrac{k+1}{2}$, se tiene: $\sum_{n=0}^{p-1} \dfrac{t^{\frac{(k+1)n}{2}}}{x - t^n} = \dfrac{px^{\frac{k-1}{2}}}{x^{p-1}}$. Sustituyendo x por e^{-2ai}:
$C + iS = 2ie^{i(k-1)a} \sum_{n=0}^{p-1} \dfrac{e^{i(k+1)n\theta}}{e^{i2n\theta} - e^{-i2a}} = \dfrac{2ipe^{pai}}{e^{pai} - e^{-pai}} = \dfrac{p(\cos pa + i \sin pa)}{\sin pa} = p \cot pa + ip$. Luego: $S = p$.

M 100- Calcular $S = \sum_{0}^{\infty} \dfrac{4n^2 + 43}{n^4 + 4n^3 + 15n^2 + 10n + 152}$.

Solución: Descomponiendo en fracciones sencillas: $S = \sum_{0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n^2 - 2n + 8} + \dfrac{3}{n^2 + 6n + 19} \right)$.
$\sum_{0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - 2n + 8} = \sum_{0}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)^2 + 7} = \sum_{-1}^{\infty} \dfrac{1}{m^2 + 7} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{7} + \sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{m^2 + 7} = \dfrac{15}{56} + \sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{m^2 + 7}$.
$\sum_{0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + 6n + 19} = \sum_{0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)^2 + 10} = \sum_{3}^{\infty} \dfrac{3}{m^2 + 10} = -\dfrac{3}{11} - \dfrac{3}{14} + 3 \sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{m^2 + 10} =$
$= \dfrac{-75}{154} + 3 \sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{m^2 + 10}$. Como: $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + a^2} = \dfrac{\pi a \coth a\pi - 1}{2a^2}$, se tiene que la suma pedida es:
$S = \dfrac{15}{56} - \dfrac{75}{154} + \dfrac{\pi\sqrt{7} \coth \sqrt{7}\pi - 1}{14} + \dfrac{3}{20}(\pi\sqrt{10} \coth \sqrt{10}\pi - 1)$.

M 101- Calcular $\sum \dfrac{1}{p^4 q^2}$, para todo número natural donde $p \neq q$.

Solución: $\sum \dfrac{1}{p^4 q^2} = \sum \dfrac{1}{p^4} \sum \dfrac{1}{q^2} - \sum \dfrac{1}{p^6} = H_4 H_2 - H_6$. Como: $H_2 = \dfrac{\pi^2}{6}$, $H_4 = \dfrac{\pi^4}{90}$, $H_6 = \dfrac{\pi^6}{945}$, se tiene que: $\sum \dfrac{1}{p^4 q^2} = \dfrac{\pi^6}{1260}$.

Nota: $-2\dfrac{H_{2p}}{\pi^{2p}} = (-1)^p \dfrac{2^{2p} B_{2p}}{(2p)!}$.

M 102- Calcular $S = \tan a + \tan(a + \frac{\pi}{5}) + \tan(a + \frac{2\pi}{5}) + \tan(a + \frac{3\pi}{5}) + \tan(a + \frac{4\pi}{5})$.

Solución: $\tan 5a + \tan(5a + \pi) + \tan(5a + 2\pi) + \tan(5a + 3\pi) + \tan(5a + 4\pi) = 5 \tan 5a$, ya que difieren todos en múltiplos de π. Haciendo $x = \tan a$, se tiene: $\tan 5a = \dfrac{5x - 10x^3 + x^5}{1 - 10x^2 + 5x^4}$. Luego: $x^5 - 5 \tan 5a x^4 - 10x^3 + 10 \tan 5a x^2 + 5x - \tan 5a = 0$. La suma pedida corresponde a la suma de las raíces, por lo que: $S = 5 \tan 5a$.

M 103- Calcular $P = \cos(\frac{a}{n} + \frac{\pi}{2n}) \cos(\frac{a}{n} + \frac{3\pi}{2n}) \ldots \cos(\frac{a}{n} + \frac{(2n-1)\pi}{2n})$.

Solución: $P_1 = \underbrace{\cos\frac{a}{n}\cos(\frac{a}{n}+\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{a}{n}+\frac{2\pi}{2n})\ldots\cos(\frac{a}{n}+\frac{(2n-1)\pi}{2n})}_{2n \text{ factores}}$.

$P_2 = \cos\frac{a}{n}\cos(\frac{a}{n}+\frac{2\pi}{2n})\cos(\frac{a}{n}+\frac{4\pi}{2n})\ldots\cos(\frac{a}{n}+\frac{(2n-2)\pi}{2n}) =$
$= \underbrace{\cos\frac{a}{n}\cos(\frac{a}{n}+\frac{\pi}{n})\cos(\frac{a}{n}+\frac{2\pi}{n})\ldots\cos(\frac{a}{n}+\frac{(n-1)\pi}{n})}_{n \text{ factores}}$.

El módulo del término independiente de la ecuación $(z-1)^{2n}-e^{4ai}=0$, es: $|1-e^{4ai}| = |1-\cos 4a - i\sin 4a| = \sqrt{2-2\cos 4a} = 2\sin 2a$. Las raíces de dicha ecuación son: $1+e^{\frac{2a+k\pi}{n}i}$, siendo sus módulos: $|1+\cos\frac{2a+k\pi}{n}+i\sin\frac{2a+k\pi}{n}| = 2\cos(\frac{a}{n}+\frac{k\pi}{2n})$, es decir: $2\cos(\frac{a}{n})$, $2\cos(\frac{a}{n}+\frac{\pi}{2n})$, $2\cos(\frac{a}{n}+\frac{2\pi}{2n})$. Por tanto, su producto es: $2^{2n}\cos\frac{a}{n}\cos(\frac{a}{n}+\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{a}{n}+\frac{2\pi}{2n})\ldots\cos(\frac{a}{n}+\frac{(2n-1)\pi}{2n}) = 2^{2n}P_1$, siendo igual a $2\sin 2a$. Por tanto: $P_1 = 2^{-2n+1}\sin 2a$. El módulo del término independiente de la ecuación $(z-1)^n - e^{2ai} = 0$ es: $(-1)^n - e^{2ai} = |(-1)^n - \cos 2a - i\sin 2a| = \sqrt{2+(-1)^{n+1}2\cos 2a} = 2\sin a$, para n par, o igual a $2\cos a$, para n impar. Las raíces de dicha ecuación son: $1+e^{\frac{2a+2k\pi}{n}i}$. Sus módulos son: $|1+\cos\frac{2a+2k\pi}{n}+i\sin\frac{2a+2k\pi}{n}| = 2\cos(\frac{a}{n}+\frac{k\pi}{n})$. Es decir: $2\cos(\frac{a}{n})$, $2\cos(\frac{a}{n}+\frac{\pi}{n})$, $2\cos(\frac{a}{n}+\frac{2\pi}{n})$,... Por tanto, su producto es: $2^n\cos\frac{a}{n}\cos(\frac{a}{n}+\frac{\pi}{n})\cos(\frac{a}{n}+\frac{2\pi}{n})\ldots = 2^nP_2$, siendo igual a: $2\sin a$, para n par, o igual a: $2\cos a$, para n impar. Por tanto: $P_2 = 2^{-n+1}\sin a$, para n par, o bien: $P_2 = 2^{-n+1}\cos a$, para n impar. Por tanto: $P = \frac{P_1}{P_2} = \frac{2^{-2n+1}\sin 2a}{2^{-n+1}\sin a} = 2^{-n+1}\cos a$, para n par, y $P = \frac{2^{-2n+1}\sin 2a}{2^{-n+1}\cos a} = 2^{-n+1}\sin a$, para n impar.

M 104- Hallar la serie cuya suma tiene el valor $A = \int_1^\infty x(e^{\frac{1}{x^3}}-1)dx$.

Solución: $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$, $e^{\frac{1}{x^3}} = 1+\frac{1}{1!x^3}+\ldots+\frac{1}{n!x^{3n}}+\ldots$

$e^{\frac{1}{x^3}}-1 = \frac{1}{1!x^3}+\ldots+\frac{1}{n!x^{3n}}+\ldots$, $x(e^{\frac{1}{x^3}}-1) = \frac{1}{1!x^2}+\ldots+\frac{1}{n!x^{3n-1}}+\ldots$

$\int\frac{1}{n!x^{3n-1}}dx = \frac{-1}{n!(3n-2)x^{3n-2}}$.

Luego: $A = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n!(3n-2)x^{3n-2}} = 1+\frac{1}{4\cdot 2!}+\frac{1}{7\cdot 3!}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)n!}+\ldots$

M 105- Hallar la fracción continua equivalente a la serie $\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{x+n}$.

Solución: La serie $\sum\frac{1}{U_n}$ se convierte en la fracción continua: $\frac{1}{U_{1-}}, \frac{U_1^2}{U_1+U_2-}, \frac{U_2^2}{U_2+U_3-}, ..., \frac{U_{n-1}^2}{U_{n-1}+U_n-}$ (Álgebra Superior - Hall y Knight - pág 443). $U_1 = x$, $U_2 = -x-1$, $U_3 = x+2$, $U_4 = -x-3, ..., U_{n+1} = (-1)^n(x+n)$. Luego la fracción continua es:
$\frac{1}{x-}\ \frac{x^2}{-1-}\ \frac{(x+1)^2}{1-}\ \frac{(x+2)^2}{-1-}\ \ldots\ \frac{(x+n)^2}{(-1)^{n+1}-}\ldots$

M 106- Calcular $S_p = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^p\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Solución: Para $p=0$, $S_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x$.

$S_0' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \cosh x$,

$xS_0' = S_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x\cosh x$.

$S_1' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 x^{2n}}{(2n+1)!} = \cosh x + x \sinh x.$

$xS_1' = S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x\cosh x + x^2 \sinh x.$

$S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^3 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x\cosh x + 3x^2 \sinh x + x^3 \cosh x = 3x^2 \sinh x + (x + x^3)\cosh x.$

$S_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^4 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x\cosh x + 7x^2 \sinh x + 6x^3 \cosh x + x^4 \sinh x =$
$= (x^4 + 7x^2)\sinh x + (6x^3 + x)\cosh x.$

$S_5 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^5 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = (10x^4 + 15x^2)\sinh x + (x^5 + 25x^3 + x)\cosh x.$

$S_6 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^6 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = (x^6 + 65x^4 + 31x^2)\sinh x + (15x^5 + 90x^3 + x)\cosh x.$

$S_7 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^7 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = (21x^6 + 350x^4 + 63x^2)\sinh x + (x^7 + 140x^5 + 301x^3 + x)\cosh x.$

$S_8 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^8 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = (x^8 + 266x^6 + 1701x^4 + 127x^2)\sinh x +$
$+(28x^7 + 1050x^5 + 966x^3 + x)\cosh x.$

S_p se obtiene de S_{p-1} derivando y multiplicando por x.

M 107- Calcular la suma de la serie $\sum \frac{(n+1)^2 S_n}{a^{n+1}}$, en la que S_n es la suma de las potencias n de las raíces de $x^{10} + x + 1 = 0$.

Solución: $f(x) = x^{10} + x + 1 = 0$, $f'(x) = 10x^9 + 1$, $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{S_n}{x^{n+1}}$.

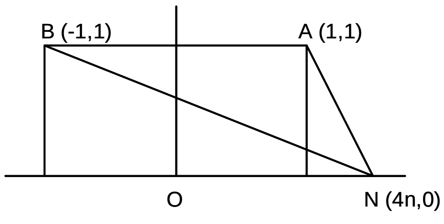
$\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sum \frac{(n+1)S_n}{x^{n+2}}$, $\quad x\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sum \frac{(n+1)S_n}{x^{n+1}}$. $\quad \frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{f(x)}) = \sum \frac{(n+1)^2 S_n}{x^{n+2}}$,

$x\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{f(x)}) = \sum \frac{(n+1)^2 S_n}{x^{n+1}} = x\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}\frac{10x^9+1}{x^{10}+x+1}) =$
$= \frac{10x^{29} - 870x^{20} - 1180x^{19} + 579x^{11} + 1330x^{10} + 810x^9 + x^2 - x}{(x^{10}+x+1)^3}.$

La suma pedida se obtiene sustituyendo x por a:

$$\sum \frac{(n+1)^2 S_n}{a^{n+1}} = \frac{10a^{29} - 870a^{20} - 1180a^{19} + 579a^{11} + 1330a^{10} + 810a^9 + a^2 - a}{(a^{10}+a+1)^3}.$$

M 108- Se fijan los puntos $A(1,1)$, $B(-1,1)$ y $N(4n,0)$, siendo n un número entero. Calcular la suma: $\theta = \sum \widehat{ANB}$, cuando n varía de $-\infty$ a $+\infty$.



Solución: Siendo O el origen de coordenadas, el ángulo $\widehat{ANB}$ es la diferencia entre los ángulos $\widehat{ANO}$ y $\widehat{BNO}$, es decir: $\widehat{ANB} = \widehat{ANO} - \widehat{BNO}$. Siendo: $\tan\widehat{ANO} = \frac{1}{4n-1}$, $\tan\widehat{BNO} = \frac{1}{4n+1}$, se tiene, para $n > 0$: $\tan\widehat{ANB} = \frac{\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1}}{1 + \frac{1}{4n-1}\frac{1}{4n+1}} = \frac{1}{8n^2}$. Para $n < 0$, los ángulos son simétricos de los anteriores respecto a la mediatriz de AB. Para $n = 0$, $\widehat{ANB} = \frac{\pi}{2}$. Luego:

$\theta = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \arctan\frac{1}{8n^2} = 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\arctan\frac{1}{8n^2} + \frac{\pi}{2}$. Ahora bien: $\sum_1^\infty \arctan\frac{1}{8n^2} = \frac{1}{2i}\sum_1^\infty \ln\frac{1+\frac{i}{8n^2}}{1-\frac{i}{8n^2}} =$
$= \frac{1}{2i}\ln\prod_1^\infty \frac{1+\frac{i}{8n^2}}{1-\frac{i}{8n^2}} = \frac{1}{2i}\ln\frac{\prod_1^\infty(1+\frac{i}{8n^2})}{\prod_1^\infty(1-\frac{i}{8n^2})}$. Como: $\frac{\sin x}{x} = \prod_1^\infty(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$, y como: $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$,
$\sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}i}$, haciendo: $x = \frac{\pi e^{\frac{\pi}{4}i}}{2\sqrt{2}}$, se tiene que: $\frac{\sin x}{x} = \prod_1^\infty(1-\frac{i}{8n^2})$. Por otra parte:
$\frac{\sinh x}{x} = \prod_1^\infty(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}) = \prod_1^\infty(1+\frac{i}{8n^2})$. Por tanto: $\sum_1^\infty\arctan\frac{1}{8n^2} = \frac{1}{2i}\ln\frac{\prod_1^\infty(1+\frac{i}{8n^2})}{\prod_1^\infty(1-\frac{i}{8n^2})} =$
$= \frac{1}{2i}\ln\frac{\sinh x}{\sin x} = \frac{1}{2i}\ln\frac{\sinh(\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4})}$. Para calcular el numerador del logaritmo, se tiene:
$\sinh(\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4}) = \sinh\frac{\pi}{4}\cosh i\frac{\pi}{4} + \cosh\frac{\pi}{4}\sinh i\frac{\pi}{4} = \sinh\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + i\cosh\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sinh\frac{\pi}{4} + i\cosh\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2i}\cosh\frac{\pi}{4}\left(1 - i\tanh\frac{\pi}{4}\right)$. Análogamente, para calcular el denominador: $\sin(\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4}\cosh\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\sinh\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cosh\frac{\pi}{4} + i\sinh\frac{\pi}{4}\right) =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cosh\frac{\pi}{4}\left(1 + i\tanh\frac{\pi}{4}\right)$. Por lo que: $\frac{1}{2i}\ln\frac{\sinh(\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2i}\ln\frac{-1}{i}\frac{1-i\tanh\frac{\pi}{4}}{1+i\tanh\frac{\pi}{4}} =$
$= \frac{1}{2i}\ln\frac{-1}{i} + \frac{1}{2i}\ln\frac{1-i\tanh\frac{\pi}{4}}{1+i\tanh\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2i}\ln\frac{-1}{i} - \frac{1}{2i}\ln\frac{1+i\tanh\frac{\pi}{4}}{1-i\tanh\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \arctan(\tanh\frac{\pi}{4})$. De donde: $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\sum_1^\infty\arctan\frac{1}{8n^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\tanh\frac{\pi}{4}) = \pi - 2\arctan(\tanh\frac{\pi}{4})$, cuyo valor aproximado es: 1,98 radianes.

M 109- Calcular $C = \sum x^2(n-x)^3\binom{n}{x}\cos x\alpha$.

Solución: Siendo: $S = \sum x^2(n-x)^3\binom{n}{x}\sin x\alpha$, $C + iS = \sum x^2(n-x)^3\binom{n}{x}e^{\alpha x i}$. Considerando la función: $f(\alpha,\beta) = \sum\binom{n}{x}(e^{\alpha i})^x(e^{\beta i})^{n-x}$, derivándola dos veces respecto a α y tres respecto a β, se tiene: $\frac{\delta^5 f(\alpha,\beta)}{\delta_{\alpha^2}\delta_{\beta^3}} = \sum\binom{n}{x}(xi)^2[(n-x)i]^3(e^{\alpha i})^x(e^{\beta i})^{n-x} = i\sum_{x=0}^n\binom{n}{x}x^2(n-x)^3e^{x\alpha i}e^{(n-x)\beta i}$. Para $\beta = 0$, $\frac{\delta^5 f(\alpha,\beta)}{\delta_{\alpha^2}\delta_{\beta^3}} = i\sum_{x=0}^n\binom{n}{x}x^2(n-x)^3e^{x\alpha i} = i(C+iS) = -S+iC$. Teniendo en cuenta que, para $\beta = 0$, dicha quinta derivada tiene el valor: $\frac{\delta^5}{\delta_{\alpha^2}\delta_{\beta^3}}(e^{\alpha i}+e^{\beta i})^n = i\binom{n}{5}5!(e^{\alpha i}+1)^{n-5} =$
$= i\binom{n}{5}5!(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{n-5} = i\binom{n}{5}5!(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2})^{n-5} =$
$= \left[\binom{n}{5}5!2^{n-5}\cos^{n-5}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n-5}{2}\alpha\right]i + \binom{n}{5}5!2^{n-5}\cos^{n-5}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n-5}{2}\alpha = -S+iC$, resulta que:
$C = \binom{n}{5}5!2^{n-5}\cos^{n-5}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n-5}{2}\alpha = \frac{n!}{(n-5)!}2^{n-5}\cos^{n-5}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n-5}{2}\alpha$.

M 110- Calcular $S = \sum(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$, para $-\pi < x < \pi$. Deducir $A = \sum(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}$ y $B = \sum(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n^3}$. Demostrar que $\sum_1^\infty\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ y $\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Solución: Siendo: $C = \sum(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}$. se tiene que: $C + iS = \sum(-1)^{n-1}\frac{e^{nxi}}{n} =$
$= \sum(-1)^{n-1}\frac{(e^{xi})^n}{n} = \ln(1+e^{xi}) = \ln e^{\frac{xi}{2}}(e^{\frac{-xi}{2}}+e^{\frac{xi}{2}}) =$
$= \frac{xi}{2} + \ln\left(\cos\frac{x}{2} - i\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right) = \frac{xi}{2} + \ln(2\cos\frac{x}{2})$. Luego: $S = \frac{x}{2}$. Por tanto: $S_{-\pi}^{+\pi} = \left|\frac{x}{2}\right|_{-\pi}^{+\pi} = \pi$. Integrando S, se tiene: $\int\left[\sum(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\right]dx = \sum(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} = -A =$

$= \dfrac{x^2}{4} + k_1$. Integrando entre $-\pi < x < \pi$, se tiene: $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\Big[\sum(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}\Big]dx =$ $= \Big|\sum(-1)^{n+1} \dfrac{\sin nx}{n^3}\Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0 = \Big|\dfrac{x^3}{12} + k_1 x\Big|_{-\pi}^{+\pi} = \dfrac{\pi^3}{6} + 2k_1\pi$; luego: $k_1 = -\dfrac{\pi^2}{12}$. Por tanto: $A = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{x^2}{4}$. Integrando A, se tiene: $\displaystyle\int\Big[\sum(-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2}\Big]dx = \sum(-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n^3} =$ $= B = \dfrac{\pi^2}{12}x - \dfrac{x^3}{12} + k_2$. Para $x = \pi$, se tiene: $B = 0$, luego: $k_2 = 0$. Por tanto: $B = \dfrac{\pi^2 x - x^3}{12}$. Integrando B, se tiene: $\displaystyle\int\Big[\sum(-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n^3}\Big]dx = \sum(-1)^n \frac{\cos nx}{n^4} = \frac{\pi^2 x^2}{24} - \frac{x^4}{48} + k_3$. Integrando en el intervalo $-\pi < x < \pi$, se tiene: $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\Big[\sum(-1)^n \frac{\cos nx}{n^4}\Big]dx = \Big|\sum(-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^5}\Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0 =$ $= \Big|\dfrac{\pi^2 x^3}{72} - \dfrac{x^5}{240} + k_3 x\Big|_{-\pi}^{+\pi} = \dfrac{\pi^5}{36} - \dfrac{\pi^5}{120} + 2k_3\pi$. Luego: $k_3 = -\dfrac{7\pi^4}{720}$. Introduciendo este valor: $\displaystyle\sum(-1)^n \frac{\cos nx}{n^4} = \frac{\pi^2 x^2}{24} - \frac{x^4}{48} - \frac{7\pi^4}{720}$. Para $x = \pi$, se tiene: $\displaystyle\sum(-1)^n \frac{\cos n\pi}{n^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \ldots =$ $\displaystyle= \sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{24} - \frac{\pi^4}{48} - \frac{7\pi^4}{720} = \frac{\pi^4}{90}$. Por último: $\displaystyle\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots =$ $\displaystyle= \sum \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3} = B(x = \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2 \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2})^3}{12} = \frac{\pi^3}{32}$.

Sección N - *VECTORES*

N 1- Dados los vectores $\overline{a}(3,-2,5), \overline{b}(-1,5,2), \overline{c}(3,-1,-1)$, hallar: 1º) la suma: $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$; 2º) el producto: $3\overline{a}(2\bar{b}-4\bar{c})$; 3º) los vectores $\bar{m}$ y $\bar{n}$ que tengan las direcciones de $\bar{b}$ y $\bar{c}$, y cuya suma sea $\overline{a}$.

Solución: 1º) $\overline{a}+\bar{b}+\bar{c}=(5,2,6)$. 2º) $3\overline{a}(2\bar{b}-4\bar{c})=(9,-6,15)(-14,14,8)=-126-84+120=$ $=-90$. 3º) no existen los vectores $\bar{m}$ y $\bar{n}$, pues los vectores $\overline{a},\bar{b},\bar{c}$ no definen un plano; en efecto: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-89\neq 0$.

N 2- Dados los vectores $\overline{a}(3,-2,5)$, $\bar{b}(-1,5,2)$, $\bar{c}(3,-1,-1)$, hallar 1º) $\overline{a}(\bar{b}\wedge\bar{c})$; 2º) $\overline{a}\wedge(\bar{b}\wedge\bar{c})$, $\bar{b}\wedge(\bar{c}\wedge\overline{a})$, $\bar{c}(\overline{a}\wedge\bar{b})$; 3º) un vector $\bar{d}$ tal que $(\overline{a}\wedge\bar{b})\wedge(\bar{c}\wedge\bar{d})=0$.

Solución: 1º) $\overline{a}(\bar{b}\wedge\bar{c})=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-63$. 2º) $a\wedge(\bar{b}\wedge\bar{c})=\begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ \overline{a}\cdot\bar{b} & \overline{a}\cdot\bar{c} \end{vmatrix}=$ $=\begin{vmatrix} -1,5,2 & 3,-1,1 \\ -3 & 16 \end{vmatrix}=(-7,77,35)$, $\bar{b}\wedge(\bar{c}\wedge\overline{a})=(9,-9,27)$, $\bar{c}(\overline{a}\wedge\bar{b})=(-2,-68,-62)$. 3º) Sea: $\bar{d}(\alpha,\beta,\gamma)$. Se tiene: $-63(\alpha,\beta,\gamma)=(-29\alpha-11\beta+13\gamma)(3,-1,1)$. Luego: $\alpha=3$, $\beta=-1$, $\gamma=1$. Por tanto: $\bar{d}(3k,-k,k)$.

N 3- Dados los vectores $\overline{a}(3,-1,2)$, $\bar{b}(-2,2,1)$, $\bar{c}(1,5,-4)$, hallar: 1º) $\overline{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})$; 2º) $(\overline{a}-\bar{b})\wedge\bar{c}$; 3º) $\overline{a}\wedge(\bar{b}\wedge\bar{c})$; 4º) $\bar{b}\cdot(\bar{c}\wedge\overline{a})$.

Solución: 1º) $\overline{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=-16$. 2º) $(\overline{a}-\bar{b})\wedge\bar{c}=(7,21,28)$. 3º) $\overline{a}\wedge(\bar{b}\wedge\bar{c})=(26,10,-34)$. 4º) $\bar{b}\cdot(\bar{c}\wedge\overline{a})=-56$.

N 4- Dados los vectores $\overline{a}(-1,1,3)$, $\bar{b}(3,-2,1)$, $\bar{c}(4,-3,2)$, hallar: 1º) $\cos\overline{a}\triangle(\bar{b}\wedge\bar{c})$; 2º) $\sin(\overline{a}\wedge\bar{b})\triangle\bar{c}$; 3º) $\tan\bar{b}\triangle(\overline{a}\wedge\bar{c})$.

Solución: 1º) $$\cos\overline{a}\triangle(\bar{b}\wedge\bar{c})=\frac{\overline{a}\cdot(\bar{b}\wedge\bar{c})}{a\cdot(b\wedge c)}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{1+1+9}\,\sqrt{1+4+1}}=\frac{-4}{\sqrt{66}}.$$

2º) $$\sin(\overline{a}\wedge\bar{b})\triangle\bar{c}=\frac{(\overline{a}\wedge\bar{b})\wedge\bar{c}}{(a\wedge b)\cdot c}=\frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ 7 & 10 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\sqrt{16+9+4}}=\sqrt{\frac{2167}{2175}}.$$

3º) $\tan \bar{b} \measuredangle (\overline{a} \wedge \bar{c}) = \dfrac{\bar{b} \wedge (\overline{a} \wedge \bar{c})}{\bar{b}(\overline{a} \wedge \bar{c})} = \dfrac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 11 & 14 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\sqrt{1109}}{2}$.

Nota: El símbolo $\measuredangle$ indica el ángulo entre los vectores situados a su izquierda y a su derecha.

N 5 Dada la recta $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ y el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, hallar la fórmula vectorial que da la distancia de P_0 a la recta dada, en función de los dos vectores $\bar{V}(a,b,c)$ y $\overline{P_0P_1}$, siendo $P_1(x_1, y_1, z_1)$.

Solución: La distancia es: $|\overline{P_0P_1}| \sin \overline{P_0P_1} \measuredangle \bar{V} = \dfrac{\overline{P_0P_1} \wedge \bar{V}}{|V|}$.

N 6- Dada el plano $A(x - x_1) = B(y - y_1) = C(z - z_1)$ y el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, hallar la fórmula vectorial que da la distancia de P_0 al plano dado, en función de los dos vectores $\bar{p}(A,B,C)$ y $\overline{P_0P_1}$, siendo $P_1(x_1, y_1, z_1)$.

Solución: La distancia es: $\overline{P_0P_1} \cos \bar{p} \measuredangle \overline{P_0P_1} = \dfrac{\bar{p} \bullet \overline{P_0P_1}}{|\bar{p}|}$.

N 7- Hallar la distancia mínima entre las dos rectas:
$\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$, $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$,
en función de los vectores $\overline{P_2P_1}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$, $\bar{V}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\bar{V}_2(a_2, b_2, c_2)$.

Solución: Sea d la distancia mínima pedida. El volumen del tetraedro formado por dichas rectas y una recta r que se apoya en ellas, es: $\dfrac{\bar{r}\bar{V}_1\bar{V}_2}{6} = \dfrac{d}{6}|\bar{V}_1 \wedge \bar{V}_2|$. Luego: $d = \dfrac{(\overline{P_2P_1}\ \bar{V}_1\ \bar{V}_2)}{|\bar{V}_1 \wedge \bar{V}_2|}$.

N 8- Dado el sistema $\bar{V}_1(2,-1,0)$, $P_1(1,2,-3)$, $\bar{V}_2(3,2,-1)$, $P_2(2,-1,2)$, $\bar{V}_3(4,0,-2)$, $P_3(1,-1,0)$, $\bar{V}_4(-2,-1,1)$, $P_4(0,1,2)$; 1º) hallar su eje central; 2º) hallar el lugar de las rectas que pasando por el origen $(0,0,0)$ tengan un momento áxico $= 3$.

Solución: 1º) Resultante del sistema: $R = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 + \bar{V}_4 = (7,0,-2)$.
Se tiene: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, luego los momentos coordenados son:

$$L_0 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$M_0 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$N_0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

El momento central del sistema es: $(-1,0,8)$. Luego el producto escalar de la resultante R por el momento central G_0 es: $(7,0,-2)(-1,0,8) = -23 \neq 0$. La ecuación del eje central es la siguiente: $\dfrac{-1 - \begin{vmatrix} y & z \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{7} = \dfrac{0 - \begin{vmatrix} z & x \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{0} = \dfrac{8 - \begin{vmatrix} x & y \\ 7 & 0 \end{vmatrix}}{-2}$. Es decir: $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y + \frac{54}{53}}{0} = \dfrac{z}{-2}$.

2º) $3 = \sum \begin{vmatrix} \alpha\bar{\varepsilon} & \beta\bar{\varepsilon} & \gamma\bar{\varepsilon} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} = \alpha(-1) + \beta \bullet 0 + \gamma \bullet 8.$ Luego: $-\alpha + 8\gamma = 3,\quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$ $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{z}{\gamma} = \lambda.$ Resolviendo el sistema se tiene que la ecuación del lugar pedido es: $8x^2 + 9y^2 - 55z^2 + 16xz = 0.$

N 9- Dado el sistema $\bar{V}_1(3,-2,1),\ P_1(1,1,0),\ \bar{V}_2(-2,1,-2),\ P_2(2,-1,-1),\ \bar{V}_3(-1,3,2),\ P_3(1,1,-2),$ $\bar{V}_4(1,-2,-3),\ P_4(3,-1,1);$ 1º) hallar su momento central G_0; 2º) hallar su eje central; 3º) hallar el momento central G_A respecto a $A(1,2,-2)$; 4º) hallar el momento central mínimo $|\overline{G_{\min}}|$; 5º) hallar el momento áxico de $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

Solución: 1º) $L_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 17.$ De forma análoga: $M_0 = 15$ y $N_0 = -6.$ Luego el momento central es: $\bar{G}_0 = (17,15,-6)$ y $|\bar{G}_0| = 5\sqrt{11}$. 2º) $R = \sum V = (1,0,-2).$ Luego: $\dfrac{17 - \begin{vmatrix} y & z \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{1} = \dfrac{15 - \begin{vmatrix} z & x \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{0} = \dfrac{-6 - \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2}.$ Por tanto, la ecuación del eje central es: $2x = \dfrac{y + \frac{40}{3}}{0} = 15 - z.$ 3º) El momento central respecto a A es: $\bar{G}_A = \bar{G}_0 + \overline{AO} \wedge \bar{R} = (17,15,-6) + \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (21,15,-4).$ Luego: $|\bar{G}_A| = \sqrt{682}$. 4º) El momento central mínimo es: $|\overline{G_{\min}}| = \dfrac{\bar{R} \bullet \bar{G}_0}{|R|} = \dfrac{29}{\sqrt{5}} = \dfrac{29\sqrt{5}}{5}.$ 5º) Siendo α,β,γ los cosenos directores de la recta, es decir: $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+4+9}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}},\ \beta = \dfrac{2}{\sqrt{14}},\ \gamma = \dfrac{3}{\sqrt{14}},$ el momento áxico es: $17\alpha + 15\beta - 6\gamma = \dfrac{29}{\sqrt{14}} = \dfrac{29\sqrt{14}}{14}.$

N 10- Dado el sistema $\bar{V}_1(2,5,-3),\ P_1(1,1,0),\ \bar{V}_2(4,10,-6),\ P_2(1,-1,2),\ \bar{V}_3(-6,-15,9),\ P_3(1,0,3),$ $\bar{V}_4(-1,-\frac{5}{2},\frac{3}{2}),\ P_4(2,2,2);$ 1º) hallar su centro; 2º) hallar el eje central; 3º) hallar el momento central $\bar{G}_A$ respecto a $A(1,1,1)$.

Solución: 1º) Las coordenadas del centro vienen dadas por: $\dfrac{\sum V_i x_i}{\sum x_i}.$ Luego: $x_C = \dfrac{2 \bullet 1 + 4 \bullet 1 - 6 \bullet 1 - 1 \bullet 2}{2 + 4 - 6 - 1} = 2,\quad y_C = 4,\quad z_C = 12.$ Las coordenadas del centro son: $(2,4,12).$ 2º) $\bar{R} = (-1,-\frac{5}{2},\frac{3}{2}).$ La ecuación del eje central es: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-4}{-\frac{5}{2}} = \dfrac{z-12}{\frac{3}{2}}.$ 3º) El momento central respecto a A es: $\bar{G}_A = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ 2-1 & 4-1 & 12-1 \\ -1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = (32,-\frac{25}{2},\frac{1}{2}).$

N 11- Dado el siguiente sistema vectorial plano: $\bar{V}_1(3,-2,0),\ P_1(1,-5,0),\ \bar{V}_2(-3,1,0),\ P_2(1,-1,0),$ $\bar{V}_3(-5,4,0),\ P_3(3,3,0),\ \bar{V}_4(-1,2,0),\ P_4(2,-3,0),\ \bar{V}_5(4,-2,0),\ P_5(1,3,0);$ 1º) hallar su centro; 2º) hallar el eje central; 3º) hallar el momento central $\bar{G}_A$ respecto a $A(5,-3,1)$; 4º) lugar del punto B tal que $|\bar{G}_B| = 5$.

Solución: 1º) Las coordenadas del centro vienen dadas por: $\dfrac{\sum V_j x_i}{\sum V_j}.$ Luego se tiene:

$x_C = \dfrac{-2+1+12+4-2}{-2+1+4+2-2} = \dfrac{13}{3}$, $y_C = 6$, $z_C = 0$. El centro es: $(\frac{13}{3}, 6, 0)$. 2º) $\bar{R} = (-2,3,0)$. La ecuación del eje central es: $\dfrac{x-\frac{13}{3}}{-2} = \dfrac{y-6}{3} = \dfrac{z-0}{0}$. 3º) El momento central respecto a A es: $\bar{G}_A = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \frac{13}{3}-5 & 6+3 & 0-1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (3,2,16)$. 4º) Viniendo dado el momento central respecto a $B(x,y,z)$ por: $|\bar{G}_B| = \sqrt{\begin{vmatrix} 6-y & -z \\ 3 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -z & \frac{13}{3}-x \\ 0 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{13}{3}-x & 6-y \\ -2 & 3 \end{vmatrix}^2} = 5$, operando, se tiene la ecuación del lugar pedido: $9x^2+4y^2+13z^2+12xy-150x-100y+600 = 0$.

N 12- Sea un sistema tal que $\bar{R} \cdot \bar{G}_0 \neq 0$. Hallar la suma de los volúmenes de los tetraedros que tienen por aristas opuestas dos vectores tomados de todas las maneras posibles.

Solución: Sea el sistema: $\bar{V}_1, P_1$, $\bar{V}_2, P_2, \ldots$, $\bar{V}_n, P_n$. El volumen de uno de los tetraedros es: $Vol_{1,2} = \frac{1}{6}(\overline{P_2P_1}, \bar{V}_1, \bar{V}_2) = \frac{1}{6}(\overline{P_2}\bar{V}_1\bar{V}_2 - \overline{P_1}\bar{V}_1\bar{V}_2) = -\frac{1}{6}(\bar{V}_2\bar{V}_1\bar{P}_2 + \bar{V}_1\bar{V}_2\bar{P}_1)$. La suma de los volúmenes de los tetraedros que tienen una arista en común, es: $\sum Vol_{1i} =$ $= \frac{1}{6}[\bar{V}_1\bar{P}_2(\sum V_i) + \bar{V}_2\sum V_iP_i] = \frac{1}{6}[\bar{V}_1\bar{G}_0 + \bar{R}\bar{G}_i] = \frac{1}{6}[\bar{V}_j\bar{G}_0 + \bar{R}\bar{G}_j]$. Luego la suma pedida es: $\sum Vol = \dfrac{\bar{R} \cdot \bar{G}_0}{6}$.

N 13- El eje ZZ' es el eje central de un sistema de vectores cuyo $|\bar{R}| = 10$. La recta $x+y = 4$, $y+z = 4$, es la base de uno de los momentos centrales del sistema. Hallar 1º) el momento central; 2º) su punto de aplicación; 3º) el momento mínimo; 4º) el momento central $\bar{G}_A$, siendo $A(4,0,4)$.

Solución: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, luego: $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$. $\dfrac{\bar{R}\bar{G}_0}{|\bar{R}|} = |\bar{G}_0|$. $\bar{R}$ y $\bar{G}_0$ son paralelos. El origen pertenece al eje central, y como el momento en el eje es mínimo, $\bar{G}_0$ es el mínimo. $\bar{G}_0 = (0,0,c)$, $\bar{R} = (0,0,10)$. 1º) El momento central es: $\bar{G}_C = (20,-20,20)$. 2º) Las coordenadas del punto de aplicación de dicho momento es: $P_C = (2,2,2)$. 3º) El momento mínimo es: $\bar{G}_{mín} = \bar{G}_0 = (0,0,20)$. 4º) El momento central respecto a A es: $\bar{G}_A = (0,-40,20)$.

Ñ 1- Expresar $1C.V.$ en el sistema $C.G.S.$(centímetro, gramo-masa, segundo) y en el sistema G, o de Giorgi, (metro, kilogramo-masa, segundo).

Solución: Se tiene: $1C.V. = 75\,\text{kg m/s} = 75 \cdot 1\,\text{kgfuerza}\cdot 1\,\text{m/s} = 75 \cdot 980\text{dinas}\cdot 1000\,\text{cm/s} = 735 \cdot 10^7\,\text{erg/s}$ (sistema C.G.S.); $1C.V. = 735 \cdot 10^7 \div 10^7\,\text{W} = 735\,\text{W}$ (sistema G).

Ñ 2- Las agujas de un reloj tienen las longitudes: a el horario, b el minutero, c el segundero. Calcular las velocidades angulares y lineales de sus extremos. Nota: $a,\ b,\ c$ en m.

Solución: 1º) Horario: $\omega = \dfrac{360^0}{12} = 30^0/\text{h} = 30''/\text{s} = 0,0001454\,\text{rad/s}$, $v = 0,0001454a\,\text{m/s}$. 2º) Minutero: $\omega = 360^0/\text{h} = 6'/\text{min} = 0,1''/\text{s} = 0,001745\text{rad/s}$, $v = 0,001745b\,\text{m/s}$. 3º) Segundero: $\omega = 360^0/60\,\text{s} = 6^0/\text{s} = 0,1047\,\text{rad/s}$, $v = 0,1047c\,\text{m/s}$.

Ñ 3- Un hombre empuja un carruaje que pesa 2,5 toneladas, con una fuerza de 20 kg; la resistencia del camino equivale a una fuerza constante de 5 kg. ¿Cuánto tardará en alcanzar una velocidad de 16 km/h?

Solución: Es de aplicación la fórmula "fuerza por tiempo = masa por velocidad". Se tiene: $(20-5)\,\text{kg} \cdot \text{tiempo} = \dfrac{2500}{9,8}FL^{-1}T^2 \cdot \dfrac{40}{9}LT^{-1}$. Luego el tiempo viene dado por: $\dfrac{2500}{9,8} \cdot \dfrac{40}{9} \cdot \dfrac{1}{15} = 75,6\,\text{s}$.

Ñ 4- El minutero de un reloj tiene $1,2\,\text{m}$ de longitud y el horario $0,9\,\text{m}$. Hallar en cm por minuto las velocidades de los extremos del minutero y del horario, a las 3 horas y a las 12 horas.

Solución: Las velocidades del minutero y del horario son constantes en su cantidad, no así en su dirección. La velocidad del minutero es: $\dfrac{2\pi}{60}120 = 12,566\,\text{cm/s}$. La velocidad del horario es: $\dfrac{2\pi}{720}90 = 0,7854\,\text{cm/s}$. A las 3 horas, las dos velocidades son perpendiculares. A las 12 horas, son paralelas.

Ñ 5- Se deja caer una piedra desde lo alto de una torre de 30 m de altura, y en el mismo instante se lanza otra piedra desde la base de la torre verticalmente hacia arriba. Si se encuentran a la mitad de la altura de la torre, calcular la velocidad de lanzamiento de la segunda piedra.

Solución: Tiempo que tarda la primera piedra en caer 15 min: $15 = \dfrac{9,8}{2}t^2,\ t = \sqrt{\dfrac{30}{9,8}}$. Tiempo que tarda la segunda piedra en subir 15 m: $15 = V_0t - \dfrac{1}{2}at^2,\ 15 = V_0t - 15,\ t = \dfrac{30}{V_0}$. Los dos tiempos son iguales: $\sqrt{\dfrac{30}{9,8}} = \dfrac{30}{V_0},\ V_0 = 17,1464\,\text{m/s}$.

Ñ 6- Una locomotora ejerce una fuerza constante de 4.000 kg sobre un tren que pesa 200 t, subiendo una rampa del 8 por 1.000. La resistencia de los carriles es constante e igual a $4,5\,\text{kg}$ por t. Hallar el tiempo que tarda en alcanzar la velocidad de 40 km/h a partir del reposo y la distancia recorrida en ese tiempo.

Solución: El peso del tren (fuerza vertical de 200.000 kg) se descompone en dos fuerzas: una, perpendicular al suelo de la rampa ($200.000\cos\theta\,\text{kg}$, siendo θ el ángulo que forma la rampa con la horizontal) que es absorbida por ésta, y la otra, paralela al suelo de la rampa ($200.000\sin\theta\,\text{kg}$). La resistencia de los carriles equivale a: $4,5 \cdot 200\cos\theta\,\text{kg} = 900\cos\theta\,\text{kg}$. Por tanto, la fuerza de tracción es: $4.000\,\text{kg} - 200.000\sin\theta\,\text{kg} - 900\cos\theta\,\text{kg}$. Como $\tan\theta = 0,008$, la fuerza de tracción es: $4.000 - 1600 - 900 = 1.500\,\text{kg}$. Por tanto, la aceleración es: $\dfrac{1.500}{\dfrac{200.000}{9,8}} = 0,0735\,\text{m/s}^2$. El tiempo que tarda en alcanzar la velocidad de $40\,\text{km/h}$ es: $\dfrac{40.000}{60 \cdot 60 \cdot 0,0735} = 151,2\,\text{s}$. La distancia recorrida en este tiempo es: $\frac{1}{2}0,0735 \cdot 151^2 = 840\,\text{m}$.

Ñ 7- Una masa de 250 kg de peso, cayendo libremente, introduce un pilote de 270 kg de peso, 5 cm en tierra, siendo la resistencia media de ésta de 25 t. Hallar la altura desde la que debe caer la masa para que se cumpla lo descrito.

Solución: Se plantean las ecuaciones: $\frac{250}{9,8}\sqrt{2gh} = \frac{250+270}{9,8}V$; $25000 \cdot 0,05 = \frac{270+250}{9,8 \cdot 2}V^2$. Resolviéndolas, se tiene: $V = 6,864\,\text{m/s}$, $h = \frac{\left(\frac{250+270}{250} \cdot 6,864\right)^2}{2 \cdot 9,8} = 10,4\,\text{m}$.

Ñ 8- La velocidad de retroceso de un cañón que pesa 40 t, queda anulada en 84 cm, por la acción de una fuerza media de 70 t. Siendo 700 kg el peso del proyectil, hallar su velocidad inicial.

Solución: Siendo V_r la velocidad de retroceso, se tiene: $70.000 \cdot 0,84 = \frac{40.000}{2 \cdot 9,8} \cdot V_r^2$. De donde: $V_r = 5,3677\,\text{m/s}$. Siendo V_0 la velocidad inicial del proyectil, se tiene: $\frac{40.000}{9,8}V_r = \frac{700}{9,8}V_0$. Luego: $V_0 = 306,7\,\text{m/s}$.

Ñ 9- Dos pesos, uno de 12kg y el otro de 11 kg, están unidos por una cuerda que pasa por la garganta de una polea, que se supone sin rozamientos. Estando en reposo, se sueltan y al cabo de 2 s se quitan 2 kg del peso mayor. Hallar el tiempo que tardan en detenerse y el recorrido realizado.

Solución: Siendo a_1 la aceleración durante los dos primeros segundos, se tiene: $(12.000 + 11.000) \cdot a_1 = (12.000 - 11.000) \cdot 9,8$, $a_1 = 0,4261\,\text{m/s}^2$. Siendo a_2 la aceleración a partir de los dos primeros segundos, se tiene: $(10.000 + 11.000) \cdot a_2 = (10.000 - 11.000) \cdot 9,8$, $a_2 = -0,4667\,\text{m/s}^2$. Por tanto, la velocidad alcanzada a los dos segundos, es: $V = 0,4261 \cdot 2 = 0,8522\,\text{m/s}$. Siendo t el tiempo que tardan en detenerse a partir de los dos segundos, se tiene: $0,8522 - 0,4667 \cdot t = 0$. De donde: $t = 1,826\,\text{s}$, es decir: $3,826\,\text{s}$ desde que se sueltan. Siendo e_1 el recorrido en los dos primeros segundos, se tiene: $e_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,4261 \cdot 2^2 = 0,8522\,\text{m}$. Siendo e_2 el recorrido a partir de los dos segundos, se tiene: $e_2 = 0,8522 \cdot 1,826 - \frac{1}{2} \cdot 0,4667 \cdot 1,826^2 = 0,7781\,\text{m}$. El recorrido total es: $e_1 + e_2 = 1,63\,\text{m}$.

Ñ 10- Un ascensor tiene una aceleración ascendente de $0,981\,\text{m/s}^2$. Hallar 1º) la fuerza que ejerce sobre el piso del ascensor un hombre que pesa 70 kg; 2º) la fuerza que ejerce la misma persona siendo descendente la aceleración de $0,981\,\text{m/s}^2$; 3º) la aceleración ascendente del ascensor para que la fuerza ejercida por la persona sea 85kg.

Solución: 1º) $70 + \frac{70}{9,8} \cdot 0,981 = 77\,\text{kg}$. 2º) $70 - \frac{70}{9,8} \cdot 0,981 = 63\,\text{kg}$. 3º) $85 - 70 = \frac{70}{9,8} \cdot a$. Luego: $a = 2,1\,\text{m/s}^2$.

Ñ 11- Un tren de 400 t marcha cuesta abajo por una pendiente del 2% a 90km/h. Se aplican los frenos de manera que la fuerza de frenado sea proporcional al tiempo, logrando parar el tren en 6 min. Hallar la fuerza de frenado.

Solución: Sea f la fuerza de frenado, $f = k \cdot t$. Siendo a la deceleración, se plantea la ecuación: $k \cdot t = \frac{400.000}{9,8} \cdot a$. De donde: $a = \frac{9,8 \cdot k \cdot t}{400.000}$. Por tanto: $\frac{90.000}{3.600} - \int_0^{60} \frac{9,8 \cdot k \cdot t}{400.000} \cdot dt = \frac{90.000}{3.600} - \left| \frac{9,8 \cdot k \cdot t^2}{400.000 \cdot 2} \right|_0^{360} = 0$. Luego: $k = 15,747$. Por tanto: $f = 15,747 \cdot t\,\text{kg m}$, estando dado t en segundos. La fuerza máxima de frenado se produce a los 360 segundos, por lo que: $f = 5.668,93\,\text{kg m}$.

Ñ 12- Un tren de 300 t se pone en movimiento, alcanzando una velocidad de 80 km/h tras recorrer 2.000 m en horizontal, con movimiento uniformemente acelerado. En ese momento aplica los frenos, deteniéndose en 15 segundos (siempre en horizontal). Hallar 1º) el esfuerzo de tracción de la locomotora y duración del periodo de arranque; 2º) el esfuerzo de frenado y la longitud recorrida durante el frenado.

Solución: 1º) Siendo t el tiempo de aceleración, se tiene: $2.000 = \frac{1}{2} \cdot \frac{80.000}{3.600} \cdot t$. De donde: $t = 180\,\text{s}$. Siendo f_t la fuerza de tracción, se tiene: $f_t \cdot 180 = \frac{300000}{9,8} \cdot \frac{80.000}{3.600}$. Luego: $f_t = 3.779,3\,\text{kg m}$. 2º) Siendo f_f la fuerza de frenado, se tiene: $f_f \cdot 15 = \frac{300000}{9,8} \cdot \frac{80.000}{3.600}$, de donde se obtiene: $f_f = 45.351,5\,\text{kg m}$. Siendo e la longitud recorrida durante el frenado, se tiene que: $e = \frac{1}{2} \cdot \frac{80.000}{3.600} \cdot 15 = 166,67\,\text{m}$.

Ñ 13- Un tren de Pkg de peso, está parado en el punto A de una rampa AB, recta y con una inclinación θ con relación a la horizontal. Se le sueltan los frenos, y el tren rueda por la pendiente AB, y luego por el trayecto horizontal BC, parándose en C, sin que se hayan aplicado los frenos. Conociendo la longitud AB y la fuerza de rozamiento, hallar la longitud BC.

Solución: El peso P del tren, se descompone en una fuerza perpendicular a la rampa, $(P\cos\theta)$, y otra, paralela a la rampa $(P\sin\theta)$. Siendo s la longitud AB y ρ el coeficiente de rozamiento, el trabajo realizado en el trayecto AB es: $(P\sin\theta - \rho P\cos\theta)s$. El trabajo realizado en el trayecto BC, siendo e su longitud, es: ρPe. Por tanto se tiene que: $(P\sin\theta - \rho P\cos\theta)s = \rho Pe$. Luego: $e = \frac{(P\sin\theta - \rho P\cos\theta)s}{\rho P} = s(\frac{\sin\theta}{\rho} - \cos\theta)$.

Ñ 14- Calcular la profundidad de un pozo sabiendo que desde que se deja caer una piedra desde su brocal, hasta que se oye el ruido de su llegada al fondo, han transcurrido 6 segundos. La velocidad del sonido es de 340 m/s.

Solución: Tiempo de caída $t_c = \sqrt{\frac{2h}{9,8}}$, siendo h la profundidad del pozo. El tiempo que tarda el sonido en llegar al brocal es: $t_s = \frac{h}{340}$. Luego: $t_c + t_s = 6$, $\sqrt{\frac{2h}{9,8}} + \frac{h}{340} = 6$, $h = 151,2\,\text{m}$.

Ñ 15- La atracción de un planeta sobre su satélite varía proporcionalmente a la masa del planeta e inversamente al cuadrado de la distancia entre ambos. El cuadrado del tiempo de una revolución del satélite en torno al planeta, varía proporcionalmente a la distancia entre ambos e inversamente a la atracción. Hallar el tiempo de una revolución de un satélite de Júpiter cuya distancia a éste, es a la distancia de la Luna a la Tierra como 35/31. La masa de Júpiter es 343 veces la de la Tierra. El tiempo de una revolución de la Luna es de 27 días.

Solución: Sean: F la fuerza de atracción, D la distancia entre satélite y planeta, y M la masa del planeta. Se tiene que: $F = C_1\frac{M}{D^2}$, $T^2 = C_2\frac{D}{F} = K\frac{D^3}{M}$. En el caso de la Tierra: $27^2 = K\frac{D_T^3}{M_T}$. En el caso de Júpiter: $T_J^2 = K\frac{(\frac{35}{31})^3 D_T^3}{343M_T} = \frac{(\frac{35}{31})^3}{343}27^2 = 3,05881$. Luego: $T_J = 1,7489$. El tiempo en que el satélite de Júpiter da una revolución en torno a éste, es de 1,7489 días terrestres.

Ñ 16- A un móvil en reposo se le aplica durante un tiempo t una fuerza igual a su peso y luego se deja al cuerpo moverse libremente durante un tiempo suplementario T, tal que el camino total recorrido sea e. Hallar: 1º) la expresión algebraica de T ; 2º) los valores de T y de la velocidad del móvil al final de su recorrido para $t = 5\,\text{s}$ y $e = 200\,\text{m}$.

Solución: 1º) $P \cdot t = \frac{P}{g}V$, $V = g \cdot t$, $e = T \cdot V = T \cdot g \cdot t$, $T = \frac{e}{g \cdot t}$, siendo g la fuerza de la gravedad. 2º) $T = \frac{200}{9,8 \cdot 5} = 4,08\,\text{s}$, $V = 9,8 \cdot 5 = 49\,\text{m/s}$.

Ñ 17- Se da un cable de acero que soporta una carga máxima de 2.330 kg con un coeficiente de seguridad de 10. Está compuesto por 7 cordones de 37 hilos cada cordón. Individualmente, cada hilo se rompe cuando se le aplican 120 kg/mm^2 de sección, pero su resistencia disminuye 1/8 al retorcerlo para formar el cable. Calcular el diámetro del cable, sabiendo que es 21 veces el de cada hilo. Nota: Coeficiente de seguridad = carga de ruptura/carga máxima.

Solución: Carga de ruptura del cable: $10 \cdot 2.330 = 23.300\,\text{kg}$. Siendo S la sección en mm^2 de cada hilo, la carga de ruptura del cable es: $7 \cdot 37 \cdot 120 \cdot S \cdot \frac{7}{8} = 23.300$. De donde:

$S = 0,856775\,\text{mm}^2$. Por tanto, el diámetro de un hilo es: $\sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 1,044452\,\text{mm}$. El diámetro del cable es: $21 \cdot 1,044452 = 21,9\,\text{mm}$.

Problemas de Trigonometría

Sección O - OPERACIONES - ECUACIONES

O 1- Poner en forma de producto la expresión $E = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha$.

Solución: $E = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos\alpha\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\right) =$
$= 2\cos\alpha\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\right) = 2\cos\alpha(\cos\alpha + \cos 60^\circ) = 4\cos\alpha\cos\frac{\alpha + 60^\circ}{2}\cos\frac{\alpha - 60^\circ}{2}$.

O 2- Poner en forma de producto la expresión $E = \cos a + \cos 2a + \cos 3a$.

Solución: $E = 2\cos\frac{a+3a}{2}\cos\frac{a-3a}{2} + \cos 2a = 2\cos 2a\left(\frac{1}{2} + \cos a\right) =$
$= 2\cos 2a(\cos 60^\circ + \cos a) = 4\cos 2a\cos\frac{a+60^\circ}{2}\cos\frac{60^\circ - a}{2}$.

O 3- Demostrar la identidad $\sin^3 x + \cos^3 x = (1 - \sin x\cos x)(\sin x + \cos x)$.

Solución: $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x) + \cos x(1 - \sin^2 x) =$
$= \sin x + \cos x - \sin x\cos^2 x - \cos x\sin^2 x = (1 - \sin x\cos x)(\sin x + \cos x)$.

O 4- Poner en forma de producto la expresión $E = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c$.

Solución: $E = (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) - \cos^2 a\cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c =$
$= \sin^2 a\sin^2 b - (\cos a\cos b - \cos c)^2 =$
$= (\sin a\sin b + \cos a\cos b - \cos c)(\sin a\sin b - \cos a\cos b + \cos c) =$
$= -[\cos(a-b) - \cos c][\cos(a+b) - \cos c] =$
$= -4\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a-b-c}{2}\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}$.

O 5- Demostrar la identidad $\frac{1}{\tan a} + \frac{1}{\cot a} = \frac{2}{\sin 2a}$.

Solución: $\frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{\sin a\cos a} = \frac{2}{\sin 2a}$.

O 6- Demostrar la identidad $2(\sin^4 a + \cos^4 a + \sin^2 a\cos^2 a) = \sin^8 a + \cos^8 a + 1$.

Solución: $2(\sin^4 a + \cos^4 a + \sin^2 a\cos^2 a) = 2(1 + \cos^4 a - \cos^2 a)^2 =$
$= 2 + 6\cos^4 a - 4\cos^2 a + 2\cos^8 a - 4\cos^6 a = (1 - \cos^2 a)^4 + 1 + \cos^8 a = \sin^8 a + \cos^8 a + 1$.

O 7- Demostrar que si $A + B + C = \pi$, se tiene que $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

Solución: $\sin A + \sin B - \sin C = \sin A + \sin B - \sin(A+B) =$
$= \sin A(1 - \cos B) + \sin B(1 - \cos A) = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2} + 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin^2\frac{A}{2} =$
$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

O 8- Hallar el valor simplificado de la siguiente expresión:
$A = \frac{\sin 2.645^\circ[\cos^2(\frac{23\pi}{2} - 35^\circ) - \sin^2(-1.855^\circ)]}{\sec 1.295^\circ\cos(-3.170^\circ)}$.

Solución: $A = \frac{\sin 125^\circ[\cos^2 235^\circ - \sin^2(-55^\circ)]}{\sec 215^\circ\cos(-290^\circ)} = \frac{\sin 55^\circ[\cos^2 55^\circ - \sin^2 55^\circ]}{-\sec 35^\circ\cos 70^\circ} =$
$= \frac{\sin 55^\circ\cos 110^\circ}{-\sec 35^\circ\cos 70^\circ} = \frac{\sin 55^\circ}{\sec 35^\circ} = \sin^2 55^\circ = 0,671$.

O 9- Demostrar la identidad $(1 + \tan x)^2 + (1 + \cot x)^2 = (\sec x + \csc x)^2$.

Solución: $\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2+\left(1+\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x\cos^2 x}=\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}\right)^2=$
$=(\sec x+\csc x)^2.$

O 10- Sabiendo que $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, calcular las demás razones trigonométricas, racionalizando los resultados.

Solución: $\cos x=\pm\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\tan x=\pm\frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{20}$,
$\cot x=\pm\frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\sec x=\pm\frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}$, $\csc x=\sqrt{5}+1.$

O 11- Si $2\cos\theta=a+\frac{1}{a}$, hallar el valor de $2\cos n\theta$, en su forma más sencilla.

Solución: $e^{xi}=\cos x+i\sin x$, $e^{-xi}=\cos x-i\sin x$, $2\cos x=e^{xi}+e^{-xi}=e^{xi}+\frac{1}{e^{xi}}=a+\frac{1}{a}$, siendo $a=e^{xi}$. Por otra parte: $2\cos nx=e^{nxi}+e^{-nxi}=e^{nxi}+\frac{1}{e^{nxi}}$. Luego: $2\cos n\theta=a^n+\frac{1}{a^n}$.

O 12- Calcular $y=\sec 6^\circ 7' 8''$.

Solución: $y=1{,}005729786.$

O 13- Calcular $y=\sin\sin\sin 82^\circ$.

Solución: $y=\sin[\sin(\sin 82^\circ)]=0{,}0003016378815.$

O 14- Demostrar que $\sin(a-b)+\sin(b-c)+\sin(c-a)+4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}=0.$

Solución: $\sin(a-b)+\sin(b-c)+\sin(c-a)=$
$=2\sin\frac{a-c}{2}\cos\frac{a+c-2b}{2}+2\sin\frac{c-a}{2}\cos\frac{c-a}{2}=$
$=2\sin\frac{c-a}{2}\left(-\cos\frac{a+c-2b}{2}+\cos\frac{c-a}{2}\right)=-4\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, con lo que el enunciado queda demostrado.

O 15- Hallar el valor simplificado de $A=\frac{\cos a\cos 13a}{\cos 3a+\cos 5a}$, para $a=\frac{\pi}{17}$.

Solución: $A=\frac{\cos a\cos 13a}{2\cos 4a\cos a}=\frac{\cos\frac{13\pi}{17}}{2\cos\frac{4\pi}{17}}=\frac{-\cos\frac{4\pi}{17}}{2\cos\frac{4\pi}{17}}=-\frac{1}{2}.$

O 16- Demostrar que $\tan 3a-\tan 2a-\tan a=\tan 3a\tan 2a\tan a$.

Solución: $\tan 3a-\tan 2a-\tan a=\frac{\sin 3a\cos 2a-\sin 2a\cos 3a}{\cos 3a\cos 2a}-\tan a=$
$=\frac{\sin a}{\cos 3a\cos 2a}-\tan a=\frac{\sin a(\cos a-\cos 2a\cos 3a)}{\cos 3a\cos 2a\cos a}=$
$=\frac{\sin a[\cos(3a-2a)-\cos 2a\cos 3a]}{\cos 3a\cos 2a\cos a}=\frac{\sin a(\cos 3a\cos 2a+\sin 3a\sin 2a-\cos 2a\cos 3a)}{\cos 3a\cos 2a\cos a}=$
$=\frac{\sin a\sin 2a\sin 3a}{\cos 3a\cos 2a\cos a}=\tan a\tan 2a\tan 3a.$

O 17- Siendo $A+B+C=90^\circ$, calcular el valor de la expresión $E=\frac{\cot A+\cot B+\cot C}{\cot A\cot B\cot C}$.

Solución: $E=\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A$. Como para $A+B+C=90^\circ$,
$\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}=\infty$, se tiene que:
$1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A=0$. Luego, $E=1$.

O 18- Siendo $A+B+C=180^\circ$, calcular el valor de la expresión $E=\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\cos A\cos B\cos C}$.

Solución: $E=\dfrac{2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C}{\cos A\cos B\cos C}=\dfrac{2[\sin C\cos(A-B)+\sin C\cos C]}{\cos A\cos B\cos C}=$
$=\dfrac{2\sin C[\cos(A-B)+\cos C]}{\cos A\cos B\cos C}=\dfrac{2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]}{\cos A\cos B\cos C}=\dfrac{4\sin C\sin B\sin A}{\cos A\cos B\cos C}=$
$=4\tan A\tan B\tan C$. Como para $A+B+C=180º$, se cumple que: $\tan(A+B+C)=$
$=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}=0$, deduciéndose que: $\tan A+\tan B+\tan C=$
$=\tan A\tan B\tan C$. Por tanto, el valor de la expresión del enunciado es el siguiente: $E=4\tan A\tan B\tan C=4(\tan A+\tan B+\tan C)$.

O 19- Simplificar lo más posible la expresión $E=\arccos\dfrac{3}{2x}+\arctan\dfrac{\sqrt{4x^2-9}}{3}-2\operatorname{arcsec}\dfrac{2x}{3}$, siendo $x>2$, y considerando los arcos iguales o menores que $\dfrac{\pi}{2}$.

Solución: $E=\arccos\dfrac{3}{2x}+\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\sqrt{4x^2-9}}{3}\right)^2}}-2\arccos\dfrac{3}{2x}=$
$=\arccos\dfrac{3}{2x}+\arccos\dfrac{3}{2x}-2\arccos\dfrac{3}{2x}=0.$

O 20- Calcular el producto $P=\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{3\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{5\pi}{15}\cos\dfrac{6\pi}{15}\cos\dfrac{7\pi}{15}$.

Solución: Siendo: $\cos\dfrac{3\pi}{15}=\cos 36º=\dfrac{1+\sqrt5}{4}$ (decágono regular), $\cos\dfrac{6\pi}{15}=\cos 72º=$
$=\dfrac{1-\sqrt5}{4}$ (pentágono regular), se tiene:
$P=(\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15})(\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{7\pi}{15})(\cos\dfrac{3\pi}{15}\cos\dfrac{6\pi}{15})\cos\dfrac{5\pi}{15}=$
$=\dfrac12(\cos\dfrac{5\pi}{15}+\cos\dfrac{3\pi}{15})\dfrac12(\cos\dfrac{9\pi}{15}+\cos\dfrac{5\pi}{15})\dfrac12(\cos\dfrac{9\pi}{15}+\cos\dfrac{3\pi}{15})\cos\dfrac{5\pi}{15}=$
$=\dfrac{1}{2^4}(\dfrac12+\dfrac{1+\sqrt5}{4})(\dfrac{1-\sqrt5}{4}+\dfrac12)(\dfrac{1-\sqrt5}{4}+\dfrac{1+\sqrt5}{4})=\dfrac{1}{2^7}.$

O 21- Demostrar que $\cos a+\cos(a+d)+\cos(a+2d)=\dfrac{\sin\dfrac{3d}{2}\cos(a+d)}{\sin\dfrac{d}{2}}$.

Solución: $\cos a+\cos(a+2d)+\cos(a+d)=2\cos(a+d)\cos d+\cos(a+d)=$
$=\cos(a+d)(1+2\cos d)=\cos(a+d)(3-4\sin^2\dfrac{d}{2})=\cos(a+d)\dfrac{3\sin\dfrac{d}{2}-4\sin^3\dfrac{d}{2}}{\sin\dfrac{d}{2}}=$
$=\dfrac{\cos(a+d)\sin\dfrac{3d}{2}}{\sin\dfrac{d}{2}}.$

O 22- Demostrar que $\sin a+\sin(a+d)+\sin(a+2d)=\dfrac{\sin\dfrac{3d}{2}\sin(a+d)}{\sin\dfrac{d}{2}}$.

Solución: $\sin a+\sin(a+2d)+\sin(a+d)=2\sin(a+d)\cos d+\sin(a+d)=$
$=\sin(a+d)(1+2\cos d)=\sin(a+d)(3-4\sin^2\dfrac{d}{2})=$
$=\sin(a+d)\dfrac{3\sin\dfrac{d}{2}-4\sin^3\dfrac{d}{2}}{\sin\dfrac{d}{2}}=\dfrac{\sin(a+d)\sin\dfrac{3d}{2}}{\sin\dfrac{d}{2}}.$

O 23- Siendo $I_n=\cos^2x+\cos^2 2x+\ldots+\cos^2 nx$, $J_n=\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2nx$, hallar la relación existente entre I_n y J_n. Calcular I_3 y J_3. Demostrar que $J_n=\dfrac{\sin nx\cos(n+1)x}{\sin x}$.

Solución: Siendo: $\cos 2a=2\cos^2 a-1$, se tiene que: $J_n=\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2nx=$

$= (2\cos^2 x - 1) + (2\cos^2 2x - 1) + \ldots + (2\cos^2 nx - 1) = 2I_n - n$. Como (ver $*$ más abajo): $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} \cos ha = \frac{\cos\frac{(n+1)a}{2}\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$, haciendo: $a = 2x$, se tiene: $J_n = \dfrac{\cos(n+1)x \sin nx}{\sin x}$, $I_n = \dfrac{J_n + n}{2} = \dfrac{\frac{\cos(n+1)x\sin nx}{\sin x} + n}{2} = \dfrac{\cos(n+1)x\sin nx + n\sin x}{2\sin x}$. Aplicando estas fórmulas, se obtiene: $J_3 = \dfrac{\cos 4x \sin 3x}{\sin x}$, $I_3 = \dfrac{\cos 4x \sin 3x + 3\sin x}{2\sin x}$.

$$(*) \sum_{h=1}^{n} \cos ha + i\sum_{h=1}^{n} \sin ha = \sum_{h=1}^{n} e^{hai} = \frac{e^{(n+1)ai} - e^{ai}}{e^{ai} - 1} = \frac{e^{\frac{(n+1)ai}{2}}\left(e^{\frac{nai}{2}} - e^{\frac{-nai}{2}}\right)}{e^{\frac{ai}{2}} - e^{\frac{-ai}{2}}} =$$
$$= \frac{\left(\cos\frac{(n+1)a}{2} + i\sin\frac{(n+1)ai}{2}\right)\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}},$$ cuya parte real es:
$$\sum_{h=1}^{n} \cos ha = \frac{\cos\frac{(n+1)a}{2}\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

O 24- Efectuar la suma $C = \cos^3 a - \frac{1}{3}\cos^3 3a + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2 a - \ldots + (-1)^n \frac{1}{3^n}\cos^3 3^n a + \ldots$

Solución: Siendo $\cos^3 a = \dfrac{\cos 3a}{4} + \dfrac{3\cos a}{4}$, se tiene que:
$$C = \frac{\cos 3a}{4} + \frac{3\cos a}{4} - \frac{\cos 3^2 a}{3 \cdot 4} - \frac{\cos 3a}{4} + \frac{\cos 3^3 a}{3^2 \cdot 4} + \frac{\cos 3^2 a}{3 \cdot 4} - \frac{\cos 3^4 a}{3^3 \cdot 4} - \frac{\cos 3^3 a}{3^2 \cdot 4} + \ldots =$$
$= \dfrac{3\cos a}{4}$ (los restantes sumandos se van anulando dos a dos).

O 25- Transformar en forma de producto, la expresión $E = \tan a - 2\tan 2a + \tan 3a$.

Solución: $E = \tan a - \tan 2a + \tan 3a - \tan 2a = \dfrac{\sin(a-2a)}{\cos a \cos 2a} + \dfrac{\sin(3a-2a)}{\cos 3a \cos 2a} =$
$$= \frac{\sin a}{\cos 2a}\left(\frac{-1}{\cos a} + \frac{1}{\cos 3a}\right) = \frac{\sin a}{\cos 2a \cos a \cos 3a}(\cos a - \cos 3a) =$$
$$= \frac{\sin a}{\cos 2a \cos a \cos 3a} 4(\cos a - \cos^3 a) = \frac{4\sin a \cos a \sin^2 a}{\cos 2a \cos a \cos 3a} = \frac{4\sin a \sin^2 a}{\cos 2a \cos 3a}.$$

O 26- Demostrar que en un triángulo plano, se cumple que
$$\frac{a+b+c}{a(\cos B + \cos C) + b(\cos A + \cos C) + c(\cos A + \cos B)} = 1.$$

Solución: En un triángulo plano se cumple que: $a = b\cos C + c\cos B$, $b = c\cos A + a\cos C$, $c = a\cos B + b\cos A$. Sumando las tres igualdades, se tiene:
$a + b + c = a(\cos B + \cos C) + b(\cos A + \cos C) + c(\cos A + \cos B)$.

O 27- Demostrar que $\sin^3 a\cos(b-c) + \sin^3 b\cos(c-a) + \sin^3 c\cos(a-b) = 3\sin a \sin b \sin c$, cuando $a + b + c = 180^\circ$.

Solución: En la demostración se utilizan las siguientes igualdades, para $a + b + c = 180^\circ$:
$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2(1 + \cos a\cos b\cos c)$, $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4\sin a\sin b\sin c$,
$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a\tan b\tan c$. Se trata de demostrar la igualdad:
$$\frac{\sin^3 a\cos(b-c) + \sin^3 b\cos(c-a) + \sin^3 c\cos(a-b)}{\cos a\cos b\cos c} = 3\tan a\tan b\tan c.$$
En efecto: $\dfrac{\sum \sin^3 a\cos(b-c)}{\cos a\cos b\cos c} = \dfrac{\sum \sin^3 a[\cos b\cos c + \sin b\sin c]}{\cos a\cos b\cos c} =$
$$= \sum \frac{\sin^3 a\cos b\cos c}{\cos a\cos b\cos c} + \sum \frac{\sin^3 a\sin b\sin c}{\cos a\cos b\cos c} = \sum \tan a\sin^2 a + \tan a\tan b\tan c\sum \sin^2 a =$$
$$= \sum \tan a - \sum \sin a\cos a + \tan a\tan b\tan c\sum \sin^2 a =$$
$$= \sum \tan a - \frac{1}{2}\sum \sin 2a + \tan a\tan b\tan c\sum \sin^2 a =$$
$$= \tan a\tan b\tan c - 2\sin a\sin b\sin c + 2\tan a\tan b\tan c(1 + \cos a\cos b\cos c) =$$

$= \tan a \tan b \tan c - 2\sin a \sin b \sin c + 2\tan a \tan b \tan c + 2\sin a \sin b \sin c = 3\tan a \tan b \tan c.$

O 28- Demostrar que $\ln x = i \arccos \dfrac{x^2+1}{2x}$.

Solución: $x = e^{i\arccos\frac{x^2+1}{2x}} = \cos(\arccos \dfrac{x^2+1}{2x}) + i\sin(\arccos \dfrac{x^2+1}{2x}) =$
$= \dfrac{x^2+1}{2x} \pm i\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)^2} = \dfrac{x^2+1}{2x} \mp \dfrac{x^2-1}{2x}$. Con el signo + se cumple la igualdad propuesta.

O 29- Hacer calculable por logaritmos la expresión $E = 1 + 2\sin a - \sin 2a$.

Solución: $E = 1 + 2\sin a(1-\cos a) = 1 + 4\sin a \sin^2 \dfrac{a}{2}$. Haciendo $\tan\theta = 4\sin a \sin^2 \dfrac{a}{2}$, se tiene: $E = 1 + \tan\theta = \tan \dfrac{\pi}{4} + \tan\theta = \dfrac{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4} \cos\theta} = \dfrac{\sqrt{2}\,\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}{\cos\theta}$.

O 30- Resolver la ecuación $4\sin x \cos x = 1$.

Solución: $2\sin 2x = 1$, $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$, obteniéndose para $2x$ los valores: $30^\circ + 2k\pi$, y $150^\circ + 2k\pi$, y para x, los valores: $15^\circ + k\pi$ y $75^\circ + k\pi$. Luego las soluciones dentro de los cuatro primeros cuadrantes, son: 15°, 75°, 195°, 255°.

O 31- Resolver la ecuación $\sin 5x = \sin 3x$.

Solución: $5x = 3x + 2k\pi$, $5x = \pi - 3x + 2k\pi$. Luego se tienen las siguientes soluciones: $x = k\pi$, $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{8}$. Luego las soluciones dentro de los cuatro primeros cuadrantes, son: 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°.

O 32- Resolver la ecuación $\tan^2 x - \sec x = 1$.

Solución: $\sin^2 x - \cos x - \cos^2 x = 0$, $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, $\cos x = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \dfrac{1}{2}$ y -1. Luego: $x = \arccos \dfrac{1}{2} = 2k\pi \pm 60^\circ$, $x = \arccos(-1) = (2k+1)\pi$. Luego las soluciones dentro de los cuatro primeros cuadrantes, son: 60°, 180°, 300°.

O 33- Resolver la ecuación $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x$.

Solución: $2\sin 2x \cos(-x) = 2\sin 3x \cos(-x)$. Una familia de soluciones corresponde a: $\cos(-x) = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Otro conjunto de soluciones a: $\sin 2x = \sin 3x$, de donde: $2x = 3x + 2k\pi$, $x = 2k\pi$, y $2x = \pi - 3x + 2k\pi$, $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{5}$. Luego las soluciones dentro de los cuatro primeros cuadrantes, son: 0°, 36°, 90°, 108°, 180°, 252°, 270°, 324°.

O 34- Resolver la ecuación $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$.

Solución: $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$, $\cos x = \dfrac{3 \pm 1}{4}$. Una familia de soluciones es: $x = \arccos 1 = 2k\pi$. Otra familia es: $x = \arccos \dfrac{1}{2} = 2k\pi \pm 60^\circ$. Luego las soluciones dentro de los cuatro primeros cuadrantes, son: 0°, 60°, 300°.

O 35- Resolver la inecuación $\tan x \pm \sin x > 0$.

Solución: $\sin x(\dfrac{1}{\cos x} \pm 1) > 0$. Luego para $\sin x > 0$, es decir, $0 < x < 180^\circ$, ha de cumplirse que: $\dfrac{1}{\cos x} \pm 1 > 0$, es decir: $-90^\circ < x < 90^\circ$, siendo la solución común: $0^\circ < x < 90^\circ$. Para $\sin x < 0$, es decir: $180 < x < 360^\circ$, ha de cumplirse: $\dfrac{1}{\cos x} \pm 1 < 0$, es decir: $90^\circ < x < 270^\circ$, siendo la solución común: $180^\circ < x < 270^\circ$. Luego x ha de encontrarse en los cuadrantes primero y tercero, no valiendo sus valores extremos.

O 36- Resolver la ecuación $\sin^2 2x - 2\sin^2 x = \dfrac{1}{4}$.

Solución: $16\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1 = 0$, $\sin x = \pm\frac{1}{2}$. Las soluciones son: $2k\pi \pm 30^{\circ}$, $150^{\circ} \pm 2k\pi$. Dentro de los cuatro primeros cuadrantes, las soluciones son: 30°, 150°, 210°, 330°.

O 37- Resolver la inecuación $\frac{1-\sin x}{1-2\sin x} < \frac{1+\sin x}{1-4\sin^2 x}$.

Solución: $\frac{1-\sin x}{1-2\sin x} - \frac{1+\sin x}{(1-2\sin x)(1+2\sin x)} = \frac{(1-\sin x)(1+2\sin x)-1-\sin x}{(1-2\sin x)(1+2\sin x)} =$ $= \frac{-2\sin^2 x}{(1-2\sin x)(1+2\sin x)} < 0$. Luego, siendo el numerador negativo, ha de verificarse que: $(1-2\sin x)(1+2\sin x) > 0$, es decir, que los dos factores han de tener el mismo signo. Para $1-2\sin x > 0$, $1+2\sin x > 0$, la solución es: $\frac{-1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$, es decir: $150^{\circ} < x < 210^{\circ}$, o bien: $1-2\sin x < 0$, $1+2\sin x < 0$, es decir: $0^{\circ} < x < 30^{\circ}$ y $330^{\circ} < x < 360^{\circ}$. Para $1-2\sin x < 0$, $1+2\sin x < 0$, no existe solución.

O 38- Resolver la inecuación $\frac{\cos x}{4\cos^2 x - 3} > \frac{1-2\cos^2 x}{3-4\cos^2 x}$, cuando x varía entre 0° y 360°.

Solución: $\frac{\cos x}{4\cos^2 x-3} - \frac{1-2\cos^2 x}{3-4\cos^2 x} = \frac{\cos x+1-2\cos^2 x}{4\cos^2 x-3} = \frac{-(\cos x-1)(\cos x+\frac{1}{2})}{(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2})(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2})} > 0$.

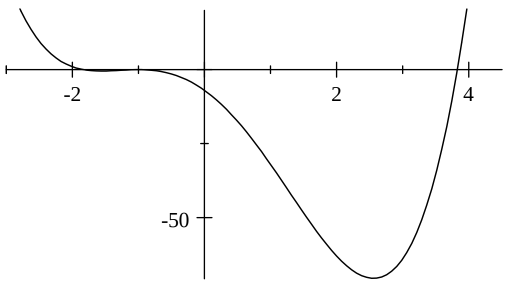
Numerador y denominador son ambos positivos para: $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < 1$, y son ambos negativos para: $\frac{-\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{-1}{2}$. Luego x puede encontrarse en los siguientes intervalos: $0^{\circ} < x < 30^{\circ}$, $120^{\circ} < x < 150^{\circ}$, $210^{\circ} < x < 240^{\circ}$, $330^{\circ} < x < 360^{\circ}$.

O 39- Resolver la inecuación $\frac{1-2\sin x}{1+3\sin x} > \frac{1+5\sin x}{1-9\sin^2 x}$, cuando x varía entre 0° y 360°.

Solución: $\frac{1-2\sin x}{1+3\sin x} - \frac{1+5\sin x}{1-9\sin^2 x} = \frac{(1-2\sin x)(1-3\sin x)-1-5\sin x}{(1+3\sin x)(1-3\sin x)} =$ $= \frac{2\sin x(3\sin x-10)}{(1+3\sin x)(1-3\sin x)} = \frac{2\sin x(3\sin x-5)}{-9(\sin x+\frac{1}{3})(\sin x-\frac{1}{3})} > 0$. Como $(3\sin x - 5)$ es siempre negativo, se tendrá: $\frac{\sin x}{(\sin x+\frac{1}{3})(\sin x-\frac{1}{3})} > 0$. Por tanto, las soluciones para $\sin x$, son, o bien: $\sin x > \frac{1}{3}$, o bien: $\frac{-1}{3} < \sin x < 0$. Luego x puede encontrarse en los siguientes intervalos: $19^{\circ}28'16''4 < x < 160^{\circ}31'43''6$, $180^{\circ} < x < 199^{\circ}28'16''4$, $340^{\circ}31'43''6 < x < 360^{\circ}$.

O 40- Encontrar un ángulo tal que la suma de sus seis razones trigonométricas sea un valor dado m.

Solución: Operando en dicha suma: $\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x$, se tiene: $\sin x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \sin x + \cos x + \frac{1}{\sin x\cos x} + \frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x} =$ $= \sqrt{1+\sin 2x}\left(1+\frac{2}{\sin 2x}\right) + \frac{2}{\sin 2x} = m$. Haciendo: $y = \sin 2x$, se tiene la ecuación: $\sqrt{1+y}\left(1+\frac{2}{y}\right) = m - \frac{2}{y}$, $(1+y)\left(1+\frac{2}{y}\right)^2 = \left(m-\frac{2}{y}\right)^2$, $y^2-(m^2-5)y+4(2+m) = 0$. Para que esta ecuación tenga sus raíces reales, su discriminante $\Delta = (m^2-5)^2 - 16(2+m)$, ha de ser ≥ 0; es decir, $\Delta = (m^2-5)^2 - 16(2+m) = (m+1)^2(m-1-2\sqrt{2})(m-1+2\sqrt{2}) \geq 0$.



Luego las raíces son reales para $m \geq 1+2\sqrt{2}$, y para $m \leq 1-2\sqrt{2}$ (para $m = -1$, se obtiene

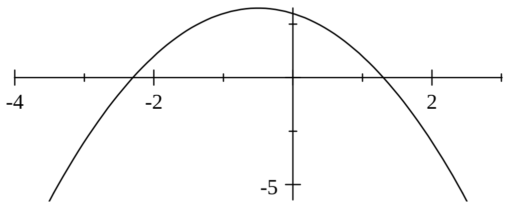
$y = -2,$ solución no válida). Los valores de m que hacen que sólo haya una raíz en el intervalo $(-1,+1),$ vienen dados por: $y(-1) \bullet y(1) < 0,$ es decir:
$(1 - m^2 + 5 + 8 + 4m)(1 + m^2 - 5 + 8 + 4m) = (-m^2 + 4m + 14)(m^2 + 4m + 4) =$
$= -(m - 2 - 3\sqrt{2})(m - 2 + 3\sqrt{2})(m + 2)^2 < 0.$ Luego para $m < 2 - 3\sqrt{2}$ y para $m > 2 + 3\sqrt{2}$, hay una sola solución válida para el ángulo pedido. Los valores de m que hacen que haya dos raíces en el intervalo $(-1,+1),$ vienen dados por las siguientes inecuaciones: a) siendo la suma de las dos raíces $S = m^2 - 5,$ ha de cumplirse: $-2 < m^2 - 5 < 2;$ luego: $-\sqrt{7} < m < \sqrt{7}$, $m > \sqrt{3}$, o bien, $m < -\sqrt{3}$; b) siendo el producto de sus dos raíces $P = 4(2 + m),$ ha de cumplirse: $-1 < 4(2 + m) < 1;$ es decir: $-2,25 < m < -1,75;$ c) para que haya dos raíces en el intervalo $(-1,1),$ han de cumplirse las condiciones: $y(-1) > 0,$ $y(1) > 0,$ es decir: $1 - m^2 + 5 + 8 + 4m > 0,$ $1 + m^2 - 5 + 8 + 4m > 0,$ es decir: para $2 - 3\sqrt{2} < m < 2 + 3\sqrt{2}$.(para $m = -2,$ se obtiene para y los valores $0,$ y $-1,$ que son soluciones válidas). El conjunto de las tres inecuaciones se cumple en el intervalo común: $2 - 3\sqrt{2} < m < 1 - 2\sqrt{2}$, donde hay dos soluciones válidas para el ángulo pedido. Para los valores frontera, se tiene: a) $m = 2 + 3\sqrt{2}$, una raíz válida; b) $m = 1 - 2\sqrt{2}$, una raíz doble válida; c) $m = 2 - 3\sqrt{2}$, dos raíces válidas. Por tanto, los intervalos definitivos son: a) para una raíz válida, los intervalos son: $m < 2 - 3\sqrt{2}$, $m \geq 2 + 3\sqrt{2}$; b) para dos raíces válidas: $2 - 3\sqrt{2} \leq m \leq 1 - 2\sqrt{2}$, con el detalle de que para $m = 1 - 2\sqrt{2}$, la raíz es doble.

O 41- Encontrar un arco x tal que la relación de su tangente a la cuerda que subtiende, sea igual a un número dado m.

Solución: La cuerda mide $2\sin\frac{x}{2}$. Luego: $\dfrac{\tan x}{2\sin\frac{x}{2}} = m = \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2} - 1}$. Haciendo $y = \cos\frac{x}{2}$, se tiene la ecuación: $2my^2 - y - m = 0.$ Para que esta ecuación tenga sus raíces reales, su discriminante $\Delta = 1 + 8m^2,$ ha de ser $\geq 0,$ lo que sucede siempre. Para que sólo haya una solución en el intervalo $(-1,1),$ ha de cumplirse que: $y(-1) \bullet y(1) < 0,$ es decir: $(m - 1)(m + 1) < 0,$ por lo que: $-1 < m < 1.$ Para que haya dos soluciones en el intervalo $(-1,1),$ han de cumplirse las siguientes inecuaciones: a) siendo la suma de las dos raíces $S = \frac{1}{2m},$ ha de cumplirse: $-2 < \frac{1}{2m} < 2;$ luego, $m > 0,25,$ $m < -0,25;$ b) siendo el producto de sus dos raíces constante, $P = \frac{1}{2},$ no implica ninguna condición; c) para que haya dos raíces en el intervalo $(-1,1),$ ha de cumplirse para $m > 0,$ que: $y(-1) > 0,$ $y(1) > 0,$ es decir: $m > 1;$ y para $m < 0,$ que: $y(-1) < 0,$ $y(1) < 0,$ es decir, $m < -1.$ El conjunto de estas condiciones se cumple en los intervalos comunes: $m < -1,$ $m > 1.$ Para los valores frontera, se tiene: a) $m = 1,$ dos raíces válidas; b) $m = -1,$ dos raíces válidas. Por tanto, los intervalos definitivos son: a) para una raíz válida: $-1 < m < 1;$ b) para dos raíces válidas: $m \leq -1,$ $m \geq 1.$

O 42- Resolver la ecuación $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = m.$

Solución: $\tan^2 x + 2\tan x - 2 - m(\tan^2 x + 1) = 0.$ Haciendo: $y = \tan x,$ se tiene la ecuación: $y^2 + 2y - 2 - m(y^2 + 1) = (1 - m)y^2 + 2y - 2 - m = 0$ El discriminante Δ de esta ecuación, es: $\Delta = 1 + (1 - m)(2 + m) = -m^2 - m + 3 = -(m - \frac{-1 - \sqrt{13}}{2})(m - \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}).$



Para que esta ecuación tenga raíces reales, $\Delta \geq 0,$ para lo cual: $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < m < \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$. En este intervalo siempre hay dos raíces reales distintas cuyos valores son: $y = \tan x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-m^2 - m + 3}}{1 - m}$. Para $m = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$, hay una raíz real doble.

O 43- Resolver la ecuación $\tan(a+x)\tan(a-x) = \dfrac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$.

Solución: $\tan(a+x)\tan(a-x) - \dfrac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a} = \dfrac{\tan^2 a - \tan^2 x}{1-\tan^2 a \tan^2 x} - \dfrac{3\tan^2 a - 1}{-\tan^2 a + 3} = 0$. Luego operando y simplificando, se tiene la ecuación: $3\tan^2 x(1-\tan^4 a) - 1 + \tan^4 a = 0$, de donde se obtiene: $\tan^2 x = \dfrac{1-\tan^4 a}{3(1-\tan^4 a)} = \dfrac{1}{3}$, $\tan x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x = k\pi \pm 30^{\circ}$. Dentro de los cuatro primeros cuadrantes, las soluciones son: 30°, 150°, 210°, 330°.

O 44- Resolver la ecuación $\sin x \tan x + 2\cos x = m$.

Solución: $1 - \cos^2 x + 2\cos^2 x - m\cos x = \cos^2 x - m\cos x + 1 = 0$. Haciendo $y = \cos x$, se tiene: $y^2 - my + 1 = 0$, cuyas raíces son reales cuando su discriminante $\Delta = m^2 - 4 \geq 0$, es decir, en los intervalos: $m < -2$, $m > 2$. Para $m = \pm 2$, hay una raíz doble, $y = \pm 1$, que es válida. Para $m > 2$, siendo el producto de las dos raíces 1, hay una sola raíz < 1, que es válida. Para $m < 2$, hay una sola raíz > -1, que es válida.

O 45- Dada la ecuación $f(x) = (m-1)\cos^2 x - 3m\cos x + 2m = 0$, demostrar que para $m = \dfrac{1}{15}$, hay un único valor de x comprendido entre π y $\dfrac{3\pi}{2}$, y calcularlo. Demostrar que no hay ningún valor de m que haga que la ecuación tenga dos raíces comprendidas entre $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{\pi}{2}$.

Solución: $\cos x = \dfrac{3m \pm \sqrt{m^2+8m}}{2(m-1)}$. Para $m = \dfrac{1}{15}$, $\cos x$ tiene los valores: $-\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{2}{7}$, luego x adquiere los valores: $(2k+1)\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ y $2k\pi \pm 73^{\circ}23'54''4$. Luego entre π y $\dfrac{3\pi}{2}$, sólo está la solución: $x = 240^{\circ}$. Entre $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{1}{2} > \cos x > 0$. Para que haya dos soluciones de $\cos x$ en ese intervalo, han de cumplirse las siguientes condiciones: a) $\Delta = m^2 + 8m > 0$, luego, $m > 0$, o bien, $m < -8$; b) la suma de las dos raíces debe estar entre 0 y 1, es decir, $0 < \dfrac{3m}{m-1} < 1$, luego, $-0{,}5 < m < 0$. No es necesario seguir con otras condiciones, pues los intervalos calculados son incompatibles, luego la ecuación dada no puede tener dos raíces comprendidas entre $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{\pi}{2}$.

O 46- Resolver la inecuación $I = \dfrac{\sin 3x - \sin x}{\tan^2 x - (1+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3}} > 0$.

Solución: $I = \dfrac{\sin 3x - \sin x}{\tan^2 x - (1+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3}} = \dfrac{-2\sin x(2\sin^2 x - 1)}{(\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3})} =$

$= \dfrac{-4\sin x\left(\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{(\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3})} > 0$. Dentro de los cuatro primeros cuadrantes, se tiene el siguiente cuadro de signos para cada uno de los cinco factores dependientes de x, y para I

Factores	0º-45º	45º-60º	60º-90º	90º-120º	120º-135º	135º-180º	180º/225º	225º-240º	240º-270º	270º-300º	300º-315º	315º-360º
(a) $\sin x$	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
(b) $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}$	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-
(c) $\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}$	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+
(d) $\tan x - 1$	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	-
(e) $\tan x - \sqrt{3}$	-	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-	-
$I = -4bc/de$	+	+	-	-	-	+	-	-	+	+	+	-

Luego la solución corresponde a los intervalos: $0^{\circ} - 60^{\circ}$, $135^{\circ} - 180^{\circ}$, $240^{\circ} - 315^{\circ}$. Como casos particulares, en el cuadro siguiente se estudian los valores de I correspondientes a los siguientes valores de x: 0°, 45°, 60°, 135°, 180°, 240°, 270°, 300°, 315°.

$x\rightarrow$	0º	45º	60º	135º	180º	240º	270º	300º	315º
$I\rightarrow$	0	$+(*)$	$-\infty$	0	0	$+(*)$	0	$+$	0

Teniendo en cuenta esto último, los intervalos son: $0º < x < 60º$, $135º < x < 180º$, $240º \le x < 270º$, $270º < x < 315º$.
$(*)$ Aplicando L'Hopital

O 47- Resolver la ecuación $f(x) = 3(\cot x - \tan x) - \dfrac{7\cos 2x}{1+\cos 2x} = 0$.

Solución: Operando, se tiene: $f(x) = \dfrac{6\cos 2x}{\sin 2x} - \dfrac{7\cos 2x}{1+\cos 2x} = \cos 2x\left(\dfrac{6}{\sin 2x} - \dfrac{7}{1+\cos 2x}\right) =$ $= \dfrac{\cos 2x(6+6\cos 2x - 7\sin 2x)}{\sin 2x(1+\cos 2x)} = 0$. Para: $\cos 2x = 0$, se tiene: $2x = 2k\pi \pm 90º$, $x = k\pi \pm 45º$. Para: $6+6\cos 2x - 7\sin 2x = 0$, se tiene: $6 + \dfrac{6(1-\tan^2 x)}{1+\tan^2 x} - \dfrac{14\tan x}{1+\tan^2 x} = 0$. De donde: $12 - 14\tan x = 0$, $\tan x = \dfrac{6}{7}$, $x = 40º36'04''66 + k\pi$.

O 48- Eliminar x e y entre las expresiones:
$a\sin^2 x + a'\cos^2 x = b$, $a\cos^2 y + a'\sin^2 y = b'$, $a\tan x = a'\tan y$.

Solución: $\sin^2 x = \dfrac{b-a'}{a-a'}$, $\sin^2 y = \dfrac{b'-a}{a'-a}$, $a^2\dfrac{\dfrac{b-a'}{a-a'}}{1-\dfrac{b-a'}{a-a'}} = a'^2\dfrac{\dfrac{b'-a}{a'-a}}{1-\dfrac{b'-a}{a'-a}}$. Operando y dividiendo por $a-a'$, se tiene: $aa'b - abb' + aa'b' - a'bb' = ab'(-b+a') + a'b(a-b') = 0$.

O 49- Dividir el ángulo de 45º, en dos, de forma que sus tangentes estén en la relación 5 a 6.

Solución: $\dfrac{\tan x}{\tan(45º - x)} = \dfrac{5}{6} = \dfrac{\tan x}{\dfrac{\tan 45º - \tan x}{1+\tan 45º\tan x}} = \dfrac{\tan x(1+\tan x)}{1-\tan x}$. Operando se obtiene la siguiente ecuación: $6\tan^2 x + 11\tan x - 5 = 0$, cuyas raíz válida (la segunda raíz es negativa) es: $\tan x = 0{,}3770145583$, $x = 20º39'25''82$, $45º - x = 24º20'34''18$.

O 50- Resolver el sistema $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \cos(y + \frac{\pi}{6})$, $\tan x = \cot 2y$. Las soluciones se circunscribirán a los cuatro primeros cuadrantes.

Solución: De la primera ecuación se obtienen las siguientes igualdades: a) $\frac{\pi}{2} - (3x - \frac{\pi}{3}) = y + \frac{\pi}{6}$, es decir: $3x + y = \frac{2\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{2} - (3x - \frac{\pi}{3}) = 2\pi - (y + \frac{\pi}{6})$, es decir: $y - 3x = \pi$; c) $-\left[\frac{\pi}{2} - (3x - \frac{\pi}{3})\right] = y + \frac{\pi}{6}$, es decir: $3x - y = \pi$; d) $-\left[\frac{\pi}{2} - (3x - \frac{\pi}{3})\right] =$ $= 2\pi - (y + \frac{\pi}{6})$, es decir: $3x + y = \frac{8\pi}{3}$ De la segunda ecuación: e) $x = \frac{\pi}{2} - 2y$, es decir: $x + 2y = \frac{\pi}{2}$; f) $x = \frac{\pi}{2} - 2y + \pi$, es decir: $x + 2y = \frac{3\pi}{2}$. Emparejando las igualdades a), b), c), d) con e) y f), se tienen ocho sistemas de ecuaciones que dan las siguientes soluciones:

Soluciones	a-e	a-f	b-e	b-f	c-e	c-f	d-e	d-f
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{59\pi}{30}$	$\frac{25\pi}{14}$	$\frac{27\pi}{14}$	$\frac{5\pi}{14}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{29\pi}{30}$	$\frac{23\pi}{30}$
y	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{30}$	$\frac{5\pi}{14}$	$\frac{11\pi}{14}$	$\frac{\pi}{14}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{53\pi}{30}$	$\frac{11\pi}{30}$

O 51- Resolver la ecuación $\sin^2 x - 2\cos^2 x + \dfrac{\sin 2x}{2} = 0$.

Solución: Haciendo: $y = \tan x$, se tiene: $\dfrac{y^2+y-2}{y^2+1} = \dfrac{(y-1)(y+2)}{y^2+1} = 0$, Luego las raíces son: $x = \arctan 1 = 45º + k\pi$, $x = \arctan(-2) + k\pi = 116º33'52''18 + k\pi$.

O 52- Resolver la ecuación $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

Solución: $\dfrac{\sin\frac{3x}{2}\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{\sin\frac{3x}{2}\cos x}{\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{(3\sin\frac{x}{2}-4\sin^3\frac{x}{2})\cos x(2\sin x-1)}{\sin\frac{x}{2}}=$ $=(3-4\sin^2\frac{x}{2})\cos x(2\sin x-1)=0$. Las soluciones son: a) $3-4\sin^2\frac{x}{2}=0$, $x=120^{\circ}+2k\pi$, $x=240^{\circ}+2k\pi$; b) $\cos x=0$, $x=90^{\circ}+k\pi$; c) $2\sin x-1=0$, $x=30^{\circ}+2k\pi$, $x=150^{\circ}+2k\pi$. Dentro de los cuatro primeros cuadrantes, las soluciones son: 30°, 90°, 120°, 150°, 240°, 270°.

O 53- Dividir un cuadrante en tres partes tales que el coseno del arco intermedio esté con los cosenos de los otros dos arcos, en las relaciones m y n.

Solución: $\dfrac{\cos b}{\cos a}=m$, $\dfrac{\cos b}{\cos c}=n$, $a+b+c=90^{\circ}$. Por tanto: $m\cos a=n\cos c$, $\cos b=\sin(a+c)=\sin a\cos c+\cos a\sin c$, $m=\tan a\cos c+\sin c$, $\tan^2 a\cos^2 c=(m-\sin c)^2$, $\dfrac{1-\dfrac{n^2\cos^2 c}{m^2}}{\dfrac{n^2\cos^2 c}{m^2}}\cos^2 c=\dfrac{m^2-n^2\cos^2 c}{n^2}=(m-\sin c)^2$, obteniéndose: $\sin c=\dfrac{m^2n^2-m^2+n^2}{2mn^2}$, $\sin a=\dfrac{m^2n^2+m^2-n^2}{2m^2n}$, $\sin b=\dfrac{m^2n^2-m^2-n^2}{2mn}$. Las soluciones son: $\arcsin\dfrac{m^2n^2+m^2-n^2}{2m^2n}$, $\arcsin\dfrac{m^2n^2-m^2-n^2}{2mn}$, $\arcsin\dfrac{m^2n^2-m^2+n^2}{2mn^2}$.

O 54- Resolver la ecuación $3\sin^2 2x+\sin^2 4x-3=0$.

Solución: $3\sin^2 2x+4\sin^2 2x(1-\sin^2 2x)-3=-4\sin^4 2x+7\sin^2 2x-3=0$, cuyas raíces son: $\sin 2x=\pm 1$, $\sin 2x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Luego: $2x=90^{\circ}+2k\pi$, $270^{\circ}+2k\pi$, $60^{\circ}+2k\pi$, $120^{\circ}+2k\pi$, $240^{\circ}+2k\pi$, $300^{\circ}+2k\pi$. Por tanto: $x=45^{\circ}+k\pi$, $135^{\circ}+k\pi$, $30^{\circ}+k\pi$, $60^{\circ}+k\pi$, $120^{\circ}+k\pi$, $150^{\circ}+k\pi$. En los cuatro primeros cuadrantes, las soluciones son: 30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315°, 330°.

Sección P - *TRIGONOMETRÍA PLANA*

P 1- Resolver un triángulo del que se conocen: $2p = 285,3742$, $A = 49º51'50''03$, $B = 53º45'57''25$.

Solución: El ángulo C mide $76º22'12''72$. Aplicando la fórmula: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = k$, se obtienen las igualdades: $a = 0,7645153788k$, $b = 0,8066086946k$, $c = 0,9718385698k$. Luego: $a+b+c = 2,542962643k = 285,3742$. De donde: $k = 112,2211531$. Por tanto, los lados miden: $a = 85,79479737$, $b = 90,51855781$, $c = 109,0608449$.

P 2- Resolver un triángulo del que se conocen: $r_a = 10,5$, $r_b = 14$, $r_c = 12$.

Solución: $r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = p^2 = 441 = \dfrac{r_ar_br_c}{r}$, $r = 4$, $r_a + r_b + r_c - r = 4R$, $R = 8,125$, $\cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{p}{r_a} = 2$, $A = 53º07'48''37$, $a = 2R\sin A = 13$. De forma análoga: $B = 67º22'48''49$, $b = 15$, $C = 59º29'23''14$, $c = 14$.

P 3- Se necesita trazar una curva de 800 metros de radio, entre dos alineaciones rectas AB y CD de una línea de ferrocarril, que se cortan en E. Se han colocado banderolas en los puntos B y C, y se han medido los ángulos $\widehat{ABC} = 110º20'$ y $\widehat{BCD} = 120º30'$, y la distancia $BC = 166$ metros. Hallar las distancias de los puntos de tangencia G y H a los puntos B y C.

Solución: Los ángulos miden: $\widehat{BEC} = 180 - (180 - 110º20') - (180 - 120º30') = 50º50'$. $\widehat{EBC} = 69º40'$, $\widehat{ECB} = 59º30'$. Luego: $\dfrac{166}{\sin 50º50'} = \dfrac{EC}{\sin 69º40'} = \dfrac{EB}{\sin 59º30'}$, $EC = 200,766$, $EB = 184,481$. Como: $\tan\dfrac{\widehat{BEC}}{2} = \tan 25º25' = \dfrac{800}{EH}$, se deduce que: $EH = EG = 1683,532$, $BG = EG - EB = 1499,051$, $CH = EH - EC = 1482,766$.

P 4- Resolver un triángulo del que se conocen a, h_a, A.

Solución: $bc = \dfrac{ah_a}{\sin A}$, $b + c = \dfrac{a}{\cos\theta}$, siendo $\tan\theta = \dfrac{2\sqrt{bc}\,\cos\dfrac{A}{2}}{a} = \dfrac{2\sqrt{ah_a}\,\cos\dfrac{A}{2}}{a\sqrt{\sin A}}$. Luego b y c son las raíces de la ecuación $x^2 - \dfrac{a}{\cos\theta}x + \dfrac{ah_a}{\sin A} = 0$. Si se quiere resolver esta ecuación por logaritmos, se pueden aplicar las siguientes relaciones: $b = \sqrt{\dfrac{ah_a}{\sin A}}\cot\dfrac{\varphi}{2}$, $c = \sqrt{\dfrac{ah_a}{\sin A}}\tan\dfrac{\varphi}{2}$, siendo: $\sin\varphi = 2\cos\theta\sqrt{\dfrac{ah_a}{\sin A}}$.

P 5- Hallar el área S de un triángulo en función del perímetro $2p'$ del triángulo órtico y del radio R de la circunferencia circunscrita.

Solución: El perímetro $2p'$ del triángulo órtico es igual a: $4R\sin A\sin B\sin C$. Por tanto, siendo: $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$, se tiene: $S = Rp'$.

P 6- Demostrar que si en un triángulo se verifica que $r_a + r_b + r_c = p\sqrt{3}$, el triángulo es equilátero.

Solución: Como: $p(\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2}) = \sqrt{3}p$, $\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} = \tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + {}$ $+\tan\dfrac{180º - A - B}{2} = \sqrt{3}$, $\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{A+B}{2} = \tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \dfrac{1 - \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}}{\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2}} =$ $= \sqrt{3}$. Llamando: $S = \tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2}$, y $P = \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$, las raíces de $x^2 - Sx + P = 0$, son: $\tan\dfrac{A}{2}$ y $\tan\dfrac{B}{2}$. Como: $S + \dfrac{1-P}{S} = \sqrt{3}$, $P = S^2 - \sqrt{3}S + 1$, con lo que la ecuación anterior queda: $x^2 - Sx + S^2 - \sqrt{3}S + 1 = 0$, siendo su discriminante: $S^2 - 4S^2 + 4\sqrt{3}S - 4 =$ $= -(\sqrt{3}S - 2)^2$. Para que no sea negativo (para que las raíces sean reales), ha de cumplirse: $\sqrt{3}S - 2 = 0$, $S = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $P = \dfrac{1}{3}$, siendo por tanto: $\tan\dfrac{A}{2} = \tan\dfrac{B}{2} = \tan\dfrac{C}{2}$, y el triángulo es equilátero.

P 7- Resolver el triángulo en el que $b = 25,$ su área $S = 230,$ y sus ángulos están en progresión aritmética, siendo $a < b < c.$

Solución: Los ángulos son: $60º - d,$ $60º,$ $60º + d,$ $\dfrac{a}{\sin(60º - d)} = \dfrac{25}{\sin 60º} = \dfrac{c}{\sin(60º + d)}.$ La altura sobre $b,$ mide: $h_b = \dfrac{2 \cdot 230}{25} = 18,4 = a\sin(60º + d) = \dfrac{25\sin(60º - d)}{\sin 60º}\sin(60º + d) =$ $= \dfrac{50}{\sqrt{3}}\sin(60º - d)\sin(60º + d) = \dfrac{50(-\cos 120º + \cos 2d)}{2\sqrt{3}}.$ Operando se obtiene la siguiente igualdad: $\cos 2d = \dfrac{18,4\sqrt{3}}{25} + \cos 120º = 0,774789395,$ de donde se deduce que: $d = 19º36'25''30,$ $A = 40º23'34''70,$ $C = 79º36'25''30,$ $a = 18,7069,$ $c = 28,3939.$

P 8- Con origen en un punto A dado, se trazan dos líneas quebradas ABC y $ADE,$ cuyas longitudes y ángulos horizontales con una dirección dada, y ángulos verticales, se indican en el cuadro siguiente:

Alineación	Longitud (m)	Ángulo horizontal	Ángulo vertical
AB	$97,66$	$310º22'$	$+1º20'$
BC	$87,26$	$355º30'$	$+2º01'$
AD	$127,12$	$24º41'$	$+2º54'$
DE	$139,78$	$343º16'$	$+18º16'$

En E se traza una vertical $EF,$ siendo el ángulo vertical de CF: $+\arctan 0,02.$ Hallar la longitud de $EF,$ el ángulo horizontal de CF y la longitud de $CF.$

Solución: Se construye la siguiente tabla:

Triángulo	Lado	Proyección horizontal	Proyección vertical	Ángulos
ABC	AB	$97,63358$	$2,27245$	$\widehat{ABC} = 134º86666$
	BC	$87,20675$	$3,04787$	$\widehat{CAB} = 21º22375$
	AC	$170,73466$	$5,32032$	Orientación $AC = -28º40958$
ADE	AD	$126,95720$	$6,43137$	$\widehat{ADE} = 138º58333$
	DE	$132,73620$	$43,81265$	$\widehat{DAE} = 21º19032$
	AE	$242,92389$	$50,24402$	Orientación $AE = 3º49301$
ACE	CE	$133,19621$	$-$	$\widehat{CAE} = 31º90260$
				$\widehat{ACE} = 105º45532$

Longitud $EF = 50,24402 - 5,32032 - 133,19621 \cdot 0,02 = -42,26\,\text{m}.$
Orientación $CF = 180º - 105º45532 - 28º40958 = 46º1351 = 46º08'06''36.$
Longitud $CF = \dfrac{133,19621}{\cos(\arctan 0,02)} = 133,223\,\text{m}.$

P 9- Nueve individuos están situados a igual distancia en una circunferencia de 60 metros de radio. Ocho de ellos van a reunirse con el noveno siguiendo el camino más corto. Calcular la suma de las distancias recorridas por los ocho individuos.

Solución: Las distancias recorridas son los terceros lados de triángulos isósceles de lados iguales al radio y ángulo comprendido igual a $40º,$ $80º,$ $120º,$ $160º,$ $200º,$ $240º,$ $280º,$ $320º.$ Los cuatro últimos son iguales a los cuatro primeros. La suma de las distancias recorridas es: $2 \cdot 60\sqrt{2}\,\sqrt{2}\,(\sin 20º + \sin 40º + \sin 60º + \sin 80º) = 680,5538\,\text{m}.$

P 10- Resolver el triángulo del que se conocen los siguientes datos: $a = 3428\,\mathrm{m}$, $h_a = 5824,1\,\mathrm{m}$, $B - C = 60º49'40''$.

Solución: Se aplican las fórmulas: $2S\sin A = a^2\sin B\sin C = \frac{a^2}{2}[\cos(B-C) - \cos(B+C)]$, $2h\sin A - a\cos A = a\cos(B-C)$, $\sin A - \frac{a}{2h}\cos(B-C)$, $\frac{a}{2h} = \tan\theta$, de donde se tiene: $\theta = 16º39886064$. Como: $\sin(A-\theta) = \sin\theta\cos(B-C)$, luego: $A = 24º30867458 = 24º18'31''23$. $B = 108º15'34''39$, $C = 47º25'54''38$, $b = 7908,104\,\mathrm{m}$, $c = 6132,911\,\mathrm{m}$.

P 11- Resolver el triángulo del que se conocen los siguientes datos: $ab = 2000$, $R = 30$, $B = 63º04'14''$.

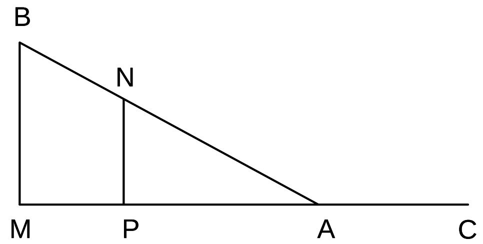
Solución: Se aplican las fórmulas: $b = 2R\sin B = 53,4939$, $a = \frac{2000}{53,4939} = 37,3874$, $\sin A = \frac{a\sin B}{b}$, $A = 38º5445724 = 38º32'40''46$, $C = 78º384872 = 78º23'05''54$, $c = 58,7713$.

P 12- Resolver el triángulo del que se conocen los siguientes datos: $A = 47º28'$, $b - c = 47,32$, $r = 50$.

Solución: Se aplican las fórmulas: $a = 2r\tan\frac{A}{2} \pm \sqrt{4r^2\tan^2\frac{A}{2} + (b-c)^2 + 4r^2} = 163,01348$, $b + c = a + 2r\cot\frac{A}{2} = 390,46022$, obteniéndose los siguientes valores: $b = 218,8901$, $c = 171,5701$, $B = 81º40'37''87$, $C = 50º51'22''13$.

P 13- Dada la alineación MAC, se levanta en M la perpendicular MB. Se fija en AB, el punto N, cuya perpendicular sobre CAM, corta a ésta en P. Se conocen: $AC = 31,56$, $\alpha = \widehat{ACB} = 14º31'46''81$, $\beta = \widehat{ACN} = 13º16'34''27$, $\gamma = \widehat{MAB} = 17º28'31''60$. Calcular $h_2 = BM$ y $h_1 = NP$.

Solución:



$$h_1 = AN\sin\gamma = \frac{AC\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)} = 29,7224,\ h_2 = AB\sin\gamma = \frac{AC\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)} = 46,2669.$$

P 14- El área S de la superficie engendrada por un triángulo al girar alrededor de su lado a, es πs^2. Calcular los lados del triángulo sabiendo que: $A = 15º12'13''$, $B = 92º13'47''$, $s = 12,47$.

Solución: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$, $a = 0,26225k$, $b = 0,99924287k$, $c = 0,95406619k$. El área de la superficie engendrada es: $S = \pi(b+c)h_a = \pi(b+c)b\sin C = 1,86217516k^2\pi =$ $= \pi 12,47^2$, $k = 9,138105964$, $a = 2,396468$, $b = 9,131187$, $c = 8,718358$.

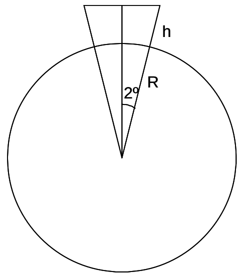
P 15- Una plaza tiene forma triangular, midiendo uno de sus lados $87\,\mathrm{m}$, y sus ángulos adyacentes $84º29'36''$ y $64º12'12''$. Se trazan paralelas a las tres fachadas, a $10\,\mathrm{m}$ de ellas, para dejar calles de ese ancho, dedicando a jardines el espacio central, Calcular el área destinada a jardines.

Solución: Sean A, B, C, los vértices de la plaza, siendo su lado $BC = a = 87$. Sean A', B', C' los vértices del área destinada a jardines, siendo a', su lado paralelo a a. Los dos triángulos son semejantes, teniéndose que: $a' = a - \frac{10}{\tan\frac{B}{2}} - \frac{10}{\tan\frac{C}{2}}$. Siendo h' la altura desde A' sobre $B'C'$, se tiene que: $a' = h'\left(\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}\right)$. Por tanto, el área pedida viene dada por la expresión:

$$S = \frac{a'h'}{2} = \frac{\left[a - 10\left(\frac{1}{\tan\frac{B}{2}} - \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}\right)\right]^2}{2\left(\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}\right)} = 3109,864871\,\mathrm{m}^2.$$

P 16- Supuesta la Tierra esférica, hallar a qué altura deben encontrarse dos globos y a qué distancia estarán entre sí, para que desde la Tierra puedan verse bajo un ángulo de 4º. Los dos globos están a la misma altura sobre la superficie de la Tierra.

Solución:



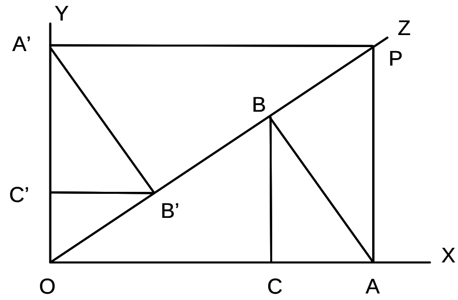
El radio R de la Tierra, mide $\frac{40.000}{2\pi}$ km. Se tiene que: $\cos 2º = \frac{R}{R+h}$, siendo h la altura a la que se encuentran ambos globos. Luego, $h = \frac{R(1-\cos 2º)}{\cos 2º} = 3,88048\,\mathrm{km}$. La distancia entre ambos globos, es: $2R\tan 2º = 444,625\,\mathrm{km}$.

P 17- Resolver un triángulo del que se conocen: $A = 123º34'10''$, $h_a = 400$, $b + c = 2000$, siendo $b > c$.

Solución: $h_a = c\sin B = b\sin C$, $\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{b+c}{h_a} = 5$, $\sin B + \sin C - 5\sin B\sin C =$ $= 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} + \frac{5}{2}[\cos(B+C) - \cos(B-C)] = 0$. Como: $B + C = 56º430\widehat{5}$, se tiene: $10\cos^2\frac{B-C}{2} - 4\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 5[1+\cos(B+C)] =$ $= 10\cos^2\frac{B-C}{2} - 4\sin 28º2152\widehat{7}\cos\frac{B-C}{2} - 5(1+\cos 56º430\widehat{5}) = 0$. Resolviendo la ecuación, se obtiene: $\cos\frac{B-C}{2} = 0,9807934005$, $\frac{B-C}{2} = 11º24761497$, $B = 39º46289274 =$ $= 39º27'46''41$, $C = 16º9676628 = 16º58'03''59$, $b = \frac{400}{\sin C} = 1.370,652$, $c = 629,348$, $a = \frac{b\sin A}{\sin B} = 1.796,867$.

P 18- Se da un ángulo recto XOY y una recta OZ que forma con OX un ángulo $\theta < 90º$. Desde un punto P, de coordenadas $OA = a$ y $OA' = a'$, situado sobre OZ, se traza PA perpendicular a OX, después AB perpendicular a OZ, después BC perpendicular a OX, y así sucesivamente. Calcular el límite L de la suma de estas perpendiculares. De forma similar, se traza PA' perpendicular a OY, después $A'B'$ perpendicular a OZ, después $B'C'$ perpendicular a OY, y así sucesivamente. Calcular el límite L' de la suma de estas perpendiculares. Demostrar que el cociente $\frac{L}{L'}$ es independiente de la posición de P sobre OZ. Calcular el valor de θ, cuando $\frac{L}{L'} = \frac{10}{3}$.

Solución:



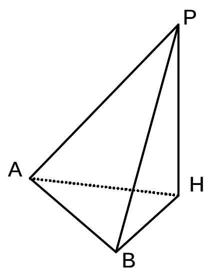
Las longitudes del primer grupo de perpendiculares, son: a', $a'\cos\theta$, $a'\cos^2\theta$, $a'\cos^3\theta,\ldots$ Luego: $L = \dfrac{a'}{1-\cos\theta}$. Las longitudes del segundo grupo de perpendiculares, son: a, $a\sin\theta$, $a\sin^2\theta$, $a\sin^3\theta,\ldots$ Luego: $L' = \dfrac{a}{1-\sin\theta}$, $\dfrac{L}{L'} = \dfrac{a'(1-\sin\theta)}{a(1-\cos\theta)} = \dfrac{\tan\theta(1-\sin\theta)}{1-\cos\theta}$, que es independiente de la posición de P. Para resolver: $\dfrac{\tan\theta(1-\sin\theta)}{1-\cos\theta} = \dfrac{10}{3}$, se hace: $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$, con lo que se tiene la ecuación: $10t^2 + 13t - 3 = 0$, $t = 0{,}2$, $\theta = 22º37'11''51$.

P 19- En un tetraedro $SABC$, la arista SA, que mide $427{,}854\,\text{m}$, es perpendicular a la base ABC. Las aristas SB y SC forman con SA ángulos iguales de $55º18'27''$. El ángulo BSC mide $28º44'35''$. Hallar las longitudes de las aristas SC, AB y BC, el ángulo BAC y el volumen del tetraedro.

Solución: En el triángulo rectángulo SAB, se tienen las relaciones: $AB = AC = 427{,}854\tan 55º18'27'' = 618{,}0725\,\text{m}$, $SB = SC = \dfrac{427{,}854}{\cos 55º18'27''} = 751{,}7131\,\text{m}$. En el triángulo SBC, se tienen las relaciones: $\widehat{SCB} = \widehat{SBC} = \dfrac{180º - 28º44'35''}{2} = 75º37'42''50$, $BC = \dfrac{751{,}7131\sin 28º44'35''}{\sin 75º37'42''50} = 373{,}1632\,\text{m}$. En el triángulo ABC, se tiene que el ángulo $\widehat{BAC}$ mide: $2\arcsin\dfrac{373{,}1632}{2\cdot 618{,}0725} = 35º08'26''52$. Por todo ello, el volumen del tetraedro es: $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 373{,}1632\cdot 618{,}0725\cdot\cos\dfrac{35º08'26''52}{2}\cdot 427{,}854 = 15.679.551\,\text{m}^3$.

P 20- Para medir la altura de la punta P de un campanario, se mide en el suelo una base $AB = 1.582{,}6\,\text{m}$. Luego se mide el ángulo bajo el cual se ve el campanario desde A, siendo $\widehat{PAH} = 3º684$ (H es la proyección de P sobre el suelo), y los ángulos $\widehat{PAB} = 53º28$ y $\widehat{PBA} = 31º84$. Calcular la altura del campanario (PH) y la distancia AP.

Solución:



En el triángulo APB, se tiene: $AP = \dfrac{1582{,}6\sin 31º84}{\sin(180º - 31º84 - 53º28)} = 837{,}9365\,\text{m}$. En el triángulo PAH, se tiene: $PH = 837{,}9365\sin 3º684 = 53{,}8405\,\text{m}$.

P 21- Demostrar que en un triángulo se cumple que $2S = \dfrac{a^2-b^2}{\cot B - \cot A}$, siendo S su área,

Solución: Se aplica la fórmula: $a = c\cos B + b\cos C$, luego: $a^2 = ac\cos B + ab\cos C =$ $= ac\sin B\cot B + ab\sin C\cot C = 2S(\cot B + \cot C)$. De forma análoga: $b^2 = 2S(\cot A + \cot C)$.

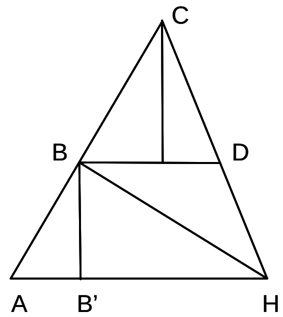
Luego: $a^2 - b^2 = 2S(\cot B - \cot A)$.

P 22- Demostrar que en un triángulo se cumple que $a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$.

Solución: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $b^2 = b^2 + a^2 - 2ca\cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Sumando las tres igualdades y simplificando, se tiene: $a^2 + b^2 + c^2 = 2bc\cos A + 2ca\cos B + 2ab\cos C =$ $= 2bc\sin A\cot A + 2ca\sin B\cot B + 2ab\sin C\cot C = 4S\cot A + 4S\cot B + 4S\cot C$.

P 23- Un globo libre comienza su ascensión partiendo de un punto A situado en una llanura. El viento que sopla horizontalmente en la dirección AH, con intensidad constante, le hace seguir una línea recta ABC, que forma con la vertical un ángulo de $11º47'20''$. Al llegar a cierta altura (punto B de su trayectoria), el ángulo de depresión de la visual BH, es de $24º27'25''$. Momentos después, al llegar al punto C de su trayectoria, que está a una altura superior en $200\,\text{m}$ a la del punto B, el ángulo de depresión de la visual CH es de $48º32'58''$. Calcular la altura BB' correspondiente a la primera observación y la longitud AH.

Solución:



Sea D un punto de CH, que se encuentra a la misma altura que B. En el triángulo BCD, se tiene que: $\widehat{CBD} = 90º - 11º47'20''$, $\widehat{BDC} = 48º32'58''$, y la altura del vértice C sobre el lado BD mide $200\,\text{m}$. Por tanto: $BD = 200\left(\dfrac{1}{\tan\widehat{CBD}} + \dfrac{1}{\tan\widehat{BDC}}\right) = 218,3793\,\text{m}$. En el triángulo BDH , se tienen los siguientes valores: $\widehat{DBH} = 24º27'25''$, $\widehat{BDH} = 180º - 48º32'58'' =$ $= 131º27'02''$, $\widehat{DHB} = 24º05'33''$, $BH = \dfrac{218,3793\sin 131º27'02''}{\sin 24º05'33''} = 400,9722\,\text{m}$. En el triángulo ABH, se tienen los valores: $\widehat{BAH} = 90º - 11º47'20'' = 78º12'40''$, $\widehat{AHB} = 24º27'25''$, $\widehat{ABH} = 180º - 78º12'40'' - 24º27'25'' = 77º19'55''$, Luego la longitud AH viene dada por la siguiente expresión: $\dfrac{400,9722\sin 77º19'55''}{\sin 78º12'40''} = 399,6409\,\text{m}$, y la altura BB' por: $\dfrac{399,6409}{\dfrac{1}{\tan 78º12'40''} + \dfrac{1}{\tan 24º27'25''}} = 166,0062\,\text{m}$.

P 24- Siendo $A'B'C'$ el triángulo que tiene por vértices los puntos de contacto del círculo inscrito en un triángulo ABC, demostrar que: 1º) $\dfrac{a'}{a} = 2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$; 2º) $\dfrac{R'(=r)}{R} = 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$; 3º) $\dfrac{a'b'c'}{abc} = \dfrac{r^2}{2R^2}$.

Solución: 1º) $a' = 2(p-a)\sin\dfrac{A}{2}$, siendo: $2p = a+b+c$. Por otra parte: $p - b = \dfrac{r}{\tan\dfrac{B}{2}}$, $p - c = \dfrac{r}{\tan\dfrac{C}{2}}$, luego, $a = p - b + p - c = r\left(\dfrac{1}{\tan\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}}\right) = \dfrac{r\sin\dfrac{B+C}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}$. Por tanto:

$$\frac{a'}{a} = \frac{2(p-a)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{r\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{2(p-a)\tan\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{r} = \frac{2(p-a)r\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{r(p-a)} =$$

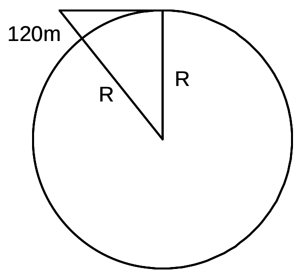
$= 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. 2º) $\frac{R'(=r)}{R} = \frac{r}{\frac{abc}{4S}} = \frac{4S^2}{abcp} = \frac{a^2h_a^2}{abcp} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$. Como: $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$, $\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} = \frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{a^2b^2c^2}$. De donde se deduce que: $\frac{R'(=r)}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. 3º) $\frac{a'b'c'}{abc} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2} = \frac{(4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})^2}{2} = \frac{r^2}{2R^2}$.

P 25- Se tiene un ángulo $A = 44º20'12''$. Se toma sobre uno de sus lados un punto B, tal que $AB = 107\,\text{m}$. Se traza una recta BC de forma que la superficie del triángulo ABC, sea $6.527\,\text{m}^2$. Hallar AC y $\widehat{ABC}$.

Solución: $AC = \frac{2 \cdot 6527}{107\sin 44º20'12''} = 174,5667\,\text{m}$. Por otra parte, $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$, $B-C = 60º59'31''35$, $B+C = 180º - 44º20'12''$, $B = 98º19'39''68$.

P 26- Un observador colocado a $120\,\text{m}$ sobre el nivel del mar, comprueba que su visual sobre el horizonte forma con la perpendicular de su emplazamiento, un ángulo de $89º39'$. Hallar el valor del radio terrestre.

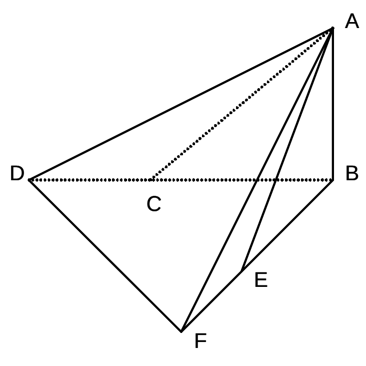
Solución:



Siendo R el radio terrestre, se tiene: $\sin 89º39' = \frac{R}{R+120}$. De donde despejando se obtiene: $R = \frac{120\sin 89º39'}{1-\sin 89º39'} = 6.431.520,586\,\text{m}$.

P 27- La solución de la ecuación $\sin^2 x - 2\cos x + 0,25 = 0$, corresponde al ángulo de elevación de la recta que une un punto cualquiera del borde del foso circular que rodea a una torre AB, con el extremo superior A de ésta. La sombra que proyecta dicha torre en un momento determinado del día, alcanza a un punto D exterior del foso, distante $45\,\text{m}$ del borde de este. Al transcurrir el día, en un momento determinado, la sombra forma un ángulo de 90º con la posición anterior, alcanzando ahora a un punto F distante $120\,\text{m}$ del borde del foso. La distancia DF entre los dos puntos alcanzados es $375\,\text{m}$. Hallar la altura de la torre sobre el borde del foso.

Solución:



$\cos^2 x + 2\cos x - 1,25 = 0$, $\cos x = 0,5$, $x = 60º$. Sea C el punto del borde del foso cruzado por la sombra en la primera posición, y sea E el correspondiente a la segunda posición. Siendo x la altura pedida AB, se tiene en el triángulo rectángulo BDF, como $BC = BE = \frac{x}{\tan 60º}$, que:

$\left(\dfrac{x}{\tan 60^\circ}+45\right)^2+\left(\dfrac{x}{\tan 60^\circ}+120\right)^2=375^2$. Operando se obtiene la siguiente ecuación: $2\left(\dfrac{x}{\tan 60^\circ}\right)^2+2(45+120)\dfrac{x}{\tan 60^\circ}+45^2+120^2-375^2=0$, cuya solución es: $\dfrac{x}{\tan 60^\circ}=180$, $x=180\sqrt{3}=311,769\,\mathrm{m}$.

P 28- En el triángulo ABC, se conocen $S=547.381\,\mathrm{m}^2$, $A=164^\circ 47'$, $b+c=4.090\,\mathrm{m}$, siendo $c>b$. Se toma un punto P situado al otro lado del que ocupa A respecto a la recta BC, definido por $\widehat{BPA}=59^\circ 56'$ y por $\widehat{APC}=38^\circ 53'$. Hallar b, c y AP.

Solución: $S=\dfrac{bc\sin A}{2}$, $bc=4.171.000$. Los lados b y c, son las soluciones de: $x^2-4090x+4171000=0$, de donde: $b=1.940$, $c=2.150$. Por tanto: $a=\sqrt{1940^2+2150^2-2\cdot 1940\cdot 2150\cos 164^\circ 47'}=4054,0882$, $C=\arcsin\dfrac{2150\sin 164^\circ 47'}{4054,0882}=$ $=8^\circ 0'04''64$, $B=\arcsin\dfrac{1940\sin 164^\circ 47'}{4054,0882}=7^\circ 12'55''36$. Sean: $\alpha=\widehat{BAC}$, $\beta=\widehat{BCP}$, $\gamma=\widehat{CBP}$. Se tiene la igualdad: $\alpha+8^\circ 0'04''64+\beta+38^\circ 53'=180^\circ$, $\alpha+\beta=133^\circ 06'55''36$, $\beta+38^\circ 53'+59^\circ 56'+\gamma=180^\circ$, $\beta+\gamma=81^\circ 11'$, $\alpha-\gamma=51^\circ 55'55''36$. En los triángulos ABP y APC, se tiene: $AP=\dfrac{2150\sin(7^\circ 12'55''36+\gamma)}{\sin 59^\circ 56'}=\dfrac{2150\sin(7^\circ 12'55''36+81^\circ 11'-\beta)}{\sin 59^\circ 56'}=$ $=\dfrac{1940\sin(8^\circ 0'04''64+\beta)}{\sin 38^\circ 53'}$. Luego: $\dfrac{2150\sin 38^\circ 53'}{1940\sin 59^\circ 56'}\sin(88^\circ 23'55''36-\beta)=\sin(8^\circ 0'04''64+\beta)$, $\dfrac{2150\sin 38^\circ 53'}{1940\sin 59^\circ 56'}[\sin 88^\circ 23'55''36\cos\beta-\cos 88^\circ 23'55''36\sin\beta]=$ $=\sin 8^\circ 0'04''64\cos\beta+\cos 8^\circ 0'04''64\sin\beta$. Para obtener $\tan\beta$ se aplica la siguiente expresión:

$$\tan\beta=\frac{\dfrac{2150\sin 38^\circ 53'}{1940\sin 59^\circ 56'}\sin 88^\circ 23'55''36-\sin 8^\circ 0'04''64}{\cos 8^\circ 0'04''64+\dfrac{2150\sin 38^\circ 53'}{1940\sin 59^\circ 56'}\cos 88^\circ 23'55''36}=0,6559926708,\quad \beta=33^\circ 15'52''49,$$

$\gamma=47^\circ 55'07''51$, $\alpha=99^\circ 51'02''87$, $AP=2.038,3306\,\mathrm{m}$.

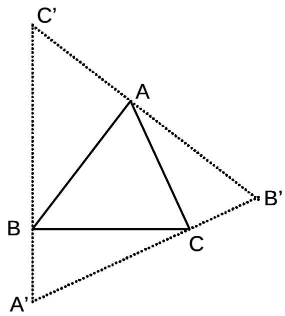
Nota- En este problema, para solucionar un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo que forman, se ha utilizado la fórmula $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, aplicada mediante calculadora como en otros muchos problemas de este libro. Antes del uso generalizado de las calculadoras, era muy conveniente resolver este problema, como en otros casos, utilizando logaritmos, para lo cual se obtienen primero, los ángulos B y C, mediante la fórmula $\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{\tan\dfrac{(B+C)}{2}}{\tan\dfrac{B-C}{2}}$, para seguidamente calcular $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}$.

P 29- En un triángulo rectángulo OAB, la relación entre los catetos es $\dfrac{OA}{OB}=m$. Se unen A y B con un punto P de la bisectriz del ángulo recto $\widehat{AOB}$, teniéndose $x=\widehat{OAP}$, $y=\widehat{OBP}$. 1º) Demostrar que: $m\tan x(1+\tan y)=\tan y(1+\tan x)$. 2º) Hallar la condición que debe cumplir m para que exista un punto P y sólo uno, tal que $x=2y$.

Solución: 1º) Tomando como ejes coordenados, los catetos, se tiene: $A(a,0)$, $B(0,b)$, $P(c,c)$, $\tan x=\dfrac{c}{a-c}$, $\tan y=\dfrac{c}{b-c}$, $m=\dfrac{a}{b}$. Luego: $\dfrac{\tan y(1+\tan x)}{\tan x(1+\tan y)}=\dfrac{\dfrac{c}{b-c}\left(1+\dfrac{c}{a-c}\right)}{\dfrac{c}{a-c}\left(1+\dfrac{c}{b-c}\right)}=$ $=\dfrac{a}{b}=m$, con lo que queda demostrado. 2º) $\tan x=\dfrac{2\tan y}{1-\tan^2 y}$. Luego haciendo: $\tan y=t$, se tiene: $m\dfrac{2t}{1-t^2}(1+t)-t\left(1+\dfrac{2t}{1-t^2}\right)=0$, de donde: $t^2+2(m-1)t+2m-1=0$. Haciendo nulo su discriminante, se obtiene: $m=2\pm\sqrt{2}$, que son los valores que ha de tomar m, para que sólo exista un punto P.

P 30- Se da un triángulo ABC, cuyos lados miden $a=13\,\mathrm{m}$, $b=14\,\mathrm{m}$, $c=15\,\mathrm{m}$. Por el punto A se traza una perpendicular al lado AB; por el punto B se traza una perpendicular al lado BC; por el punto C se traza una perpendicular al lado CA. Las tres perpendiculares trazadas definen un triángulo $A'B'C'$. Calcular su área.

Solución:



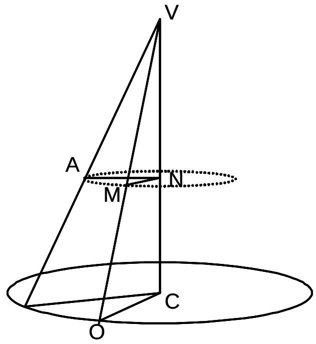
En el triángulo ABC', se tiene $\widehat{BAC'} = 90º$, $\widehat{ABC'} = 90º - B$, $\widehat{AC'B} = B$, $AC' = \dfrac{c}{\tan B}$, luego su área es: $\dfrac{c^2}{2\tan B}$. El área del triángulo $A'B'C'$ viene dada por la expresión: $S_{ABC} + S_{ABC'} + S_{BCA'} + S_{CAB'} = S_{ABC} + \dfrac{c^2}{2\tan B} + \dfrac{a^2}{2\tan C} + \dfrac{b^2}{2\tan A}$. El área del triángulo ABC es: $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84$. Se tiene que: $\tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = 0,5$, $\tan A = \dfrac{4}{3}$, $\tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{4}{7}$, $\tan B = \dfrac{56}{33}$, $\tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{2}{3}$, $\tan C = \dfrac{12}{5}$. Por tanto, el área del triángulo $A'B'C'$, es: $S_{A'B'C'} = 84 + \dfrac{33 \cdot 225}{2 \cdot 56} + \dfrac{5 \cdot 169}{2 \cdot 12} + \dfrac{3 \cdot 196}{2 \cdot 4} = \dfrac{87025}{336} = 259,0029762\,\text{m}^2$.

P 31- En un triángulo equilátero ABC, se trazan con centro en cada vértice, arcos comprendidos entre los lados, con un radio igual a la altura. Hallar el área del triángulo curvilíneo que se ha formado, siendo $2\,\text{m}$ el lado del triángulo dado.

Solución: Los arcos trazados son tangentes a los lados en A', B', C', y se cortan entre sí en los puntos A'', B'', C''. El área pedida está formada por seis sectores circulares iguales como el definido por $A\,A'C''$, siendo A su centro, A' el punto de tangencia con el lado BC, y C'' el punto de corte con el arco trazado con centro el vértice B, a los que hay que restar seis triángulos como el AOC'', siendo O el centro del ABC. En el triángulo AOC'', se conocen: $AO = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (es decir, $\dfrac{2}{3}$ de la altura AA'), $AC'' = AA' = \sqrt{3}$, $\widehat{AOC''} = 120º$. Para calcular el ángulo $\widehat{AC''O}$, se aplica la fórmula: $\sin\widehat{AC''O} = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 120º}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, de donde: $\widehat{AC''O} = 35º26438968$. Por consiguiente, se tiene: $\widehat{OAC''} = 180º - 120º - 35º26438968 = 24º73561032$. La altura sobre $AC'' = \dfrac{\sin 24º73561032 \sin 35º26438968}{\sin 120º}\sqrt{3} = 0,4831632477$. Luego el área pedida es: $6\left(\dfrac{\pi(\sqrt{3})^2 24,73561032}{360} - \dfrac{0,4831632477\sqrt{3}}{2}\right) = 1,374870704\,\text{m}^2$.

P 32- En una esfera de $10\,\text{cm}$ de radio, se trazan en el mismo hemisferio, dos círculos menores, paralelos al ecuador, a las latitudes 40º y 50º respectivamente. Sobre la superficie esférica se toman dos puntos: uno O, situado en el primer paralelo, y otro A, en el segundo, de modo que el ángulo rectilíneo del diedro formado por los dos planos meridianos que pasan por O y por A, sea de 10º. Seguidamente se determina una superficie cónica de revolución, con vértice V, y que tiene en común con la superficie esférica, los dos paralelos citados. Se desarrolla esta superficie cónica sobre su plano tangente correspondiente a la generatriz VO, abriéndola por la generatriz opuesta a VO, con lo que el punto A, considerado ahora como de la superficie cónica, ocupa el punto A' en el citado desarrollo. Calcular las coordenadas de A', respecto de OV, que se toma como eje YY', y de la perpendicular en O a OV, que se toma como eje XX'.

Solución:



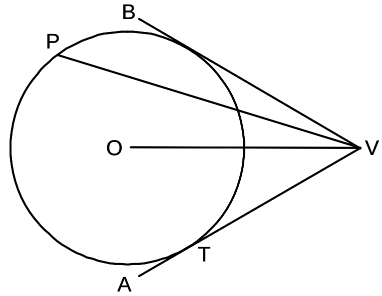
En el triángulo VOC, siendo C el centro de la base del cono, se tiene: $OC = R$ (radio del paralelo 40º) $= 10\cos 40º$, $\theta = \widehat{OVC}$, $g = VO = \dfrac{10\cos 40º}{\sin\theta}$, $h = VC = \dfrac{10\cos 40º}{\tan\theta}$. Siendo r (radio del paralelo 50º) $= 10\cos 50º$, se traza el radio $MN = r$, paralelo a OC, teniéndose: $g' = VM = \dfrac{10\cos 50º}{\sin\theta}$, $h' = VN = \dfrac{10\cos 50º}{\tan\theta}$, $\tan\theta = \dfrac{10(\cos 40º - \cos 50º)}{10(\sin 50º - \sin 40º)} = 1$, $\theta = 45º$, $g = 10\sqrt{2}\cos 40º$, $g' = 10\sqrt{2}\cos 50º$. En el desarrollo del cono, el ángulo φ, formado por los radios VO y VA', es: $\varphi = \dfrac{2\pi R}{\frac{2\pi g}{360}} \cdot \dfrac{10}{360} = 5\sqrt{2}$. Por tanto, las coordenadas de A' son:
$x = g'\sin\varphi = \dfrac{10\cos 50º}{\sin 45º}\sin(5\sqrt{2}) = 1,119030327$,
$y = g - g'\cos\varphi = 10\sqrt{2}\left[\cos 40º - \cos 50º\cos(5\sqrt{2})\right] = 1,812254309$.

P 33- En un triángulo isósceles ABC, en el que $b = c$, se conocen a y la bisectriz w del ángulo B. Calcular $\dfrac{B}{2}$.

Solución: La bisectriz w corta al lado b en W. En el triángulo BWC, se tiene: $BC = a$, $BW = w$, $\widehat{CBW} = \theta = \dfrac{B}{2}$, $\widehat{BCW} = 2\theta$, $\widehat{BWC} = 180º - 3\theta$, $\dfrac{a}{\sin 3\theta} = \dfrac{w}{\sin 2\theta}$. Luego se tiene la siguiente expresión: $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta} = \dfrac{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{3 - 4\sin^2\theta}{2\cos\theta} = \dfrac{-1 + 4\cos^2\theta}{2\cos\theta} = \dfrac{a}{w} = k$, obteniéndose la ecuación: $4\cos^2\theta - 2k\cos\theta - 1 = 0$, de donde: $\cos\theta = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{4}$. El ángulo $\dfrac{B}{2}$ viene dado por: $\arccos\dfrac{\frac{a}{w} \pm \sqrt{(\frac{a}{w})^2 + 4}}{4}$. Como $\dfrac{B}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\theta > 0$. Pero como $k < \sqrt{k^2 + 4}$, la ecuación tiene siempre una raíz negativa que, por tanto, no es válida. Por otra parte, la raíz positiva ha de ser ≤ 1, para lo cual: $\dfrac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{4} \leq 1$, es decir, $k = \dfrac{a}{w} \leq \dfrac{3}{2}$, $2a \leq 3w$.

P 34- Se da un punto P en el interior de un ángulo AVB, situado a una distancia d de su vértice V. Calcular el radio R de la circunferencia que pasa por P y es tangente a los dos lados del ángulo, en función de d y de los ángulos α y β que VP forma con los lados del ángulo. Aplicar la solución al caso: $d = 12,47$, $\alpha = 15º13'12''$, $\beta = 27º15'03''$.

Solución:



El centro O de la circunferencia está sobre la bisectriz de $\widehat{AVB}$. Sea T el punto de tangencia con el lado VA del ángulo. En el triángulo VOT, se tiene que: $\widehat{OVT} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\widehat{OTV} = 90º$, $OV = \dfrac{R}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$. En el triángulo VOP, se tiene que: $\widehat{OVP} = \dfrac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$, planteándose la ecuación: $R^2 = \dfrac{R^2}{\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}} + d^2 - 2\dfrac{R}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}} d\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}$. Operando y simplificando, se tiene la ecuación: $R^2\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2} - 2dR\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2} + d^2\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 0$, cuya solución es: $R = \dfrac{d\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2} \pm \sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\right)}{\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$. Para el caso dado, se obtienen para R los valores: $6,97244717$ y $3,36760696$. Siempre hay dos valores de R, puesto que al ser $\alpha+\beta < 180º$, tanto el valor de $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ como el de $\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ son positivos, siendo además, $\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2} > \sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$, pues elevando al cuadrado y operando, se obtiene: $\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2} < 1$, es decir, $\alpha+\beta < 180º$, lo que se cumple siempre.

P 35- Resolver un triángulo conociendo un lado a, el ángulo opuesto A, y la suma s de la altura h correspondiente al lado a, más la diferencia de los otros dos lados b y c, es decir, $s = h+b-c$. Aplicar la solución al caso: $a = 438,275\,\text{m}$, $A = 86º30'24''$, $s = 291,946\,\text{m}$.

Solución: $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos A) = (b-c)^2 + \dfrac{2ah(1-\cos A)}{\sin A} =$ $= (s-h)^2 + 2ah\tan\dfrac{A}{2}$, Operando, se obtiene la ecuación: $h^2 + 2h(a\tan\dfrac{A}{2} - s) + s^2 - a^2 = 0$, cuya solución es: $h = s - a\tan\dfrac{A}{2} \pm \sqrt{a^2\tan^2\dfrac{A}{2} - 2as\tan\dfrac{A}{2} + a^2}$. Conocido h, se conoce: $b-c = s-h$, y $bc = \dfrac{ah}{\sin A}$, de donde se obtienen los valores de b y c. Para el caso dado, se obtiene: $h = 227,958$, $b = 349,984$, $c = 285,996$, $B = 52º50'02''98$, $C = 40º38'33''02$. En general, para que haya solución, debe cumplirse: $a^2\tan^2\dfrac{A}{2} - 2as\tan\dfrac{A}{2} + a^2 \geq 0$, es decir, haciendo: $k = \dfrac{s}{a}$, $\tan^2\dfrac{A}{2} - 2k\tan\dfrac{A}{2} + 1 = (\tan\dfrac{A}{2} - k - \sqrt{k^2-1})(\tan\dfrac{A}{2} - k + \sqrt{k^2-1}) \geq 0$. Luego: $k \geq 1$, $\tan\dfrac{A}{2} \geq k + \sqrt{k^2-1}$, o bien: $\tan\dfrac{A}{2} \leq k - \sqrt{k^2-1}$. Además, como: $\dfrac{h}{a} = k - \tan\dfrac{A}{2} \pm \sqrt{\tan^2\dfrac{A}{2} - k\tan\dfrac{A}{2} + 1}$, para $k > \tan\dfrac{A}{2}$, hay dos soluciones válidas, y para $k \leq \tan\dfrac{A}{2}$, hay una solución válida.

P 36- Calcular la diagonal BD de un cuadrilátero $ABCD$, del que se conoce la diagonal $AC = 200,27\,\text{m}$, $\widehat{BAC} = 80º05'20''$, $\widehat{DAC} = 84º10'04''$, $\widehat{ACB} = 57º40'05''$, $\widehat{ACD} = 71º01'02''$.

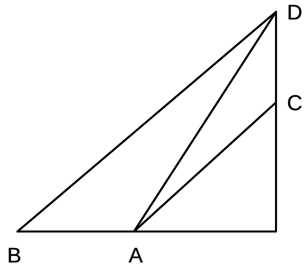
Solución: En el triángulo ABC se tiene: $\widehat{ABC} = 180 - 80º05'20'' - 57º40'05'' = 42º14'35''$, $AB = \dfrac{200,27\sin 57º40'05''}{\sin 42º14'35''} = 251,7130216$. En el triángulo ACD, se tiene: $\widehat{ADC} = 180º - 84º10'04'' - 71º01'02'' = 24º48'54''$, $AD = \dfrac{200,27\sin 71º01'02''}{\sin 24º48'54''} = 451,234768$. En el triángulo ABD, se tiene: $\widehat{BAD} = 80º05'20'' + 84º10'04'' = 164º15'24''$, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cos 164º15'24'' = 485613,9743$, $BD = 696,8600823$.

P 37- Resolver un triángulo conociendo $r_a = 10,5$, $r_b = 14$, $r_c = 12$.

Solución: $r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = 441$, $r_ar_br_c = 1764$, $r = \dfrac{1764}{441} = 4$, $p = \sqrt{441} = 21$, $a = \dfrac{p(r_a-r)}{r_a} = 13$, $b = 15$, $c = 14$, $\cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{p}{r_a} = 2$, $A = 53º07'48''37$, $B = 67º22'48''49$, $C = 59º29'23''14$.

P 38- Se eligen dos puntos A y B del terreno, situados al mismo nivel, siendo $AB = 10\,\text{m}$. Ambos puntos están situados en un mismo plano vertical que pasa por un pararrayos. Desde A, se dirigen visuales al pie C y a la punta D del pararrayos, cuyos ángulos de elevación son respectivamente, $28º26'$ y $50º58'$. Desde B se dirige otra visual a D, siendo su ángulo de elevación de $38º04'$. Calcular la longitud CD del pararrayos.

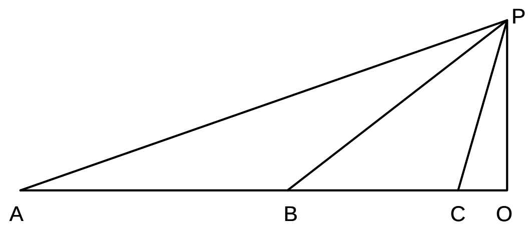
Solución:



En el triángulo ABD, se tiene: $\widehat{ABD} = 38º04'$, $\widehat{BAD} = 180º - 50º58' = 129º02'$, $\widehat{ADB} = 12º54'$, $AD = \dfrac{10 \sin 38º04'}{\sin 12º54'}$. En el triángulo ACD, se conocen los siguientes ángulos: $\widehat{CAD} = 50º58' - 28º26' = 22º32'$, $\widehat{DCA} = 90º + 28º26' = 118º26'$, por lo que el lado CD es: $CD = \dfrac{AD \sin 22º32'}{\sin 118º26'} = \dfrac{10 \sin 38º04' \sin 22º32'}{\sin 12º54' \sin 118º26'} = 12,0357\,\mathrm{m}$.

P 39- Se observa una torre (de base O y extremo superior P), desde tres puntos conocidos A, B, C, situados sobre una misma recta horizontal que pasa por el pie de la torre. Siendo A el más lejano de los tres, el ángulo de elevación de la visual AP es θ. Desde el punto intermedio B, el ángulo de elevación de la visual BP es 2θ. Y el ángulo de elevación de la visual CP es 3θ (C es el punto más cercano a la torre). La distancia AB es a, y la distancia BC es b. Hallar en función de a y b, la altura h de la torre y la distancia $c = OC$.

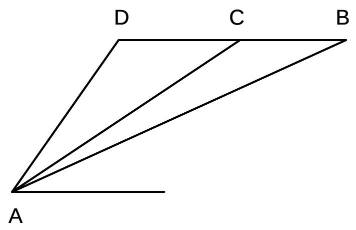
Solución:



En el triángulo ABP, se tiene: $\widehat{PAB} = \theta$, $\widehat{ABP} = 180º - 2\theta$, $\widehat{APB} = \theta$, $BA = BP = a$, $AP = 2a\cos\theta$. En el triángulo BCP, se tiene: $\widehat{PBC} = 2\theta$, $\widehat{BCP} = 180º - 3\theta$, $\widehat{BPC} = \theta$, $BC = b$, $BP = a$, planteándose: $\dfrac{b}{\sin\theta} = \dfrac{PC}{\sin 2\theta} = \dfrac{a}{\sin 3\theta}$, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = 3 - 4\sin^2\theta$, $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{3b-a}{4b}}$, $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{b+a}{4b}}$, $PC = \dfrac{b \sin 2\theta}{\sin\theta} = 2b\cos\theta = \sqrt{b(a+b)}$. En el triángulo COP, se conocen: $\widehat{COP} = 90º$, $\widehat{OCP} = 3\theta$, $PC = \sqrt{b(a+b)}$. Por tanto, los lados OP y OC vienen dados por las expresiones: $OP = h = \sqrt{b(a+b)}\,\sin 3\theta = \sqrt{b(a+b)}\,\sin\theta(3 - 4\sin^2\theta) = \dfrac{a\sqrt{(a+b)((3b-a)}}{2b}$, $OC = c = \sqrt{b(a+b)}\,\cos 3\theta = \sqrt{b(a+b)}\,\cos\theta(4\cos^2\theta - 3) = \dfrac{(a+b)(a-2b)}{2b}$.

P 40- Desde un puesto de vigilancia A, se avistó un avión que se acercaba a altura constante con velocidad $300\,\mathrm{km/h}$. En un momento determinado, el avión estaba en B, siendo el ángulo de elevación de la visual AB, $40º23'$. Medio minuto más tarde, el avión estaba en C, siendo el ángulo de elevación de la visual AC, $55º45'$. Medio minuto más tarde, el avión se encontraba en D. Hallar la altura h a la que volaba y la distancia AD.

Solución:



En el triángulo *ABC*, se tiene: $\widehat{ABC} = 40º23'$, $\widehat{BAC} = 55º45' - 40º23' = 15º22'$, $BC = \dfrac{300}{120} = 2,5\,\text{km}$, $AC = \dfrac{2,5\sin 40º23'}{\sin 15º22'} = 6,11236\,\text{km}$. En el triángulo *ACD*, se tiene: $\widehat{ACD} = 55º45'$, $AC = 6,11236\,\text{km}$, $CD = 2,5\,\text{km}$, $h = 6,11236\sin 55º45' = 5,05241\,\text{km}$, $AD^2 = 6,11236^2 + 2,5^2 - 2 \cdot 6,11236 \cdot 2,5\cos 55º45' = 26,410613$, $AD = 5,13913\,\text{km}$.

P 41- Calcular las alturas de un triángulo en función del perímetro y los ángulos.

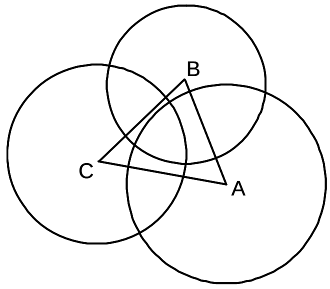
Solución: $h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p - a = r\cot\dfrac{A}{2} = p\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}\cot\dfrac{A}{2} = p\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$, de donde: $a = p\left(1 - \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}\right)$. Introduciendo estos valores en la fórmula de la altura: $h_a = \dfrac{2}{p\left(1-\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}\right)}\sqrt{pp\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}p\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}p\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}} = \dfrac{2p\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}}{1-\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}}$, $h_b = \dfrac{2p\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}}{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}}$, $h_c = \dfrac{2p\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}}{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}}$.

P 42- En el cuadrilátero *ABCD* (en el sentido de las agujas del reloj), se conoce: $AD = 2150\,\text{m}$, $AB = 1940\,\text{m}$, $\widehat{BAD} = 164º47'12''$, $\widehat{ACD} = 59º55'52''$, $\widehat{ACB} = 38º52'56''$. Calcular *AC*, *CD*, *CB*, $\widehat{ADC}$, $\widehat{ABC}$, y la superficie *S* del cuadrilátero.

Solución: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 164º47'12'' + \widehat{B} + 59º55'52'' + 38º52'56'' + \widehat{D} = 360º$. De donde: $\widehat{B} + \widehat{D} = 96º24'$. En el triángulo *ABC*, se tiene: $AC = \dfrac{1940\sin\widehat{B}}{\sin 38º52'56''}$. En el triángulo *ACD*, se tiene: $AC = \dfrac{2150\sin(96º24' - \widehat{B})}{\sin 59º55'52''}$. Por lo tanto: $\dfrac{1940\sin 59º55'52''\sin\widehat{B}}{2150\sin 38º52'56''} = \sin(96º24' - \widehat{B}) = \sin 96º24'\cos\widehat{B} - \cos 96º24'\sin\widehat{B}$. Luego: $\left(\dfrac{1940\sin 59º55'52''}{2150\sin 38º52'56''} + \cos 96º24'\right)\tan\widehat{B} = \sin 96º24'$, $\tan\widehat{B} = 0,8774650137$, $\widehat{B} = 41º15'56''95$, $\widehat{D} = 55º08'03''05$. En el triángulo *ABC*, se tienen los valores: $\widehat{BAC} = 180º - 41º15'56''95 - 38º52'56'' = 99º51'07''05$, $AC = \dfrac{1940\sin 41º15'56''95}{\sin 38º52'56''} = 2038,3776\,\text{m}$, $BC = \dfrac{1940\sin 99º51'07''05}{\sin 38º52'56''} = 3044,9665\,\text{m}$. En el triángulo *ACD*, se tiene: $\widehat{CAD} = 164º47'12'' - 99º51'07''05 = 64º56'04''95$, $CD = \dfrac{2150\sin 64º56'04''95}{\sin 59º55'52''} = 2250,372\,\text{m}$. De todo ello se deduce que la superficie del cuadrilátero *ABCD* es la siguiente: $S = \dfrac{2038,3776}{2}(2250,372\sin 59º55'52'' + 3044,9665\sin 38º52'56'') = 3.932.964,03\,\text{m}^2$.

P 43- Los lados del triángulo *ABC* miden: $a = 12$, $b = 16$, $c = 14$. Con centro en cada uno de los tres vértices, se trazan tres circunferencias de radios: 11, la de centro *A*; 9, la de centro *B*; 10, la de centro *C*. Estas circunferencias forman un triángulo curvilíneo *MNP* (*M* corresponde a las circunferencias de centros *B* y *C*; *N* a las de centros *C* y *A*; *P* a las de centros *A* y *B*). Hallar las longitudes de sus tres lados.

Solución:



Aplicando las fórmulas $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, y sus análogas, se tiene que los ángulos de ABC, son: $A = 46º56746344$, $B = 75º52248782$, $C = 57º91004874$. Análogamente, en el triángulo BCM, de lados: 12, 9, 10, se obtienen los ángulos: $\widehat{MBC} = 54º64058038$, $\widehat{MCB} = 47º22144229$. En el CAN, de lados: 16, 10, 11, $\widehat{NCA} = 42º74556922$, $\widehat{NAC} = 38º10029749$. En el ABP, de lados: 14, 11, 9, $\widehat{PAB} = 39º98312145$, $\widehat{PBA} = 51º75338012$. Luego el arco curvilíneo MN, de centro C y radio 10, tiene una longitud: $\frac{2\pi 10(47º22144229 + 42º74556922 - 57º91004874)}{360} = 5,595$. Procediendo similarmente con los otros dos arcos, se tienen sus longitudes: $MP = 4,849$, $NP = 6,051$.

P 44- Resolver el cuadrilátero $ABCD$ (en el sentido de las agujas del reloj), del que se conocen: $AB = 59,09$, $BC = 37,58$, $\widehat{A} = 82º10'20''$, $\widehat{B} = 104º32'37''$, $\widehat{C} = 88º56'10''$.

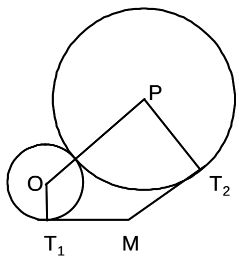
Solución: $\widehat{D} = 84º20'53''$, $CD = 63,2416$, $DA = 51,5983$.

P 45- Hallar el área S del triángulo ABC del que se conoce su lado $a = 35,42\,\text{m}$ y sus ángulos $\widehat{B} = 48º52'13''$, $\widehat{C} = 75º18'25''$.

Solución: $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C)} = 552,4407\,\text{m}^2$.

P 46- Dos alineaciones MT_1 y MT_2 forman un ángulo de 120º, siendo $MT_1 = 100$ y $MT_2 = 120$. En el interior de este ángulo, se traza una circunferencia con centro O y radio 40, tangente en T_1 a MT_1. Hallar el radio de una circunferencia, situada también en el interior del ángulo citado, que sea tangente a la circunferencia de centro O y a la alineación MT_2 en el punto T_2.

Solución:



En el triángulo rectángulo MT_1O, se tiene que: $\widehat{T_1MO} = \arctan\frac{40}{100} = 21º80140949$, $OM = \frac{40}{\sin 21º80140949} = 107,7032961$. En el triángulo OMT_2, se conoce el ángulo $\widehat{OMT_2} = 120º - 21º80140949 = 98º19859051$, $OT_2 = 172,2967095$, $\widehat{MT_2O} = 38º22234982$. Siendo P el centro del círculo buscado de radio R, se tiene en el triángulo OPT_2 : $\widehat{OT_2P} = 51º77765018$, $(40+R)^2 = R^2 + 172,2967095^2 - 2R172,2967095\cos 51º77765018$. De donde: $R = \frac{172,2967095^2 - 1600}{80 + 2 \cdot 172,2967095\cos 51º77765018} = 95,79$.

P 47- Resolver un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa a, y la bisectriz w del ángulo recto.

Aplicar la solución al caso $a = 55,\ w = 22$.

Solución: Siendo D el punto de corte de la bisectriz con la hipotenusa BC, se tiene en el triángulo ADC que: $DC = \dfrac{w\sin 45º}{\sin C}$. En el triángulo ADB, se tiene: $DB = \dfrac{w\sin 45º}{\sin B}$. Luego: $DC + DB = a = w\sin 45º\left(\dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\cos B}\right)$. Elevando al cuadrado y operando: $a^2\sin^2 2B - 2w^2\sin 2B - 2w^2 = 0$, $\sin 2B = \dfrac{w^2 \pm w\sqrt{w^2 + 2a^2}}{a^2}$. Haciendo $m = \dfrac{w}{a}$, se tiene: $\sin 2B = m^2 \pm m\sqrt{m^2 + 2}$. Como $\sin 2B > 0$, sólo es válida la solución $\sin 2B = m^2 + m\sqrt{m^2 + 2} \leq 1$, para la que $m \leq 0,5$, luego siempre ha de cumplirse que $w \leq 0,5a$. Para el caso dado: $\sin 2B = 0,7478775384$, $B = 24º2034283 = 24º12'12''34$, $C = 65º47'47''66$, $b = 22,540$, $c = 50,165$.

P 48- Resolver un triángulo rectángulo conociendo el cateto c y $\tan\theta$, siendo θ el ángulo formado por la hipotenusa y la mediana del cateto b. Aplicar la solución al caso $c = 3,164$, $\tan\theta = \dfrac{1}{3}$.

Solución: Sea M el punto medio del cateto AC, sea $\theta = \widehat{MBC}$, y sea $\varphi = \widehat{ABM}$. Se tiene: $\tan\varphi = \dfrac{b}{2c}$, $\tan(\varphi + \theta) = \dfrac{b}{c}$, luego: $2\tan\varphi = \tan(\varphi + \theta) = \dfrac{\tan\varphi + \tan\theta}{1 - \tan\varphi\tan\theta}$, de donde se obtiene: $2\tan\theta\tan^2\varphi - \tan\varphi + \tan\theta = 0$. Luego: $\tan\varphi = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 8\tan^2\theta}}{4\tan\theta}$. Para que el discriminante sea ≥ 0, $\tan^2\theta \leq \dfrac{1}{8}$, $\theta \leq 19º47122063 = 19º28'16''39$. Conocido el valor de φ, se obtiene $B = \varphi + \theta$, resolviéndose fácilmente el triángulo. Para el caso dado, el discriminante es positivo, obteniéndose para $\tan\varphi$ los valores: 1 y $0,5$; para φ se tienen los valores: 45º y $26º56505118$, respectivamente. Luego, $B = \theta + \varphi$, toma los valores $63º43495$ y 45º. Para $B = 45º = C$, los lados miden: $b = c = 3,164$, $a = 4,4746$. Para $B = 63º43495$, $C = 26º56505$, $a = 7,0749$, $b = 6,328$.

P 49- En un cuadrilátero inscriptible $ABCD$ (en el sentido de las agujas del reloj), se conocen: $\widehat{B} = 87º38'$, $AB = a = 713\,\text{m}$, $BC = b = 557\,\text{m}$, $DA - CD = d - c = 50\,\text{m}$. Calcular c, d, $\widehat{A}$, el radio R de la circunferencia circunscrita, y la superficie S del cuadrilátero.

Solución: Por ser inscriptible, el ángulo mide: $\widehat{D} = 180º - \widehat{B} = 92º22'$. En el triángulo ABC, se tiene: $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 87º38' = 785818,6168$. En el triángulo ACD, se tiene: $AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos 92º22' = c^2 + (c+50)^2 - 2c(c+50)\cos 92º22'$. Igualando ambos valores de AC^2, se obtiene: $c = 588,8015657\,\text{m}$, $d = 638,8015657\,\text{m}$. En el triángulo ABC, se tiene: $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{b\sin 87º38'}{AC} = 0,6278030732$, siendo: $\widehat{BAC} = 38º88822261$, $\widehat{BCA} = 53º47844406$. Procediendo de la misma forma en el triángulo ACD, se obtienen los siguientes valores: $\widehat{CAD} = 41º5786178$, $\widehat{ACD} = 46º05471553$. Por tanto: $A = 80º46684041 = 80º28'00''63$. La superficie del cuadrilátero mide: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = 386.304,39\,\text{m}^2$ y el radio de la circunferencia circunscrita: $R = \dfrac{\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}}{4S} = 443,611\,\text{m}$.

P 50- En una triangulación geodésica, se ha medido una base $BC = 40\,\text{km}$ y desde sus extremos se han medido los ángulos azimutales a un punto A. Resolver el triángulo ABC y hallar su área. La orientación de BC es $112º34'42''$, la de BA, $55º14'32''$, y la de CA, $29º40'36''$.

Solución: Los ángulos del triángulo ABC, son: $A = 55º14'32'' - 29º40'36'' = 25º33'56''$, $B = 112º34'42'' - 55º14'32'' = 57º20'10''$, $C = 180º - (112º34'42'' - 29º40'36'') = 97º05'54''$. Los lados miden: $AB = \dfrac{40\sin 97º05'54''}{\sin 25º33'56''} = 91,9801\,\text{km}$, $AC = \dfrac{40\sin 57º20'10''}{\sin 25º33'56''} = 78,0316\,\text{km}$. El área del triángulo mide: $\dfrac{78,0316 \cdot 91,9801\sin 25º33'56''}{2} = 1.548,6704\,\text{km}^2$.

Sección Q - TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Q 1- Resolver un triángulo esférico del que se conocen: $A = 73º51'42''$, $a = 81º45'50''2$, $b = 105º07'54''$, siendo $B > 90º$.

Solución: $B = \arcsin\left(\dfrac{\sin b\ \sin A}{\sin a}\right) = 110º45422948 = 110º27'15''23$, pues $B > 90º$. Se tiene que: $C = 2\arctan\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}\ \tan\frac{A+B}{2}} = 63º03'54''21$, $c = 2\arctan\dfrac{\tan\frac{a+b}{2}\ \cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} =$ $= 66º42'39''65$.

Q 2- Resolver un triángulo esférico del que se conocen: $A = 73º51'42''$, $b = 81º45'50''2$, $a = 105º07'54''$.

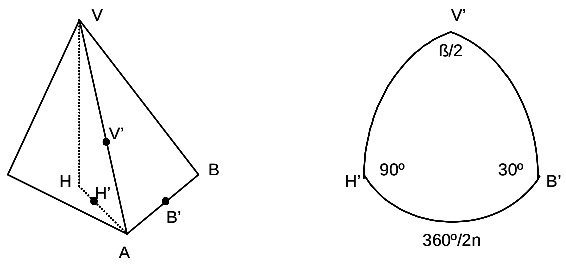
Solución: $a+b > 180º$, luego $A+B > 180º$. Como $a > b$, ha de ser $A > B$. Como $A < 90º$, tiene que ser $B < 90º$, no cumpliéndose que $A+B > 180º$. Luego no hay solución.

Q 3- De un paralelepípedo oblicuo se conocen las aristas $AB = 6$, $AC = 4$, $AD = 10$, y los ángulos $\widehat{CAB} = 48º51'52''4$, $\widehat{DAB} = 105º37'45''4$, y el diedro de arista AB, $\theta = 75º43'50''2$. Hallar el volumen del paralelepípedo.

Solución: El volumen del paralelepípedo es: $V = 2\alpha\beta\gamma\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}$, donde α, β, γ son las aristas que concurren en A, y a, b, c son los lados del triángulo esférico que los tres planos del triedro de vértice A, determinan en una esfera de centro A. De estos tres ángulos, se conocen dos ($\widehat{CAB}$ y $\widehat{DAB}$), y el ángulo θ que éstos forman. Por tanto, se tiene que: $\widehat{CAD} = \arccos(\cos 48º51'52''4\cos 105º37'45''4 + \sin 48º51'52''\sin 105º37'45''4\cos 75º43'50''2) =$ $= 89º54'41''39$. Luego el volumen del paralelepípedo viene dado por: $V = 2\cdot 6\cdot 4\cdot 10\sqrt{\sin 122º12'09''59\sin 73º20'17''19\sin 16º34'24''19\sin 32º17'28''21} = 168,7035$.

Q 4- En una pirámide regular, el ángulo de dos caras contiguas es $145º49'03''74$, y el de cada cara lateral con la base, $30º$. Hallar el número n de caras laterales de la pirámide. .

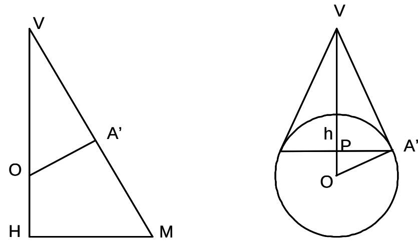
Solución:



Sea la pirámide $V,ABC\ldots$ y sea H la proyección de V sobre la base $ABC\ldots$. Con centro en el vértice A, se traza una esfera de radio unidad, por ejemplo. Los planos VAH, VAB (cara de la pirámide) y ABH (base de la pirámide), determinan en la esfera, un triángulo esférico $V'H'B'$ (intersecciones respectivamente, de AV, AH y AB con la superficie esférica), Se conocen los tres ángulos de este triángulo: $V' = \dfrac{\beta}{2}$ (el plano AVH es bisectriz del diedro de arista AV, que mide $\beta = 145º49'03''74$), $H' = 90º$ (los planos VAH y ABH son perpendiculares entre sí) y $B' = 30º$ (los planos VAB y ABH forman un ángulo de 30º). Además, el lado $H'B'$ (opuesto al ángulo V'), al ser la mitad del ángulo de un vértice de la base, mide $\dfrac{360º}{2n}$. Luego en el triángulo esférico rectángulo $V'H'B'$, se plantea la ecuación: $\cos\dfrac{145º49'03''74}{2} = \sin 30º\sin\dfrac{180º}{n}$. De donde, $n = 5$.

Q 5- En una pirámide pentagonal regular $V,ABCDE$, en la que el ángulo de dos caras contiguas es $145º49'03''74$, y el de cada cara lateral con la base mide $30º$, se inscribe una esfera. Hallar la relación entre el área del polígono esférico (cuyos lados son arcos de círculo máximo) que tiene por vértices los puntos de tangencia de la esfera con las caras laterales de la pirámide, y el área del casquete esférico de base el círculo menor que pasa por esos puntos.

Solución:



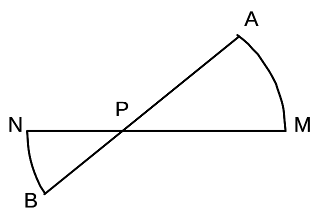
Sean $A'B'C'D'E'$, los puntos de tangencia de la esfera de centro O y radio R, inscrita en la pirámide, con las caras laterales de ésta. El área de un polígono esférico es: $S_P = \left(\frac{\sum A}{90^{\circ}} - 2(n-2)\right)\frac{\pi R^2}{2}$, donde $\sum A$ es la suma de los ángulos del polígono y $\frac{\pi R^2}{2}$ es la superficie de un octante de una esfera de radio R (el octante está sustentado por un triedro trirrectángulo cuyo vértice es el centro de la esfera). En el triángulo esférico $A'OB'$, se sabe que el ángulo $O = \frac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ}$, que los ángulos A' y B' son iguales entre sí, e iguales a la mitad de un ángulo del polígono esférico, y que el lado $A'B'$, al ser $A'O$ y $B'O$ perpendiculares a dos caras contiguas de la pirámide, mide: $180^{\circ} - 145^{\circ}49'03''74 = 34^{\circ}10'56''26$. Por tanto, se tiene que los ángulos A' y B' miden: $A' = B' = \arcsin\frac{\cos 36^{\circ}}{\cos\frac{34^{\circ}10'56''26}{2}} = 57^{\circ}8217218$. Luego: $S_P = \left(\frac{2 \cdot 5 \cdot 57^{\circ}8217218}{90} - 6\right)\frac{\pi R^2}{2} = 0,21231788\ \pi R^2$. El área del casquete esférico es: $S_C = 2\pi Rh$, donde h es la altura del casquete. En el triángulo $VA'O$, el ángulo V mide 60°, por ser el complementario del ángulo de 30° que $VA'M$ (M es el punto medio de AB) forma con MH (H es la proyección de V sobre la base $ABCDE$), es decir, con la base de la pirámide. Siendo P el centro de la base del casquete, se tiene: $\widehat{PA'O} = 60^{\circ}$, $OP = R - h$, $OA' = R$. Por tanto, se tienen los siguientes valores: $\sin 60^{\circ} = \frac{R-h}{R}$, $h = R(1-\sin 60^{\circ})$, $S_C = 2\pi R^2(1-\sin 60^{\circ}) = 0,26794919$ πR^2. La relación pedida es: $\frac{0,21231788\ \pi R^2}{0,26794919\ \pi R^2} = 0,79238$.

Q 6- Calcular el radio R del círculo circunscrito al triángulo esférico ABC, en función de los lados: $a = 73^{\circ}25'$, $b = 52^{\circ}42'$, $c = 58^{\circ}59'22''$.

Solución: Se aplican las fórmulas: $\tan R = \sqrt{\frac{\sin E}{\sin(A-E)\ \sin(B-E)\ \sin(C-E)}}$, donde E es la mitad del exceso esférico $2E = A+B+C-180^{\circ}$, $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\ \sin(p-c)}{\sin p\ \sin(p-a)}}$, y donde p es la mitad del perímetro $2p = a+b+c$. Operando, se obtienen los siguientes valores de sus ángulos: $A = 92^{\circ}25224598$, $B = 56^{\circ}03258784$, $C = 63^{\circ}32637414$. Luego el exceso esférico mide: $E = 15^{\circ}80560395$. El radio del círculo circunscrito mide: $R = 37^{\circ}48681992 = 37^{\circ}29'12''55$.

Q 7- Determinar la longitud geográfica del punto P en que corta al ecuador, el arco de círculo máximo que une los puntos: $A(42^{\circ}E, 64^{\circ}N)$ y $B(50^{\circ}O, 30^{\circ}S)$.

Solución:



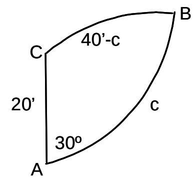
Sea M el punto en que el meridiano que pasa por A, corta al ecuador, y N el punto en que el meridiano de B lo hace. En el triángulo rectángulo AMP se tiene: $M = 90º$, $P = \theta$, $PM = x$. En el BNP, se tiene: $N = 90º$, $P = \theta$, $PN = 92º - x$. Luego, $\tan P = \frac{\tan 64º}{\sin x} = \frac{\tan 30º}{\sin(92º - x)}$. De donde se tiene: $\tan x = \frac{\tan 64º \sin 92º}{\tan 30º + \tan 64º \cos 92º}$, $x = 76º13410279$, $92º - x = 15º86589721$. Luego la longitud de P es: $50º - 15º86589721 = 34º13410279 = 34º08'02''77O$.

Q 8- Resolver el triángulo esférico ABC, del que se conocen los tres ángulos: $A = 79º13'42''6$, $B = 85º56'08''7$, $C = 64º11'55''9$.

Solución: Se utilizan las fórmulas: $\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin E \sin(A - E)}{\sin B \sin C}}$ y análogas, donde E es la mitad del exceso esférico $2E = A + B + C - 180º$, es decir: $E = 74º40'53''6$. Operando, se obtienen los siguientes valores de sus lados: $a = 64º05'14''36$, $b = 114º02'08''94$, $c = 165º33'46''75$.

Q 9- Una escuadra navega con rumbo Norte a la velocidad de 10 nudos. En un momento dado, un barco observador abandona la escuadra tomando rumbo Norte 30º Este, con una velocidad de 20 nudos. ¿A qué distancia del punto de separación, este barco debe cambiar de rumbo y qué rumbo debe tomar para integrarse de nuevo a la escuadra al cabo de dos horas de navegación en solitario?

Solución:



Sea A el punto en el que se separa el barco observador, B el punto en que este cambia de rumbo, y C el punto en que se reintegra a la escuadra. En el triángulo esférico ABC, se tiene: $A = 30º$, $AB = c$, $BC = 0º40' - c$, $AC = 0º20'$, puesto que 1 nudo = 1 milla por hora, y 1 milla = $1'$ de círculo máximo. Luego se tiene: $c = \arctan\frac{\cos 20' - \cos 40'}{\sin 40' - \sin 20' \cos 30º} = 0º26'27''34 = 26,4557$ millas, $a = 13'32''66$, $B = \arcsin\frac{\sin 20' \sin 30º}{\sin} = 47º35'16''67$. Luego el barco observador debe cambiar de rumbo cuando lleve recorridas en solitario $26,4557$ millas, y el nuevo rumbo será: $N(180º - 47º35'16''67 - 30º)O = N102º24'43''33O$.

Q 10- Resolver el triángulo esférico ABC, del que se conocen: $A = 90º15'32''$, $B = 35º06'17''$, $a = 61º05'15''$.

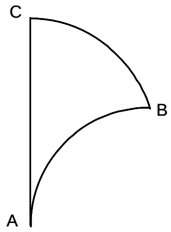
Solución: Los elementos buscados son: $b = \arcsin\frac{\sin 61º05'15'' \sin 35º06'17''}{\sin 90º15'32''} = 30º13'30''77$,
$c = 2\arctan\frac{\tan\frac{61º05'15'' + 30º13'30''77}{2}\cos\frac{90º15'32'' + 35º06'17''}{2}}{\cos\frac{90º15'32'' - 35º06'17''}{2}} = 55º49'30''86$, y el ángulo C que mide: $C = \arcsin\frac{\sin 55º49'30''86 \sin 35º06'17''}{\sin 30º13'30''77} = 70º55'48''12$.

Q 11- Resolver el triángulo esférico rectángulo ABC, del que se conocen: $A = 90º$, $a = 57º09'48''$, $B = 46º16'35''4$.

Solución: Los elementos buscados son: $b = \arcsin(\sin 57º09'48'' \sin 46º16'35''4) = 37º23'17''76$, $c = \arctan(\tan 57º09'48'' \cos 46º16'35''4) = 46º57'48''01$, y el ángulo C que viene dado por: $C = \operatorname{arccot}(\cos 57º09'48'' \tan 46º16'35''4) = 60º26'54''23$.

Q 12- Para efectuar un viaje alrededor del mundo, un dirigible parte de A (latitud $41º19'42''N$; longitud $16º28'24''E$), siguiendo un arco de círculo máximo que forma con el meridiano de A, un ángulo de $27º04'54''$. Hallar las coordenadas geográficas del punto más septentrional del recorrido, sabiendo que está más al Este que A.

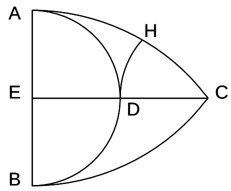
Solución:



Sea el triángulo esférico ABC, en el que A es el punto de partida, B es el punto más septentrional del recorrido, y C es el polo norte de la Tierra. En este triángulo se tiene: $A = 27º04'54''$, $B = 90º$, $b = 90º - 41º19'42'' = 48º40'18''$, obteniéndose el lado a por la siguiente fórmula: $a = \arcsin(\sin 48º40'18'' \sin 27º04'54'') = 19º59'27''46$, de donde la latitud más septentrional alcanzada es: $90º - 19º59'27''46 = 70º0'32''54N$. Además, el ángulo C se obtiene por la fórmula: $C = \arccos \frac{\tan 48º40'18''}{\tan 19º59'27''46} = 71º20'31''41$, de donde se tiene que la longitud de B es: $16º28'24'' + 71º20'31''41 = 87º48'55''41E$.

Q 13- El punto A tiene la misma longitud geográfica ($1^h24^m32,6^sO$) que el B, y sus latitudes son iguales ($24º42'44''2$), pero la del A es boreal y la del B es austral. El punto C está en el ecuador y su longitud es $4^h12^m24,5^sE$. Se quieren establecer líneas regulares de navegación entre estos tres puntos, para lo cual es preciso situar una base D de aprovisionamiento equidistante de los tres puntos. Determinar las coordenadas geográficas de D, así como su distancia a las tres rutas.

Solución:



Sea E el punto en que el meridiano AB cruza el ecuador. En el triángulo AEC se conocen: $E = 90º$, $AE = 24º42'44''2$, $EC = 15(4^h12^m24,5^s + 1^h24^m32,6^s) = 84º14'16''5$, obteniéndose: $AC = \arccos(\cos 24º42'44''2 \cos 84º14'16''5) = 84º46'01''79$. El ángulo C viene dado por la fórmula: $C = \arctan \frac{\tan 24º42'44''2}{\sin 84º46'01''79} = 24º49'21''65$. En el triángulo DCH (H es el pie de la altura trazada desde D sobre AC), se conocen los siguientes elementos: $H = 90º$, $C = 24º49'21''65$, $CH = \frac{AC}{2} = 42º23'0''89$, (pues el triángulo ADC es isósceles, y H es punto medio de AC), obteniéndose que: $DC = \arctan \frac{\tan 42º23'0''89}{\cos 24º49'21''65} = 45º09'25''32$, $DH = \arctan(\sin 42º23'0''89 \tan 24º49'21''65) = 17º19'02''46$. Las coordenadas geográficas de D se obtienen: latitud $0º$ (pues D está sobre el ecuador), longitud $17º56'42''18E$ ($= 84º14'16''5 - 45º09'25''32 - 15 \cdot 1^h24^m32,6^s$). La distancia de D a las rutas AC y BC es: $17º19'02''46$, y a la ruta AB, $39º04'51''18$ ($= 17º56'42''18 + 15 \cdot 1^h24^m32,6^s$).

Q 14- En una esfera de 4 m de radio, se tiene el triángulo esférico ABC, cuyo lado AB mide 3 m. Desde B y C como polos y con radio esférico igual a 1,5 m, se trazan dos arcos MD y ME, que rectificados miden 1 m y 2 m, respectivamente (M, D y E son los puntos de corte de a, c y b con los arcos trazados). Calcular los lados del triángulo ABC.

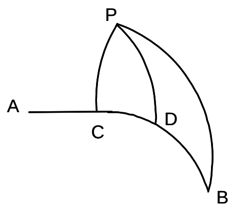
Solución: El lado BC mide: $a = \frac{3 \cdot 360}{2\pi 4} = 42º58'18''6$. El radio esférico 1,5 m equivale a: $\frac{a}{2} = 21º29'09''3$. El radio del correspondiente círculo menor, es: $r = 4 \ \sin 21º29'09''3 = \\ = 1,465090117$. Luego el ángulo al que corresponde el arco rectificado de 1 m, es: $\frac{360}{2\pi 1,465090117} = 39º06'26''43$, que es el ángulo B del triángulo. El ángulo $C = 2B = 78º12'52''86$. Por tanto, se conocen los elementos: a, B, C, obteniéndose los siguientes valores: $\dfrac{b+c}{2} = \arctan \dfrac{\tan\frac{a}{2}\ \cos\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{C+B}{2}} = 35º29'44''62,\ \ \dfrac{b-c}{2} = \arctan \dfrac{\tan\frac{a}{2}\ \sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{C+B}{2}} =$ $= 8º46'06''86$. Los lados del triángulo son: $a = 42º58'18''6,\ b = 44º15'51''48,\ c = 26º43'37''76$.

Q 15- Hallar la distancia entre Madrid y Málaga, siendo las coordenadas de Madrid: longitud 0º, latitud norte $40º24'30''$, y las de Málaga: longitud oeste $0º49'55''5$, latitud norte $36º43'12''9$.

Solución: En el triángulo A (polo norte), B (Málaga), C (Madrid), se conocen: $A = 0º49'55''5,\ c = 90º - 36º43'12''9 = 53º16'47''1,\ b = 90º - 40º24'30'' = 49º35'30''$. Luego la distancia entre Madrid y Málaga viene dada por la siguiente fórmula: $a = \dfrac{40.000}{360} \arccos(\cos 49º35'30'' \cos 54º16'47''1 + \sin 49º35'30 \sin 54º16'47''1 \cos 0º49'55''5) =$ $= 416,11\,\text{km}$.

Q 16- Un dirigible sale de A $(45º25'42''N; 3\,\text{h}\,4\,\text{min}\,52\,\text{s}\,E)$, dirigiéndose a B $(10º12'30''N; 8\,\text{h}\,43\,\text{min}\,18\,\text{s}\,E)$. Comienza el viaje a las 12 h del 29 de octubre, a 200 km/h. Al salir de A recorre 1.500 km sobre el paralelo de A, y desde el punto en que entonces se encuentra se dirige a B por círculo máximo. Hallar la situación del punto por donde pasa a las 9 h del 30 de octubre.

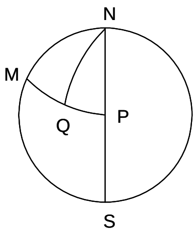
Solución:



Para facilitar los cálculos, se pasan las coordenadas geográficas, los arcos y los ángulos, a grados sexagesimales con sus decimales. Por tanto, las coordenadas de A y B son: A $(45º428\widehat{3}N, 46º21\widehat{6}E)$, B $(10º208\widehat{3}N, 130º825E)$. El dirigible recorre 1.500 km por el paralelo de A, cuyo radio es $r = R\ \cos 45º428\widehat{3} = \dfrac{20.000\ \cos 45º428\widehat{3}}{\pi} = 4.467,803057$ km, a los que corresponden $\dfrac{360 \cdot 1500}{2\pi 4467,803057} = 19º236226$, llegando al punto C, cuyas coordenadas son: latitud $.45º428\widehat{3}N$, longitud $46º21\widehat{6}E + 19º236226E = 65º45289266E$, a las 19,5 h del 29 de octubre. En el triángulo esférico CBP, siendo P el polo norte, se conocen los siguientes datos: $PC = 90º - 45º428\widehat{3} = 44º571\widehat{6},\ PB = 90º - 10º208\widehat{3} = 79º791\widehat{6}$, y el ángulo en el polo norte: $P = 130º825 - 65º45289265 = 65º37210735$. El lado CB viene dado por la siguiente fórmula: $CB = \arccos \cos 44º571\widehat{6} \cos 79º791\widehat{6} + \sin 44º571\widehat{6} \sin 79º791\widehat{6} \cos 65º37210735 =$ $= 65º53863348,\ C = \arcsin \dfrac{\sin 79º791\widehat{6}\ \sin 65º37210735}{\sin 65º53863348} = 100º6220615$. A partir del punto C, el dirigible recorre por círculo máximo, $13,5\,\text{h} \cdot 200\,\text{km/h} = 2700\,\text{km}$, hasta las 9 h del día 30 (lo que equivale a $\dfrac{2700 \cdot 360}{40.000} = 24º3$), alcanzando el punto D. En el triángulo esférico CPD, se conocen los elementos: $PC = 44º571\widehat{6}$, $C = 100º6220615$, $CD = 24º3$. Por tanto, $PD = \arccos\left(\cos 44º571\widehat{6} \cos 24º3 + \sin 44º571\widehat{6} \sin 24º3 \cos 100º6220615\right) = 53º4142925$, $P = \arcsin \dfrac{\sin 24º3\ \sin 100º6220615}{\sin 53º4142925} = 30º24581765$. Luego las coordenadas de D son: latitud, $90º - 53º4142925 = 36º5857075 = 36º35'08''55N$; longitud, $65º45289265E + 30º24581765E =$ $= 95º6987103E = 95º41'55''36E$.

Q 17- Un avión sale de Madrid $(40º24'30''N;\ 0\,\text{h}\,14\,\text{min}\,15,09\,\text{s}\,O)$, hacia un punto equidistante de Madrid y de los dos polos de la tierra, pero se ve obligado a aterrizar a los 2/3 de su camino hacia el este de Madrid. Hallar la posición del punto de aterrizaje.

Solución:



Las coordenadas de Madrid en grados sexagesimales con decimales, son: $40º408\widehat{3}N,\ 3º562875O$. En el triángulo esférico $MNP,$ en el que M es Madrid, N es el polo norte y P es el punto de destino, se conocen: $NP = MP = 90º$ (por ser P equidistante de los dos polos), $MN = 90º - 40º24'30'' = 49º591\widehat{6}$. Por tanto: $M = 90º$. En el triángulo $MNQ,$ siendo Q el punto de aterrizaje, se conocen: $MN = 49º591\widehat{6},\quad M = 90º,\quad MQ = \frac{2}{3}90º = 60º$. Por tanto: $NQ = \arccos\left(\cos 60º \cos 49º591\widehat{6}\right) = 71º08801399,\qquad N = \arctan\frac{\tan 60º}{\sin 49º591\widehat{6}} = 66º26875295.$

Por todo ello, se deducen las coordenadas de Q, punto de aterrizaje, cuyo cálculo es el siguiente:
latitud: $90º - 71º08801399 = 18º91198601 = 18º54'43''15N;$
longitud: $66º26875295 - 3º562875 = 62º7058795 = 62º42'21''16E.$

Q 18- Hallar la distancia en km de Madrid a Roma, siendo sus respectivas coordenadas geográficas $40º24'30''N;\ 3º41'16''6O$ las de Madrid, y $41º53'53''N; 12º28'46''5E$, las de Roma.

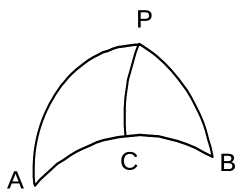
Solución: En el triángulo esférico $MPR,$ en el que P es el polo norte, M es Madrid y R es Roma, se conocen los elementos: $MP = 90º - 40º24'30'' = 49º591\widehat{6},\ RP = 90º - 41º53'53'' = 48º1029\widehat{4},$ $P = 3º41'16''6 + 12º28'46''5 = 16º16752\widehat{7}$. Para calcular MR se aplica la fórmula: $MR = \arccos\left(\cos 49º591\widehat{6} \cos 48º1029\widehat{4} + \sin 49º591\widehat{6} \sin 48º1029\widehat{4} \cos 16º16752\widehat{7}\right) =$ $= 12º24561723$. Luego la distancia pedida es: $\frac{12º24561723 \cdot 40000}{360} = 1360,62\,\text{km}.$

Q 19- Se da el triángulo esférico $a = 53º24',\ b = 42º36'40'',\ C = 82º0'30'',$ siendo el radio de la esfera $R = 6.366\,\text{km}$. Hallar la diferencia entre el lado c y la cuerda que subtiende.

Solución: El lado $c = \arccos(\cos 53º24' \cos 42º36'40'' + \sin 53º24' \sin 42º36'40'' \cos 82º0'30'') =$ $= 59º0448767,$ cuya longitud en km es: $\frac{2\pi 6366 \cdot 59º0448767}{360} = 6560,338$. La longitud de la cuerda que subtiende, es: $2 \cdot 6366\ \sin\frac{59º0448767}{2} = 6273,876$. Luego la diferencia pedida es: $286,462\,\text{km}.$

Q 20- Un dirigible sale de A el 16 de marzo a las siete de la mañana, con velocidad de $180\,\text{km/h},$ con rumbo $N\,82º42'E$. Llega a B con rumbo $N85º43'O,$ siendo la distancia entre A y B, de $8.472\,\text{km}$. El radio de la tierra es $6.366\,\text{km}$. Hallar la máxima latitud alcanzada y la hora en que pasa por ese punto.

Solución:



Sea P el polo norte y C el punto de máxima latitud. En el triángulo esférico APB se conocen los elementos: $A = 82º42',\quad B = 85º43',\quad AB = \frac{8472 \cdot 360}{2 \cdot 6366\pi} = 76º25036821$. Por tanto:

$$\frac{AP + PB}{2} = \arctan\frac{\tan\frac{76º25036821}{2}\cos\frac{85º43' - 82º42'}{2}}{\cos\frac{85º43' + 82º42'}{2}} = 82º67054774,$$

$$\frac{AP-PB}{2} = \arctan\frac{\tan\frac{76º25036821}{2}\ \sin\frac{85º43'-82º42'}{2}}{\sin\frac{85º43'+82º42'}{2}} = 1º18952061.$$

De donde: $AP = 83º86006835$, $PB = 81º48102713$. En el triángulo APC, se tiene: $C = 90º$, $AP = 83º86006835$, $A = 82º42'$. Se aplican las siguientes fórmulas: $PC = \arcsin(\sin 83º86006835 \sin 82º42') = 80º47191546$, $AC = \arctan\left(\tan 83º86006835\ \cos 82º42'\right) = 49º74842656$.
La latitud de C es: $90º - 80º47191546 = 9º52808454 = 9º31'41''1$. El tiempo que tarda en recorrer AC es: $\frac{2 \cdot 6366\pi \cdot 49,74842656}{360 \cdot 180} = 30,70795151\,\text{h}$, luego el dirigible llega a C a las $13,70795151\,\text{h}$, es decir, a las $13\,\text{h}\,42\,\text{min}\,28,6\,\text{s}$ del día 17 de marzo.

Q 21- Dos barcos parten de A, formando sus rumbos entre sí $42º30'55''$. En un instante dado, uno de ellos dista de A, $63º39'51''$, y el otro $75º0'57''$. Hallar la distancia que los separa, siendo el radio de la tierra $6.366\,\text{km}$.

Solución: En el triángulo ABC, en el que B y C son las posiciones de los barcos, se conocen: $A = 42º30'55''$, $AB = 63º39'51''$, $AC = 75º0'57''$. Para calcular el lado BC se aplica la siguiente fórmula: $BC = \arccos(\cos 63º39'51'' \cos 75º0'57'' + \sin 63º39'51'' \sin 75º0'57'' \cos 42º30'55'') = 41º09'48''96$, siendo esta distancia: $\frac{2 \cdot 6366\pi \cdot 41º09'48''96}{360} = 1.455,82\,\text{km}$.

Q 22- Un avión sale de A (latitud $38º44'N$; longitud $90º12'E$), en dirección SO. Su ruta corta el ecuador bajo un ángulo de $50º$. Determinar la longitud de este punto de corte y la distancia recorrida (radio de la tierra, $6.366\,\text{km}$).

Solución: Sea B el punto en el que el meridiano de A corta al ecuador, y C el punto de corte de la ruta con el ecuador. En el triángulo ABC, se conocen: $B = 90º$, $AB = 38º44'$, $C = 50º$. Por tanto: $AC = \arcsin\frac{\sin 38º44'}{\sin 50º} = 54º76462873$, $BC = \arcsin\frac{\tan 38º44'}{\tan 50º} = 42º18'09''74$. La longitud de C es: $90º12' - 42º18'09''74 = 47º53'50''26E$. La distancia recorrida viene dada por: $\frac{2 \cdot 6366\pi \cdot 54º76462873}{360} = 6084,77\,\text{km}$.

Q 23- Resolver el triángulo esférico ABC, del que se conocen: $a = 72º12'30''$, $b = 26º41'0''8$, $A = 60º26'29''5$.

Solución: El ángulo B viene dado por: $B = \arcsin\frac{\sin 26º41'0''8 \sin 60º26'29''5}{\sin 72º12'30''} = 24º13'11''33$. Se define θ como: $\theta = \arctan(\cos 26º41'0''8 \tan 60º26'29''5) = 57º59596719$, calculándose el ángulo C por: $C = \arcsin\frac{\tan 26º41'0''8 \sin 57º59596719}{\tan 72º12'30''} - 57º59596719 = 114º34'40''02$, y el lado c por: $c = \arcsin\frac{\sin 72º12'30'' \sin 114º34'40''02}{\sin 60º26'29''5} = 84º32'19''99$.

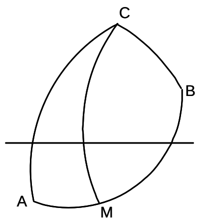
Q 24- Un buque sale del puerto de Sidney (latitud $33º51'2S$; longitud $151º12'8E$), y navegando a 15 nudos se dirige por arcos de círculo máximo, al puerto de San Francisco (latitud $37º48'5N$; longitud $122º35'6O$). A las 40,5 horas de haber salido este barco, otro zarpa de las islas Galápagos, situadas en el ecuador (longitud $91º30'O$), y navegando asimismo a 15 nudos, se dirige a las islas Molucas, situadas también en el ecuador, en la longitud $128ºE$. Se pide la distancia en millas entre ambos buques, cuando el primero cruce el ecuador.

Solución: Para facilitar los cálculos, se pasan las coordenadas geográficas, los arcos y los ángulos, a grados sexagesimales con sus decimales. Por tanto: Sidney (latitud $33º85\widehat{3}S$; $151º21\widehat{3}E$); San Francisco (latitud $37º808\widehat{3}N$; longitud $122º59\widehat{3}O$); Galápagos (latitud $0º$; longitud $91º5O$); Molucas (latitud $0º$; longitud $128ºE$). En el triángulo esférico ABC, en el que A es Sidney, B San Francisco y C el polo norte, se conocen dos lados y un ángulo: $AC = 90º + 33º85\widehat{3} = 123º85\widehat{3}$, $BC = 90º - 37º808\widehat{3} = 52º191\widehat{6}$, $C = 180º - 151º21\widehat{3} + 180º - 122º59\widehat{3} = 86º19\widehat{3}$. Por lo tanto, se obtiene que: $AB = \arccos(\cos 123º85\widehat{3} \cos 52º191\widehat{6} + \sin 123º85\widehat{3} \sin 52º191\widehat{6} \cos 86º19\widehat{3}) = 107º3336441$, $A = \arcsin\frac{\sin 52º191\widehat{6}\ \sin 86º19\widehat{3}}{\sin 107º3336441} = 55º67241254$. Sea D el punto en que AB corta al ecuador. En el triángulo ADC, se conocen: $AC = 123º85\widehat{3}$, $DC = 90º$, $A = 55º67241254$.

Para calcular C se aplica la fórmula: $C = \arctan\left(-\tan 55^{\circ}67241254 \cos 123^{\circ}85\widehat{3}\right) = 39^{\circ}20716696$, $AD = \arcsin \dfrac{\sin 39^{\circ}20716696}{\sin 55^{\circ}67241254} = 49^{\circ}946725 = 2996{,}8035$ millas, para cuyo recorrido, el barco ha necesitado: $\dfrac{2996{,}8035}{15} = 199{,}7869\,\text{h}$. En este intervalo, el barco de las Galápagos ha navegado durante $159{,}2869\,\text{h}$, recorriendo $2389{,}3035$ millas, es decir, $39^{\circ}821725$, encontrándose en la longitud $91^{\circ}5 + 39^{\circ}821725 = 131^{\circ}321725O$. Por tanto, la distancia entre ambos buques es: $180^{\circ} - (151^{\circ}21\widehat{3} + 39^{\circ}20717 - 180^{\circ}) - 131^{\circ}32172 = 38^{\circ}25778 = 2295{,}466$ millas.

Q 25- Un buque sale del puerto de Sidney (latitud $33^{\circ}51'2\ S$; longitud $151^{\circ}12'8\ E$), y navegando a 15 nudos se dirige por arcos de círculo máximo, al puerto de San Francisco (latitud $37^{\circ}48'5\ N$; longitud $122^{\circ}35'6\ O$). A las $40{,}5$ horas de haber salido este barco, otro zarpa de las islas Galápagos, situadas en el ecuador (longitud $91^{\circ}30'\ O$), y navegando asimismo a 15 nudos, se dirige a las islas Molucas, situadas también en el ecuador, en la longitud $128^{\circ}\ E$. Se pide la distancia en millas entre ambos buques, cuando los dos buques crucen simultáneamente el mismo meridiano y cuál será este.

Solución:



Para facilitar los cálculos, se pasan las coordenadas geográficas, los arcos y los ángulos, a grados sexagesimales con sus decimales. Por tanto: Sidney (latitud $33^{\circ}85\widehat{3}\ S$; $151^{\circ}21\widehat{3}\ E$); San Francisco (latitud $37^{\circ}808\widehat{3}\ N$; longitud $122^{\circ}59\widehat{3}\ O$); Galápagos (latitud 0°; longitud $91^{\circ}5\ O$); Molucas (latitud 0°; longitud $128^{\circ}\ E$). Suponiendo que el meridiano buscado esté a $x^{\circ}\ E$ del de Sidney, el barco de las Galápagos habrá navegado: $180^{\circ} - 151^{\circ}21\widehat{3} - x^{\circ} + 180^{\circ} - 91^{\circ}5 = 117^{\circ}28\widehat{6} - x^{\circ} = (7037{,}2 - 60x)$ millas, mientras que el de Sidney habrá navegado: $(7037{,}2 - 60x + 40{,}5 \cdot 15)$ millas $= (7644{,}7 - 60x)$ millas $= 127^{\circ}411\widehat{6} - x^{\circ}$. Siendo M el punto en el que la ruta del buque de Sidney cruza el meridiano buscado, siendo A Sidney, y C el polo norte, en el triángulo esférico AMC, se tiene: $AC = 123^{\circ}85\widehat{3}$, $A = 55^{\circ}67241254$ (ver problema C 24 más arriba), el ángulo $C = x$, $CM = 127^{\circ}411\widehat{6} - x$. Por tanto se tiene: $\cot(127^{\circ}411\widehat{6} - x)\sin 123^{\circ}85\widehat{3} = \cos 123^{\circ}85\widehat{3}\cos 55^{\circ}67241254 + \sin 55^{\circ}67241254 \cot x$. De donde se obtiene que: $\cot(127^{\circ}411\widehat{6} - x) = \dfrac{\cot 127^{\circ}411\widehat{6}\cot x + 1}{\cot x - \cot 127^{\circ}411\widehat{6}}$. Operando se tiene la siguiente ecuación: $\cot^2 x + 1{,}153658085\cot x - 1{,}29657827 = 0$, cuya solución es: $x = 55^{\circ}02277771\ (*)$. Luego el meridiano buscado es: $360^{\circ} - 151^{\circ}21\widehat{3} - 55^{\circ}02277771 = 153^{\circ}45'50''O$. Además, como $CM = \arcsin \dfrac{\sin 55^{\circ}67241254 \sin(127^{\circ}411\widehat{6} - 55^{\circ}02277771)}{55^{\circ}02277771} = 73^{\circ}86946633$, la distancia entre los dos barcos es: $90^{\circ} - 73^{\circ}86946633 = 16^{\circ}13053367 = 967{,}832$ millas.

$(*)$ La segunda raíz de la ecuación es $x = 151^{\circ}6493303$, que no representa una solución válida para el problema.

Q 26- Resolver el triángulo esférico ABC, del que se conocen: $a = 69^{\circ}03'13''$, $c = 18^{\circ}54'08''2$, $B = 82^{\circ}14'07''$.

Solución: Siendo: $\dfrac{A+C}{2} = \arctan \dfrac{\cos \dfrac{69^{\circ}03'13'' - 18^{\circ}54'08''2}{2}}{\tan \dfrac{82^{\circ}14'07''}{2} \cos \dfrac{69^{\circ}03'13'' + 18^{\circ}54'08''2}{2}} = 55^{\circ}15'30''26$, $\dfrac{A-C}{2} = \arctan \dfrac{\sin \dfrac{69^{\circ}03'13'' - 18^{\circ}54'08''2}{2}}{\tan \dfrac{82^{\circ}14'07''}{2} \sin \dfrac{69^{\circ}03'13'' + 18^{\circ}54'08''2}{2}} = 34^{\circ}57'43''42$, se tiene que: $A = 90^{\circ}13'13''68$, $C = 20^{\circ}17'46''84$, $b = \arcsin \dfrac{\sin 69^{\circ}03'13'' \sin 82^{\circ}14'07''}{\sin 90^{\circ}13'13''68} = 67^{\circ}43'21''36$.

Q 27- Se diseña un hipotético viaje en dirigible, entre las ciudades A y B, ida y vuelta, en las siguientes condiciones: a) se admite que la tierra es esférica; b) en cuanto el dirigible alcanza el centro de B, regresa a A sin tomar tierra; c) el vuelo se realiza según arcos de círculo máximo, a la velocidad uniforme de 120 km/h. Se pide: 1º) Rumbo de partida de A; 2º) Rumbo de partida de B; 3º) Tiempo transcurrido desde la partida de A hasta la llegada a A. Los cálculos se referirán al meridiano de A (latitud de A: $40^\circ 24' 30'' N$). La situación de B, es: latitud $22^\circ 54' 15'' S$; longitud respecto al meridiano de A, $20^\circ 34' 51'' O$.

Solución: Sea C el polo norte. En el triángulo esférico ABC, se conocen los siguientes elementos: $AC = 90^\circ - 40^\circ 24' 30'' = 49^\circ 591\widehat{6}$, $BC = 90^\circ + 22^\circ 54' 15'' = 112^\circ 9041\widehat{6}$, $C = 20^\circ 34' 51'' =$ $= 20^\circ 5808\widehat{3}$. Luego: $\dfrac{A+B}{2} = \arctan \dfrac{\cos \dfrac{112^\circ 9041\widehat{6} - 49^\circ 591\widehat{6}}{2}}{\tan \dfrac{20^\circ 5808\widehat{3}}{2} \cos \dfrac{112^\circ 9041\widehat{6} + 49^\circ 591\widehat{6}}{2}} = 88^\circ 14114103$,

$\dfrac{A-B}{2} = \arctan \dfrac{\sin \dfrac{112^\circ 9041\widehat{6} - 49^\circ 591\widehat{6}}{2}}{\tan \dfrac{20^\circ 5808\widehat{3}}{2} \sin \dfrac{112^\circ 9041\widehat{6} + 49^\circ 591\widehat{6}}{2}} = 71^\circ 1237214$. De donde se obtienen los ángulos: $A = 159^\circ 2648624 = 159^\circ 15' 53'' 5$, $B = 17^\circ 01741963 = 17^\circ 01' 02'' 71$. El lado AB viene dado por: $AB = \arcsin \dfrac{\sin 20^\circ 5808\widehat{3} \sin 49^\circ 591\widehat{6}}{\sin 17^\circ 01741963} = 66^\circ 14908827 = 66^\circ 08' 56'' 72$. Por tanto, el rumbo de partida de A es: $N 159^\circ 15' 53'' 5 O$, y el rumbo de partida de B es: $N 17^\circ 01' 02'' 71 E$, y el tiempo de ida y vuelta, es: $\dfrac{2 \cdot 66^\circ 14908827 \cdot 40000}{360^\circ \cdot 120} = 122{,}4983116$ h $= 5$ días 2 h 29 min y 53,92 s.

Q 28- Un barco minador sale de un puerto A con la misión de fondear unas minas en cierto lugar C, y seguidamente, dirigirse a otra base B, situada al sur de A, a una distancia de 3.010,5 millas. El minador llega a B con rumbo $N\ 34^\circ 5\ E$, tras haber recorrido desde su salida 6.995,8 millas. Calcular la situación de C.

Solución: En el triángulo esférico ABC, se conocen: $B = 34^\circ 5$, $c = 3010{,}5$ millas $= 50^\circ 175 =$ $= 50^\circ 10' 30''$, $a + b = 6995{,}8$ millas $= 116^\circ 59\widehat{6} = 116^\circ 35' 48''$, $2p = a + b + c = 166^\circ 771\widehat{6} =$ $= 166^\circ 46' 18''$, $p = 83^\circ 23' 09''$. El ángulo A se obtiene por la siguiente fórmula: $A = 2 \arctan \dfrac{\sin(83^\circ 23' 09'' - 50^\circ 10' 30'')}{\tan \dfrac{34^\circ 5}{2} \sin 83^\circ 23' 09''} = 121^\circ 229152 = 121^\circ 13' 44'' 95$, y la diferencia $a - b$ por la fórmula: $\dfrac{a-b}{2} = \arctan \dfrac{\tan \dfrac{50^\circ 175}{2} \sin \dfrac{121^\circ 229152 - 34^\circ 5}{2}}{\sin \dfrac{121^\circ 229152 + 34^\circ 5}{2}} = 18^\circ 20137859$. Por tanto: $a = 76^\circ 49971189 = 76^\circ 29' 58'' 96$, $b = 40^\circ 05' 49'' 04$. Luego C está situado a $76^\circ 29' 58'' 96$ de B, dirección $N 34^\circ 5 E$, o bien, a $40^\circ 05' 49'' 04$ de A, dirección $S 121^\circ 13' 44'' 95 E$.

Q 29- Suponiendo la tierra esférica de radio R, dos meridianos, cuyos planos forman entre sí un ángulo φ, interceptan en dos paralelos cuya diferencia de latitud es 60°, dos arcos que miden $a = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} R$, y $b = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} R$. Calcular φ y las latitudes de los dos paralelos.

Solución: Los radios de los paralelos, son: $R \cos\theta$ y $R \cos(\theta + 60^\circ)$, luego los arcos interceptados miden: $\dfrac{2\pi\varphi R \cos\theta}{360} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} R$ y $\dfrac{2\pi\varphi R \cos(\theta+60^\circ)}{360} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} R$. Dividiendo entre sí ambas igualdades: $\left(3 - \sqrt{3}\right) \cos\theta = \left(3 + \sqrt{3}\right) \cos(\theta + 60^\circ) = \left(3 + \sqrt{3}\right) \left(\dfrac{1}{2} \cos\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta\right)$, de donde: $\tan\theta = 2 - \sqrt{3}$, $\theta = 15^\circ$. Luego las latitudes de los dos paralelos, son 15° y 75°. Por otra parte: $\varphi = \dfrac{360(3+\sqrt{3})}{4\pi \cos\theta} = 140^\circ 20' 43'' 53$.

Q 30- Las coordenadas geográficas de la ciudad A, son: latitud $40^\circ 24' 30'' N$; longitud 0 h 0 min 0 s. Y las de la ciudad B son: latitud $22^\circ 54' 15'' S$, longitud 3 h 56 min 9 s O. Calcular la orientación y la longitud del arco de círculo máximo que enlaza ambas ciudades. Se supone que la tierra es esférica y que el cuadrante de meridiano mide 10.000 km.

Solución: En el triángulo esférico ABC (C, polo norte), se conocen: $AC = 90º - 40º24'30'' = 49º35'30''$, $BC = 90º + 22º54'15'' = 112º54'15''$, $C = 3\,\text{h}\,56\,\text{min}\,9\,\text{s} = 59º02'15''$. Luego: $AB = \arccos(\cos 49º35'30'' \cos 112º54'15'' + \sin 49º35'30'' \sin 112º54'15'' \cos 59º02'15'') = 83º7669056 = 9.307,434$ km. $A = \arcsin \dfrac{\sin 112º54'15'' \ \sin 59º02'15''}{\sin 83º7669056} = 52º37'0''73$. Por tanto, la orientación en A es: $N52º37'0''73O$. $B = \arcsin \dfrac{\sin 49º35'30'' \ \sin 59º02'15''}{\sin 83º7669056} = 41º03'29''25$. Luego la orientación en B es: $N41º03'29''25E$.

Q 31- Un avión sale de Madrid con rumbo $N93º40'O$. La velocidad es constante, de 400 km/h, llevando en el depósito 5.000 litros de combustible, siendo el consumo de 80 litros por 100 km. Determinar las coordenadas geográficas del lugar donde se ve obligado a aterrizar por falta de combustible. Las coordenadas geográficas de Madrid son: latitud $40º24'30''N$; longitud 0º.

Solución: El avión vuela: $\dfrac{5000 \cdot 100}{80} = 6.250$ km. En el triángulo esférico ABC, en el que A es Madrid, B el lugar de aterrizaje, y C el polo norte, se conocen: $AB = 6.250\,\text{km} = 56º15'$ (se supone que la tierra es esférica y que un cuadrante mide 10.000 km), $AC = 90º - 40º24'30'' = 49º35'30''$, $A = 93º40'$. Para obtener BC se aplica la fórmula: $BC = \arccos(\cos 56º15' \cos 49º35'30'' + \sin 56º15' \sin 49º35'30'' \cos 93º40') = 71º21'29''95$. Luego: $C = \arcsin \dfrac{\sin 93º40' \sin 56º15'}{\sin 71º21'29''95} = 61º07'45''14$. Por tanto, las coordenadas del punto de aterrizaje son: latitud $90º - 71º21'29''95 = 18º38'30''05N$; longitud $61º07'45''14O$.

Q 32- Resolver el triángulo esférico ABC, del que se conocen: $A = 90º$, $b = 2º04'14''$, $B = 15º19'03''$.

Solución: $a = \arcsin \dfrac{\sin 2º04'14''}{\sin 15º19'03''} = 7º51'39''49$, $c = \arcsin \dfrac{\tan 2º04'14''}{\tan 15º19'03''} = 7º35'06''12$, $C = \arcsin \dfrac{\cos 15º19'03''}{\cos 2º04'14''} = 74º49'11''17$.

Q 33- Resolver el triángulo esférico ABC, del que se conocen: $a = 84º32'20''$, $b = 72º12'30''$, $A = 114º34'40''$.

Solución: Se aplican las fórmulas: $B = \arcsin \dfrac{\sin 114º34'40'' \sin 72º12'30''}{\sin 84º32'20''} = 60º26'30''06$,

$$C = 2\arctan \frac{\cos \dfrac{84º32'20'' - 72º12'30''}{2}}{\tan \dfrac{114º34'40'' + 60º26'30''06}{2} \cos \dfrac{84º32'20'' + 72º12'30''}{2}} = 24º13'05''7,$$

$c = \arcsin \dfrac{\sin 84º32'20'' \sin 24º13'05''7}{\sin 114º34'40''} = 26º40'54''36$.

Q 34- Un navío partió de A ($89º40'E$; $52ºN$) y llegó navegando por arco de círculo máximo, a B ($64º32E$; $48º52'N$). Calcular la distancia recorrida AB, y el rumbo a la salida de A.

Solución: En el triángulo esférico ABC, siendo C el polo norte, se conocen: $AC = 90º - 52º = 38º$, $BC = 90º - 48º52' = 41º08'$, $C = 89º40' - 64º32' = 25º08'$. Para el cálculo de AB y A: $AB = \arccos(\cos 38º \cos 41º08' + \sin 38º \sin 41º08' \cos 25º08') = 16º13'37''8$, $A = \arcsin \dfrac{\sin 25º08' \sin 41º08'}{\sin 16º13'37''8} = 88º51'19''56$, luego el rumbo de partida fue: $N88º51'19''56O$.

Q 35- Resolver el triángulo esférico ABC, del que se conocen: $A = 107º24'50''5$, $B = 21º16'18''7$, $2p = 212º50'50''7$.

Solución: $c = \dfrac{212º50'50''7}{2} - \arcsin\left(\tan \dfrac{107º24'50''5}{2} \tan \dfrac{21º16'18''7}{2}\right) = 92º13'30''7$. Para a y b se aplican las siguientes fórmulas: $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{212º50'50''7 - 92º13'30''7}{2} = 60º18'40''$,

$$\frac{a-b}{2} = \arctan \frac{\tan 60º18'40'' \tan \dfrac{107º24'50''5 - 21º16'18''7}{2}}{\tan \dfrac{107º24'50''5 + 21º16'18''7}{2}} = 38º13'27''95,$$ obteniéndose que:

$a = 60º18'40'' + 38º13'27''95 = 98º32'07''95,\ b = 60º18'40'' - 38º13'27''95 = 22º05'12''05.$ Para C se aplica la fórmula: $C = \arcsin \dfrac{\sin 21º16'18''7 \sin 92º13'30''7}{\sin 22º05'12''05} = 74º36'23''97.$

Q 36- Resolver el triángulo esférico ABC, del que se conocen: $B = 84º,\ a = 100º,\ c = 76º.$

Solución: Se tiene que: $b = \arccos(\cos 100º \cos 76º + \sin 100º \sin 76º \cos 84º) = 86º40'56''09,$ $C = \arcsin \dfrac{\sin 84º \sin 76º}{\sin 86º40'56''09} = 75º09'0''27,\ A = \arcsin \dfrac{\sin 84º \sin 100º}{\sin 86º40'56''09} = 101º10'11''5$ (pues ha de ser $> 90º$).

Q 37- En el triángulo del problema anterior (Q 36), calcular los valores que en BC determina la bisectriz de A.

Solución: Sea W el punto en que la bisectriz de A corta a BC. En el triángulo ABW se conocen: $A = \dfrac{101º10'11''5}{2} = 50º35'05''75,\ c = 76º,\ B = 84º.$ Por tanto, se aplica la siguiente fórmula: $BW = \arctan \dfrac{\sin 76º}{\cos 76º\ \cos 84º + \sin 84º\ \cot 50º35'05''75} = 49º01'40''52.$ De donde se obtiene que: $CW = 100º - 49º01'40''52 = 50º58'19''48.$

Q 38- En el triángulo esférico ABC, calcular A y B, conociendo: $A - B = 79º21'06''38,$ $a = 76º35'36'',\ b = 50º10'30''.$

Solución: Partiendo de los datos: $\dfrac{A-B}{2} = 39º40'33''19,\quad \dfrac{a+b}{2} = 63º23'03'',$ $\dfrac{a-b}{2} = 13º12'33'',$ se tiene: $\dfrac{A+B}{2} = \arctan \dfrac{\tan 39º40'33''19 \tan 63º23'03''}{\tan 13º12'33''} = 81º55'46''66.$ Por tanto, se obtiene que los ángulos A y B son: $A = 81º55'46''66 + 39º40'33''19 = 121º36'19''85,$ $B = 81º55'46''66 - 39º40'33''19 = 42º15'13''47.$

Q 39- Se tiene un triángulo esférico ABC sobre la superficie terrestre, del que se sabe que B y C están sobre el paralelo 40º N, que $A = 121º36'19''84,\ B = 42º15'13''46,\ C = 34º15'02''78.$ Hallar la longitud del lado BC y la del paralelo BC, en km. Se supone la tierra esférica y que un cuadrante de meridiano mide 10.000 km.

Solución: Siendo el exceso esférico: $2E = 121º36'19''84 + 42º15'13''46 + 34º15'02''78 - 180º =$ $= 18º06'36''08,\quad E = 9º03'18''04,\quad A - E = 112º33'01''8,$ se aplica la siguiente fórmula: $a = 2 \arcsin \sqrt{\dfrac{\sin 9º03'18''04 \sin 112º33'01''8}{\sin 42º15'13''46 \sin 34º15'02''78}} = 76º35'35''95 = 8.510,369\,\text{km}.$ La semicuerda subtendida por el arco de círculo máximo mide: $R \sin \dfrac{76º35'35''95}{2} = R \sin 38º17'47''97,$ siendo R el radio terrestre. Siendo θ el semiángulo subtendido por la cuerda del arco del paralelo, se tiene: $\sin\theta = \dfrac{R \sin 38º17'47''97}{r},$ siendo r el radio del paralelo, es decir: $r = R \cos 40º.$ Por tanto: $\theta = \arcsin \dfrac{\sin 38º17'47''97 R}{\cos 40º} = 53º59'55''56.$ Luego el arco BC del paralelo, mide: $\dfrac{2\theta 10000 \cos 40º}{90º} = 9.192,323\,\text{km}.$

Q 40- Demostrar que si $\dfrac{\sin a}{\sin A} = 1,$ dos de los lados del triángulo esférico son iguales a los lados opuestos, mientras que el tercer lado es el suplementario del ángulo opuesto.

Solución: En cualquier triángulo esférico, se verifican las siguientes ecuaciones: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,\quad \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$ Si en ambas ecuaciones se sustituye a por A, se tiene que: $\cos A = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$ $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos A.$ Restando ambas igualdades entre sí, se tiene: $\cos b \cos c = -\cos B \cos C.$ Luego si $b = B,$ ha de cumplirse que $c = \pi - C,$ como indica el enunciado. Si se sustituye en las dos ecuaciones iniciales a por $\pi - A,$ se tiene: $-\cos A = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,\ \cos A = -\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos A.$ Ambas igualdades se verifican si $b = B$ y $c = C,$ como indica el enunciado.

Q 41- Resolver el triángulo esférico ABC, del que se conocen: $a = 72º36'24'',\ A = 112º24'32'',$ $B = 61º12'40''.$

Solución: Como $A+B<180º$, sólo se puede tomar para b el valor $<90º$, pues en caso de tomar el valor suplementario, se tendría que $a+b>180º$, lo que no es posible al ser $A+B<180º$. Por tanto, se aplican las siguientes fórmulas: $b=\arcsin\dfrac{\sin 72º36'24'' \sin 61º12'40''}{\sin 112º24'32''}=64º46'28''88$,
$c=2\arctan\dfrac{\tan\dfrac{72º36'24''+64º46'28''88}{2}\ \cos\dfrac{112º24'32''+61º12'40''}{2}}{\cos\dfrac{112º24'32''-61º12'40''}{2}}=17º58'40''41$,
$C=\arcsin\dfrac{\sin 112º24'32'' \sin 17º58'40''41}{\sin 72º36'24''}=17º23'54''49$ (el suplementario no es válido, pues resultaría que a mayor ángulo le correspondería menor lado).

Q 42- Resolver un triángulo esférico isósceles de base 90º, sabiendo que el arco de círculo máximo que une los puntos medios de los lados iguales es tal que el seno de la mitad de dicho arco vale $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}}$.

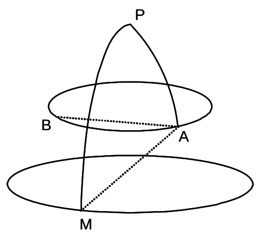
Solución: En el triángulo ABC, se conocen: $B=C$, $BC=90º$. Siendo H el punto medio de BC, M el de AB, y N el de AH, se tiene: $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sin BH}{\sin AB}=\dfrac{\sin MN}{\sin\dfrac{AB}{2}}$. Por tanto, se tiene que: $\dfrac{\sin 45º}{2\cos\dfrac{AB}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}}$, $AB=54º44'08''2$, $A=120º$, $B=C=45º$.

Q 43- En el triángulo esférico ABC, se conocen: $A=61º32'55''$, $B=56º39'10''$, $C=61º48'55''$, $a=39.561,59$ m. Calcular las longitudes de los otros dos lados en m, y la superficie del triángulo en Ha.

Solución: $2E=61º32'55''+56º39'10''+61º48'55''-180º=1'$, $E=30''$, $A-E=61º32'25''$, $B-E=56º38'40''$, $C-E=61º48'25''$. Por tanto se aplica la siguiente fórmula: $a=2\arcsin\sqrt{\dfrac{\sin 30''\ \sin 61º32'25''}{\sin 56º38'40''\ \sin 61º48'25''}}=1º510136214$. De forma análoga se tiene: $b=1º434774748$, $c=1º513929169$. Como: $\dfrac{2\pi R\ 1º510136214}{360º}=39561,59$, se obtiene: $R=1.500.998,464\,\mathrm{m}$. La superficie de ABC es: $\dfrac{0º1'\pi R^2}{90º\cdot 2}=655.370.083,8\,\mathrm{m}^2=65.537,00838$ Ha, $b=37.587,318\,\mathrm{m}$, $c=39.660,955\,\mathrm{m}$.

Q 44- A partir de un punto A de coordenadas $53º09'40''$ latitud N; $31º25'30''$ longitud E, se mide sobre su paralelo, un arco AB de longitud 928.888 m, siendo el radio R de la esfera, 6.371 km. Calcular las longitudes geográficas de los puntos en que una circunferencia cortaría al paralelo $49º42'30''$ N, tomando como centro A y como radio el arco de círculo máximo AB.

Solución:

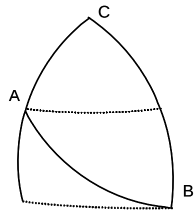


Siendo el radio del paralelo de A, $r=6.371\cos 53º09'40''=3.819,841027$, el arco AB de dicho paralelo, mide $\dfrac{928,888\cdot 360}{2\pi 3819,841027}=13º55'58''34$, y la semicuerda subtendida por este arco, mide: $3819,841027\sin\dfrac{13º55'58''34}{2}=463,3004973$ km. El arco de círculo máximo que subtiende dicha cuerda, mide: $2\arcsin\dfrac{463,3004973}{6371}=8º20'25''75$. En el triángulo esférico AMP, en el que M es uno de los puntos cuya longitud geográfica se pide, y P es el polo norte, se conocen los tres lados: $AP=90º-53º09'40''=36º50'20''$, $AM=AB=8º20'25''75$, $MP=90º-49º42'30''=$

$= 40º17'30''$, $2p = 85º47104061$, $p = 42º44'07''87$. Luego se tiene:
$P = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{\sin(42º44'07''87 - 36º50'20'')\sin(42º44'07''87 - 40º17'30'')}{\sin 36º50'20''\sin 40º17'30''}} = 12º12'11''98$. Por tanto las longitudes pedidas son: $31º25'30''E \pm 12º12'11''98$, es decir: $43º37'41''98E$ y $19º13'18''02E$.

Q 45- Un barco sale de A (latitud $51º13'50''N$; longitud $56º27'30''O$) con rumbo a B, que está situado al este de A, y tal que su latitud se diferencia de la de A en $10º38'$. Si en vez de seguir la derrota por círculo máximo, el barco fuese primero por el meridiano de A, para que una vez alcanzado el paralelo de B, arribar por él a B, recorrería $885{,}44$ millas más que si siguiera primero por el paralelo de A, hasta alcanzar el meridiano de B, para llegar por él a B. Si el recorrido se hubiera realizado por círculo máximo, hallar la distancia AB en millas y los correspondientes rumbos de salida y llegada. Calcular también las coordenadas de B y la distancia en millas recorrida por los paralelos.

Solución:



Al ser mayor la distancia recorrida en la primera alternativa, el paralelo de B está al sur del de A, por lo que la latitud de B es: $51º13'50'' - 10º38' = 40º35'50''N$. Siendo θ la diferencia de las longitudes de A y B, se tiene que la diferencia de los recorridos por los dos paralelos (pues los recorridos por los meridianos son iguales), es: $\theta(\cos 40º35'50'' - \cos 51º13'50'') = = \dfrac{885{,}44 \cdot 360}{360 \cdot 60}$, de donde, $\theta = 110º51'42''27$. Las coordenadas de B son: latitud $40º35'50''N$; longitud $56º27'30''O + 110º51'42''27E = 54º24'12''27E$. En el triángulo esférico ABC, donde C es el polo norte, se conocen: $AC = 90º - 51º13'50'' = 38º46'10''$, $BC = 90º - 40º35'50'' = = 49º24'10''$, $C = 110º51'42''27$. Por tanto se aplica la siguiente fórmula: $AB = \arccos(\cos 38º46'10''\cos 49º24'10'' + \sin 38º46'10''\sin 49º24'10''\cos 110º51'42''27) = = 70º14'32''67 = 4214'5445 = 4214{,}5445$ millas. Para el cálculo de los ángulos A y B se aplican las siguientes fórmulas: $A = \arcsin\dfrac{\sin 49º24'10''\sin 110º51'42''27}{\sin 70º14'32''67} = 48º55'47''65$, $B = \arcsin\dfrac{\sin 38º46'10''\sin 110º51'42''27}{\sin 70º14'32''67} = 38º26'35''31$. Luego el rumbo de salida es: $N48º55'47''65E$, y el de llegada: $N38º26'35''31O$. La distancia en millas recorrida por los paralelos es:
$(\cos 40º35'50'' + \cos 51º13'50'')110º51'42''27 \cdot 60 = 5050{,}658 + 4165{,}218 = 9215{,}876$ millas.

Q 46- En el triángulo esférico ABC, se conocen: $B = 84º$, $C = 76º$, $a = 100º$. Calcular los valores de los dos arcos que sobre a, determina la bisectriz de A.

Solución: El ángulo A es: $\arccos(-\cos 84º\cos 76º + \sin 84º\sin 76º\cos 100) = 101º07'09''96$, $c = \arcsin\dfrac{76º\sin 100º}{\sin 101º07'09''96} = 76º51'53''05$. Siendo W el punto de corte de la bisectriz de A con BC, en el triángulo AWB, se conocen: $AB = 76º51'53''05$, $A = \dfrac{101º07'09''96}{2} = 50º33'34''98$, $B = 84º$. Por tanto: $BW = \arctan\dfrac{\sin 76º51'53''05}{\cos 76º51'53''05\cos 84º + \sin 84º\cot 50º33'34''98} = 49º09'29''3$, $CW = 100º - 49º09'29''3 = 50º50'30''7$.

Q 47- Calcular el radio que debe tener una esfera para que la pirámide cuya base es el triángulo esférico ABC, definido por $a = 81º02'06''08$, $b = 58º49'33''8$, $c = 72º36'39''4$, y cuyo vértice es el centro de dicha esfera, tenga un volumen de $1\,\mathrm{m}^3$.

Solución: La superficie del triángulo ABC viene dada por: $S = \dfrac{2E\pi R^2}{180}$, siendo $2E$ el exceso esférico, que en función de los lados viene determinado por la siguiente fórmula:

$\tan^2\frac{E}{2} = \tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-a}{2}\tan\frac{p-b}{2}\tan\frac{p-c}{2}$, siendo: $\frac{p}{2} = 53º11800\widehat{5}$, $\frac{p-a}{2} = 12º59999\widehat{4}$, $\frac{p-b}{2} = 23º7044\widehat{7}$, $\frac{p-c}{2} = 16º8120\widehat{3}$, $\frac{E}{2} = 11º24366012$. Luego se obtiene que: $S = 0,7849555563R^2$, $V = \frac{0,7849555563R^3}{3} = 1\,\mathrm{m}^3$, $R = 1,56348$ m.

Q 48- Dos aviones de combate salen al mismo tiempo de un determinado aeropuerto, uno con rumbo este y el otro con rumbo oeste. Vuelan por círculo máximo, a la velocidad de rotación de la tierra. Según las órdenes recibidas, el primero lanza un misil hacia un determinado objetivo, según un círculo máximo, a las $3\,\mathrm{h}\,6\,\mathrm{min}\,30\,\mathrm{s}$ de haber despegado, con un alcance de $38º15'23''$. El segundo avión lanza un misil a las $3\,\mathrm{h}\,18\,\mathrm{min}\,57\,\mathrm{s}$ de haber despegado, con un alcance de $51º44'37''$, dirigido al mismo objetivo del primero,.según el mismo círculo máximo que el que recorre el primer misil Hallar las rutas seguidas por cada misil en relación a las rutas seguidas por cada avión, así como el ángulo formado por las rutas de los dos aviones.

Solución: Sea A el aeropuerto de despegue, B la posición del primer avión en el momento en que dispara su misil, y C la posición del segundo avión en el momento en que dispara el suyo. En el triángulo esférico ABC, se conocen sus tres lados: $AB = 15 \cdot 3\,\mathrm{h}\,6\,\mathrm{min}\,30\,\mathrm{s} = 46º625$, $AC = 15 \cdot 3\,\mathrm{h}\,18\,\mathrm{min}\,57\,\mathrm{s} = 49º7375$, $BC = 38º15'23'' + 51º44'37'' = 90º$. Por tanto, se obtienen los ángulos mediante la siguiente fórmula: $A = \arccos(-\cot 46º625 \cot 49º7375) = 143º09'0''18$, $B = \arcsin(\sin 143º09'0''18 \sin 46º625) = 25º50'38''3$, $C = \arcsin(\sin 143º09'0''18 \sin 49º7375) =$ $= 27º14'06''3$. Luego el ángulo de la ruta seguida por el primer misil en relación a la ruta del avión es de $25º50'38''3$, y el correspondiente al segundo misil en relación a la ruta de su avión es de $27º14'06''3$. El ángulo formado por las rutas de los dos aviones es de $143º9'0''18$.

Q 49- Sean los puntos A y B, sobre la superficie terrestre, cuyas coordenadas geográficas son: A (longitud 0º; latitud $48º50'10''$ N), B (longitud $10º06'47''$ E; latitud $41º53'50''$ N). Hallar la distancia entre ambos puntos, en km, suponiendo la tierra esférica y que un cuadrante de meridiano mide $10.000\,\mathrm{km}$.

Solución: En el triángulo esférico ABC, en el que C es el polo norte, se conocen los dos lados: $AC = 90º - 48º50'10'' = 41º09'50''$, $BC = 90º - 41º53'50'' = 48º06'10''$, y el ángulo $C = 10º06'47''$. Para calcular el lado AB se aplica la fórmula siguiente: $AB = \arccos(\cos 41º09'50'' \cos 48º06'10'' + \sin 41º09'50'' \sin 48º06'10'' \cos 10º06'47'') = 9º91526$, que equivale a: $\frac{9º91526 \cdot 10.000}{90º} = 1.101,7\,\mathrm{km}$.

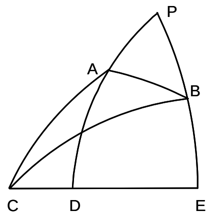
Q 50- En una esfera se dan dos círculos menores C_1 y C_2 de igual radio R, tangentes entre sí y tangentes a un círculo máximo. Se traza un tercer círculo menor C_3 (cuyo radio es R_3), tangente a dicho círculo máximo y a C_1 y C_2. Seguidamente se traza C_4, tangente a C_1, C_2 y C_3, y así sucesivamente, siendo el círculo menor C_n (cuyo radio es R_n) tangente a C_1, C_2 y C_{n-1}. Siempre será C_n el menor de los que se pueden trazar,.cumpliendo las condiciones descritas Hallar el radio de C_3 en función de R, y la ley que relaciona los sucesivos radios. Aplicar al caso de R_3 para $R = 45º$, y al caso de R_4 para $R = 15º$.

Solución: Sean A y B los puntos de tangencia de C_1 y C_2 con el círculo máximo, y T el punto de tangencia entre C_1 y C_2. Los círculos máximos C_1A y C_2B, perpendiculares a AB, se cortan en P. El círculo máximo que pasa por P y T, corta a AB en D, siendo perpendicular a AB (como resumen de lo expuesto, se puede decir que AB es el ecuador, PA, PB y PD son meridianos que concurren en el polo P). En el triángulo esférico PTC_1, se conocen: $PC_1 = 90º - R$, $C_1T = R$, $T = 90º$; por tanto: $\sin P = \frac{\sin R \sin 90º}{\sin(90º - R)} = \tan R$. En lo que sigue, se llama θ al ángulo en P, es decir: $\sin\theta = \tan R$. Al trazar C_3, se tiene el triángulo esférico PC_2C_3, del que se conocen: $PC_2 = 90º - R$, $C_2C_3 = R + R_3$, $PC_3 = 90º - R_3$, $P = \theta$. Por tanto, se tiene: $\cos(R + R_3) =$ $= \cos(90º - R)\cos(90º - R_3) + \sin(90º - R)\sin(90º - R_3)\cos\theta = \sin R \sin R_3 + \cos R \cos R_3 \cos\theta$. Desarrollando $\cos(R + R_3)$ y dividiendo por $\cos R \cos R_3$, se obtiene: $\tan R_3 = \frac{1 - \cos\theta}{2\,\tan R} = \frac{1 - \cos\theta}{2\sin\theta}$. Al trazar C_4, se tiene el triángulo esférico PC_2C_4, del que se conocen: $PC_2 = 90º - R$, $C_2C_4 = R + R_4$, $PC_4 = 90º - 2R_3 - R_4$, $P = \theta$. Por tanto se tiene: $\cos(R + R_4) = \cos(90º - R)\cos(90º - 2R_3 - R_4) + \sin(90º - R)\sin(90º - 2R_3 - R_4)\cos\theta =$

$= \sin R \sin(2R_3 + R_4) + \cos R \cos(2R_3 + R_4) \cos\theta$. Desarrollando y dividiendo por $\cos R \cos R_4$, se obtiene: $\tan R_4 = \dfrac{1 - \cos(\theta - 2R_3)}{\sin\theta + \sin(\theta - 2R_3)}$. Por tanto, aplicando esta ecuación de recurrencia, se tiene la siguiente fórmula: $\tan R_n = \dfrac{1 - \cos[\theta - 2(R_3 + \ldots + R_{n-1})]}{\sin\theta + \sin[\theta - 2(R_3 + \ldots + R_{n-1})]}$, siendo $\sin\theta = \tan R$. Para $R = 45º$, $\theta = \arcsin(\tan 45º) = 90º$, $R_3 = \arctan \dfrac{1 - \cos\theta}{2\sin\theta} = \arctan \dfrac{1}{2} = 26º33'54''18$. Para $R = 15º$, $\theta = \arcsin(\tan 15º) = 15º32'32''17$, $R_3 = \arctan \dfrac{1 - \cos 15º32'32''17}{2\sin 15º32'32''17} = 3º54'12''67$, $R_4 = \arctan \dfrac{1 - \cos(15º32'32''17 - 2 \cdot 3º54'12''67)}{\sin 15º32'32''17 + \sin(15º32'32''17 - 2 \cdot 3º54'12''67)} = 1º17'41''75$.

Q 51- Desde un punto C situado en el ecuador, parte un barco A que después de recorrer 8.300 km, alcanza los $60º25'48''$ N, encontrándose al este de C. Otro barco B que sale también de C, alcanza los $40º40'42''$ N, tras haber recorrido 6.000 km, encontrándose también al este de C. Hallar la distancia entre las posiciones finales de A y B. Se supone la tierra esférica y que un cuadrante de meridiano mide 10.000 km.

Solución:



Siendo P el polo norte, los meridianos PA y PB cortan al ecuador en D y E, respectivamente. En el triángulo esférico CAD, se conocen: $CA = \dfrac{8300 \cdot 90º}{10000} = 74º42'$, $AD = 60º25'48''$, $D = 90º$. Por tanto: $CD = \arccos \dfrac{\cos 74º42'}{\cos 60º25'48''} = 57º40'32''28$. En el triángulo esférico CBE, se conocen los siguientes elementos: $CB = \dfrac{6000 \cdot 90º}{10000} = 54º$, $BE = 40º40'42''$, $E = 90º$. Por tanto: $CE = \arccos \dfrac{\cos 54º}{\cos 40º40'42''} = 39º11'24''64$. En el triángulo esférico PAB, se conocen dos lados: $PA = 90º - 60º25'48'' = 29º34'12''$, $PB = 90º - 40º40'42'' = 49º19'18''$, y el ángulo que comprenden: $P = 57º40'32''28 - 39º11'24''64 = 18º29'07''64$. Por tanto, se aplica la fórmula: $AB = \arccos(\cos 29º34'12'' \cos 49º19'18'' + \sin 29º34'12'' \sin 49º19'18'' \cos 18º29'07''64) =$
$= 22º48'03''59 = 2.533,444$ km.

Q 52- Se da el punto A (latitud $40º24'30''N$; longitud $0\,\text{h}\,14\,\text{min}\,45,09\,\text{s}\,O$) y el punto B (latitud $10º17'0''7N$; longitud $4\,\text{h}\,37\,\text{min}\,10,12\,\text{s}\,E$). Hallar las coordenadas del punto M situado en el arco AB, tal que se verifique que $AM = \dfrac{3}{5}AB$.

Solución: En el triángulo esférico ABC, en el que C es el polo norte, se conocen dos lados: $AC = 90º - 40º24'30'' = 49º35'30''$, $BC = 90º - 10º17'0''7 = 79º42'59''3$, y el ángulo que comprenden: $C = 15(0\,\text{h}\,14\,\text{min}\,45,09\,\text{s} + 4\,\text{h}\,37\,\text{min}\,10,12\,\text{s}) = 72º58'48''15$. Por tanto se tiene: $AB = \arccos(\cos 49º35'30'' \cos 79º42'59''3 + \sin 49º35'30'' \sin 79º42'59''3 \cos 72º58'48''15) =$
$= 70º25'34''53$, $A = \arcsin \dfrac{\sin 79º42'59''3 \ \sin 72º58'48''15}{\sin 70º25'34''53} = 93º05'17''5$. En el triángulo AMC, se conocen: $AC = 49º35'30''$, $AM = \dfrac{3}{5}AB = 42º15'20''72$, $A = 93º05'17''5$. Por tanto: $CM = \arccos(\cos 49º35'30'' \cos 42º15'20''72 + \sin 49º35'30'' \sin 42º15'20''72 \cos 93º05'17''5) =$
$= 63º06'53''39$, $C = \arcsin \dfrac{\sin 42º15'20''72 \sin 93º05'17''5}{\sin 63º06'53''39} = 48º50'11''63$. De donde se tiene que las coordenadas de M son: latitud $90º - 63º06'53''39 = 26º53'06''61N$, longitud $15(0\,\text{h}\,14\,\text{min}\,45,09\,\text{s}\,O) + 48º50'11''63E = 45º08'55''28E$.

Q 53- Siendo θ el valor del arco de círculo máximo que une los puntos medios de los lados iguales de un triángulo esférico isósceles ABC, en el que $b = c$, hallar el valor de la expresión

$$Q = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Solución: Sean M y N los puntos medios de AB y AC, y P y H los de MN y AB. En el triángulo esférico ABP, se conocen: $AM = \frac{b}{2}$, $MP = \frac{\theta}{2}$, $P = 90º$, $MAP = \frac{A}{2}$; por lo que: $\sin\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$. En el triángulo esférico ABH, se conocen: $AB = b$, $BH = \frac{a}{2}$, $H = 90º$, $BAH = \frac{A}{2}$; de donde se obtiene que: $\sin\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin b}$. Luego, operando: $\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{b}{2}} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin b}$, $2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2} = \sin\frac{b}{2}\sin\frac{a}{2}$, $Q = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\ \cos\frac{b}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \frac{1}{2}$.

Q 54- Tres puntos A, B, C están situados en el paralelo $60ºN$, siendo sus respectivas longitudes $0ºE$, $90ºE$, $180ºE$. Hallar el valor del ángulo diedro formado por los planos AOB y BOC, así como el formado por los planos APB y BPC, siendo O el centro de la esfera y P el polo norte.

Solución: Los planos AOB y BOC cortan al plano del paralelo según rectas AB y BC, cuyas longitudes son, siendo $\cos 60º$ el radio del paralelo: $AB = BC = \sqrt{2}\cos 60º = \frac{\sqrt{2}}{2}$. El diámetro AC mide: $2\cos 60º = 1$. Los arcos de círculo máximo que subtienden las cuerdas AB, BC y AC miden: $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} = 41º24'34,64''$ los dos primeros, y $2\arcsin\frac{1}{2} = 60º$, el tercero. Por tanto, en el triángulo esférico ABC, se conocen los lados: $AB = BC = 41º24'34''64$, $AC = 60º$. El diedro buscado es el ángulo B, que viene dado por: $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin p\ \sin(p-b)}{\sin a\ \sin c}}$, es decir: $B = 2\arccos\sqrt{\frac{\sin 71º24'34''69\ \sin 11º24'34''69}{\sin^2 41º24'34''64}} = 98º12'47''56$. Los planos APB y BPC cortan al plano del paralelo según las mismas cuerdas que en el párrafo anterior. El radio de la esfera con centro P y pasando por ABC, es: $\sqrt{\cos^2 60º + (1-\sin 60º)^2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} = 0,5176380902$. Los arcos de sus círculos máximos que subtienden dichas cuerdas, miden: $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4\cdot 0,5176380902} = 86º09'32''52$ para AB y BC, y $2\arcsin\frac{1}{2\cdot 0,5176380902} = 150º$ para AB. El diedro buscado es el ángulo B, que viene dado por: $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}}$, es decir: $B = 2\arccos\sqrt{\frac{\sin 161º09'32''52\sin 11º09'32''52}{\sin^2 86º09'32''52}} = 150º58'42''11$.

Q 55- Hallar el radio R del círculo circunscrito y el radio r del círculo inscrito en el triángulo esférico ABC, del que se conocen: $a = b = c = 90º$.

Solución: $A = B = C = 90º$, $p = \frac{a+b+c}{2} = 135º$, $E = \frac{A+B+C-180º}{2} = 45º$,

$$R = \arctan\sqrt{\frac{\sin E}{\sin(A-E)\ \sin(B-E)\ \sin(C-E)}} = \arctan\frac{1}{\sin 45º} = 54º44'08''2,$$

$$r = \arctan\sqrt{\frac{\sin(p-a)\ \sin(p-b)\ \sin(p-c)}{\sin p}} = \arctan(\sin 45º) = 35º15'51''8.$$

Q 56- Dado el triángulo esférico ABC del que se conocen sus tres ángulos: $A = 64º32'24''$, $B = 72º14'20''$, $C = 84º52'32''$, calcular el radio R de la circunferencia circunscrita.

Solución: Es de aplicación la fórmula: $R = \arctan\sqrt{\frac{\sin E}{\sin(A-E)\ \sin(B-E)\ \sin(C-E)}} =$

$= \arctan\sqrt{\dfrac{\sin 20^\circ 49' 38''}{\sin 43^\circ 42' 46''\ \sin 51^\circ 24' 42''\ \sin 64^\circ 02' 54''}} = 40^\circ 33' 01'' 69.$

Q 57- Dado el triángulo esférico ABC del que se conocen sus tres lados: $a = 96^\circ 42' 15''$, $b = 82^\circ 04' 18''$, $c = 71^\circ 28' 37''$, calcular el radio r_a de la circunferencia exinscrita en el ángulo A.

Solución: Es de aplicación la fórmula: $r_a = \arctan\sqrt{\dfrac{\sin p \sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin(p-a)}} =$ $= \arctan\sqrt{\dfrac{\sin 125^\circ 07' 35'' \sin 43^\circ 03' 17'' \sin 53^\circ 38' 58''}{\sin 28^\circ 25' 20''}} = 44^\circ 11' 14'' 65.$

Q 58- Resolver el triángulo esférico ABC, del que se conocen: $a = 90^\circ$, $c = 102^\circ$, $A = 36^\circ 25' 08''$.

Solución: Se aplican la fórmula: $b = \arctan\dfrac{-1}{\tan 102^\circ\ \cos 36^\circ 25' 08''} = 14^\circ 47' 47'' 1$, y para los ángulos: $B = \arctan(-\cos 102^\circ \tan 36^\circ 25' 08'') = 8^\circ 43' 14'' 58$, $C = \arccos\dfrac{-\cos 36^\circ 25' 08''}{\cos 8^\circ 43' 14'' 58} =$ $= 144^\circ 29' 58'' 02.$

Q 59- Calcular c en un triángulo esférico ABC, en el que $a + c = x$, $b = y$, siendo x e y las soluciones mínimas positivas del sistema $2\sin x \cos y = 1$, $\tan x \tan y = -1$.

Solución: Se tienen las soluciones: $x = 135^\circ$, $y = 45^\circ$. Luego: $\cos a = \cos b \cos c$, es decir: $\cos(135^\circ - c) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos c$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos c + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos c$, $\tan c = 2$, $c = 63^\circ 26' 05'' 82$.

Q 60- En un triángulo esférico rectángulo en A, calcular el valor de la expresión $Q = \dfrac{\cot^2 b + \cot^2 c}{\cot^2 h_a}$.

Solución: $Q = \left(\dfrac{\cot b}{\cot h_a}\right)^2 + \left(\dfrac{\cot c}{\cot h_a}\right)^2 = \left(\dfrac{\tan h_a}{\tan b}\right)^2 + \left(\dfrac{\tan h_a}{\tan c}\right)^2$. En el triángulo esférico rectángulo ABH, en el que H es el pie de la altura h_a, y llamando A_1 al ángulo BAH, se tiene: $\cos A_1 = \dfrac{\tan h_a}{\tan c}$. Similarmente, en el triángulo HAC, se tiene: $\cos A_2 = \dfrac{\tan h_a}{\tan b}$, siendo: $A_1 + A_2 = 90^\circ$. Luego: $Q = \cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 = \cos^2 A_1 + \sin^2 A_1 = 1$.

Q 61- En un triángulo esférico ABC, se conocen las distancias de un punto P de su interior, a los tres vértices, que son: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$. Se sabe que las áreas de los tres triángulos PAB, PBC, PCA son iguales entre sí. Resolver el triángulo ABC y hallar su área.

Solución: Sean α, β, γ los ángulos APB, BPC y CPA, por lo que: $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$. Al ser iguales los excesos esféricos de los tres triángulos formados en torno a P, utilizando la fórmula: $\cot E = \dfrac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2} + \cos C}{\sin C}$, se tiene: $\dfrac{\cot\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{6} + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\cot\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4} + \cos\beta}{\sin\beta} =$ $= \dfrac{\cot\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{4} + \cos\gamma}{\sin\gamma}$. De la igualdad entre los términos primero y segundo, se deduce que: $\alpha = \beta$, por lo que: $\gamma = 360^\circ - 2\alpha$, obteniéndose la ecuación: $\dfrac{\cot\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{6} + \cos\alpha}{\sin\alpha} =$ $= \dfrac{\cot\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{4} + \cos(360^\circ - 2\alpha)}{\sin(360^\circ - 2\alpha)}$, $\dfrac{\sqrt{3} + \cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{-\sin 2\alpha} = 0$, $\alpha = 150^\circ = \beta$, $\gamma = 60^\circ$. En el triángulo APB, para calcular AB se aplica la siguiente fórmula: $AB = \arccos\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}\cos 150^\circ\right) = \arccos(-\frac{3}{4}) = 138^\circ 35' 25'' 36$. En el triángulo BPC, se tiene: $BC = AB = 138^\circ 35' 25'' 36$. En el triángulo CPA, se tiene: $AC = \arccos\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\cos 60^\circ\right) = \arccos\frac{1}{2} = 60^\circ$. En el triángulo ABC, se tiene: $B = 2\arcsin\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin BC} = 98^\circ 12' 47'' 56$, $A = C = \arccos\dfrac{\tan 30^\circ}{\tan BC} = 130^\circ 53' 36'' 22$. Por tanto, se tiene que el exceso esférico del triángulo ABC es: $2E = A + B + C - 180^\circ =$

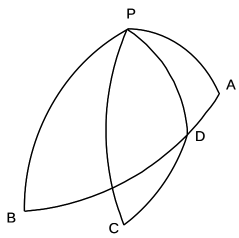
$= 2 \cdot 130º53'36''22 + 98º12'47''56 - 180º = 180º$, luego su área vale π.

Q 62- Un círculo máximo es tangente a dos círculos menores de radios esféricos r y r', siendo d la distancia entre sus polos, y siendo t el arco de círculo máximo entre los puntos de tangencia. Demostrar que: $\sin^2\frac{t}{2} = \dfrac{\sin^2\frac{d}{2} - \sin^2\frac{r-r'}{2}}{\cos r \cos r'}$.

Solución: Sea P el polo del círculo máximo, siendo C y C', los polos de los círculos menores. Los tres lados del triángulo esférico $CC'P$, miden: $b = PC = 90º - r$, $c = PC' = 90º - r'$, $a = CC' = d$, y el ángulo en P mide: $A = t$. Por tanto se tienen los siguientes valores: $2p = 180º - r - r' + d$, $p = 90º + \frac{d-r-r'}{2}$, $p - b = \frac{d+r-r'}{2}$, $p - c = \frac{d-r+r'}{2}$, de donde se obtiene que: $\sin^2\frac{t}{2} = \dfrac{\sin\frac{d+r-r'}{2}\sin\frac{d-r+r'}{2}}{\sin(90-r)\sin(90-r')} = \dfrac{\sin(\frac{d}{2}+\frac{r-r'}{2})\sin(\frac{d}{2}-\frac{r-r'}{2})}{\cos r \cos r'} =$
$= \dfrac{\sin^2\frac{d}{2} - \sin^2\frac{r-r'}{2}}{\cos r\ \cos r'}$.

Q 63- Un hidroavión partió de Sevilla rumbo a Santiago de Cuba, a las cinco de la mañana de un lunes, con una velocidad de crucero de $198\,\mathrm{km/h}$. A las seis de la tarde del mismo lunes, sufre una avería en el motor que hace descender su velocidad con una deceleración de $1\,\mathrm{mm/s^2}$. En el momento de producirse la avería, solicita ayuda por radio, dando su situación geográfica. En ese mismo momento sale en su ayuda un hidroavión desde Santiago de Cuba, con una velocidad de $252\,\mathrm{km/h}$. Cuando el hidro cubano encuentra al español, solicita ayuda para poder remolcarlo, por lo que un hidro brasileño que había despegado del archipiélago Fernando de Noronha y se encontraba en las proximidades de su base, se dirige a su encuentro. Se pide el rumbo de la ruta del hidroavión brasileño y la velocidad que llevaba el español en el momento de producirse su encuentro con el cubano. Se supone que todas las rutas se realizan por círculo máximo y que el radio de la tierra es de $6.400\,\mathrm{km}$. Coordenadas de Sevilla: $37º22'35''N$; $6ºO$. Coordenadas de Santiago de Cuba: $20º05'15''N$; $76º20'05''O$. Coordenadas del punto de partida del hidro brasileño: $5º50'10''S$; $30º06'45''O$.

Solución:



Sean: A, Sevilla; B, Santiago de Cuba; C, el punto de partida del hidro brasileño; D, el punto de encuentro del hidro cubano con el español; P, el polo norte. En el triángulo esférico ABP, se conocen: $AP = 90º - 37º22'35'' = 52º37'25''$, $BP = 90º - 20º05'15'' = 69º54'45''$, $P = 76º20'05'' - 6º = 70º20'05''$. Por tanto, se aplica la siguiente fórmula: $AB = \arccos(\cos 52º37'25'' \cos 69º54'45'' + \sin 52º37'25'' \sin 69º54'45'' \cos 70º20'05'') =$
$= 62º63006596(*) = 6995,846\,\mathrm{km}$, $\quad A = \arcsin\dfrac{\sin 69º54'45'' \sin 70º20'05''}{\sin 62º63006596} = 84º7928677$.
Hasta el momento de la avería, el hidro español había recorrido: $13 \cdot 198 = 2.574$ km, luego quedaban por recorrer: $6.995,846 - 2574 = 4.421,846\,\mathrm{km}$. Siendo t el tiempo que tardan en encontrarse los hidros español y cubano desde el momento de la avería, y siendo la deceleración: $0,000001 \cdot 3600^2 = 12,96\,\mathrm{km/h^2}$, se cumple que: $252t + t(198 - \frac{12,96}{2}t) = 4.421,846$, $t = 11,847584\,\mathrm{h}$. Luego se tiene que: $BD = 11,847584 \cdot 252 = 2985,591\,\mathrm{km} = 26º72840058$, $AD = 6995,846 - 2985,591 = 4.010,255\,\mathrm{km} = 35º90166973$. La velocidad del hidroavión español al llegar a D, es: $198 - 12,96 \cdot 11,847584 = 44,455\,\mathrm{km/h}$. En el triángulo ADP, . se conocen: $AP = 52º37'25''$, $AD = 35º90166973$, $A = 84º7928677$. Por tanto se aplica: $DP = \arccos(\cos 52º37'25'' \cos 35º90166973 + \sin 52º37'25'' \sin 35º90166973 \cos 84º7928677) =$
$= 57º72282303$, $\quad P = \arcsin\dfrac{\sin 35º90166973 \sin 84º7928677}{\sin 57º72282303} = 43º68616885$. En el triángulo

CDP, se conocen dos lados y un ángulo: $CP = 90º + 5º50'10'' = 95º50'10''$, $DP = 57º72282303$, $P = 6º + 43º68616885 - 30º06'45'' = 19º57366885$. Por tanto, se aplica la fórmula: $CD = \arccos(\cos 95º50'10'' \cos 57º72282303 + \sin 95º50'10'' \sin 57º72282303 \cos 19º57366885) =$ $= 42º42284331$, $C = \arcsin \dfrac{\sin 57º72282303 \sin 19º57366885}{\sin 42º42284331} = 24º82701514 = 24º49'37''25$. Luego el rumbo del hidroavión brasileño es: $N24º49'37''25O$.

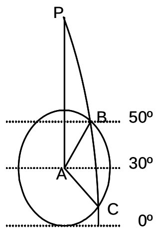
$(*)$ Para las fracciones de grados, se utilizan indistintamente las notaciones decimales o las sexagesimales (minutos y segundos).

Q 64- Calcular en km la distancia AB, siendo las coordenadas de A: longitud $65º43'54''O$; latitud $30º55'43''S$, y las de B: longitud $43º46'02''E$; latitud $17º19'43''N$. Se supone que la tierra es esférica con un radio de 6.366 km.

Solución: En el triángulo ABP, siendo P el polo norte, se conocen: $AP = 90º + 30º55'43'' =$ $= 120º55'43''$, $BP = 90º - 17º19'43'' = 72º40'17''$, $P = 65º43'54'' + 43º46'02'' = 109º29'56''$. $AB = \arccos(\cos 120º55'43'' \cos 72º40'17'' + \sin 120º55'43'' \sin 72º40'17'' \cos 109º29'56'') =$ $= 115º2404248 = 12.804,094\,\text{km}$.

Q 65- Hallar la latitud del punto en que un meridiano que pasa por uno de los puntos en que el paralelo $50º\ N$ corta al círculo menor tangente al paralelo $60º\ N$ y al ecuador, vuelve a cortar al mismo círculo menor.

Solución:



Sea A el polo del círculo menor, que está situado sobre el paralelo $30º\ N$. Sea B el punto de corte del meridiano con el círculo menor y con el paralelo $50º\ N$. Sea P el polo norte. En el triángulo ABP, se conocen: $AP = 90º - 30º = 60º$, $PB = 90º - 50º = 40º$, $AB = 30º$, que corresponde al radio esférico del círculo menor. Por tanto, utilizando la fórmula: $\cos \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin p \sin(p - AB)}{\sin b \sin c}}$, siendo $2p = 60º + 40º + 30º = 130º$, $p = 65º$, se obtiene el valor del ángulo $P = 2 \arccos \sqrt{\dfrac{\sin 65º \sin 35º}{\sin 60º \sin 40º}} = 29º8116288$. En el triángulo APC, siendo C el segundo punto de corte del meridiano con el círculo menor, se conocen: $AP = 60º$, $AC = 30º$, $P = 29º8116288$. Por tanto, obteniendo el valor del ángulo auxiliar $\theta = \arctan(\tan 60º \cos 29º8116288) = 56º35991911$, se calcula PC por la fórmula:

$$PC = \theta \pm \arccos \frac{\cos 30º \cos 56º35991911}{\cos 60º} (*) = 56º35991911 + 16º35991914 = 72º71983825.$$

Luego la latitud de C es: $90º - 72º71983825 = 17º28016175 = 17º16'48''58N$.

$(*)$ Se utiliza el signo $+$, pues $PC > PB$.

Q 66- Un barco partió de A ($52ºN$; $89º40'E$) y llegó a B ($48º52'N$; $64º32'E$), haciendo el recorrido por círculo máximo. Calcular en km la distancia recorrida y los rumbos de salida y llegada. Un cuadrante de meridiano mide 10.000 km.

Solución: En el triángulo esférico ABC, en el que C es el polo norte, se conocen: $AC = 90º - 52º = 38º$, $BC = 90º - 48º52' = 41º08'$, $C = 89º40' - 64º32' = 25º08'$. Por tanto: $AB = \arccos(\cos 38º \cos 41º08' + \sin 38º \sin 41º08' \cos 25º08') = 16º22716656 = 1.803,019\,\text{km}$,

Para el cálculo de A y B se tiene: $\dfrac{A+B}{2} = \arctan \dfrac{\cos \dfrac{38º - 41º08'}{2}}{\tan \dfrac{25º08'}{2} \cos \dfrac{38º + 41º08'}{2}} = 80º24582707$,

$$\frac{A-B}{2} = \arctan\frac{\sin\frac{38^\circ-41^\circ08'}{2}}{\tan\frac{25^\circ08'}{2}\sin\frac{38^\circ+41^\circ08'}{2}} = 10^\circ8987389,$$ obteniéndose: $A = 91^\circ14456597$, $B = 69^\circ34708817$. El rumbo de salida fue: $N91^\circ08'40''44O$, y el de llegada: $N69^\circ20'49''52E$.

Q 67- Hallar el área de la parte de superficie esférica comprendida entre un arco de paralelo que pasa por los puntos A y B, y el arco de círculo máximo que los une. Coordenadas de A: $48^\circ15'N; 54^\circ06'O$. Y las de B: $48^\circ15'N$; $0^\circ17'E$. Un cuadrante de meridiano mide 10.000 km.

Solución: En el triángulo esférico ABC, en el que C es el polo norte, se conocen: $AB = BC = 90^\circ - 48^\circ15' = 41^\circ45'$, $C = 54^\circ06' + 0^\circ17' = 54^\circ23'$. Para calcular $A = B$, se aplica la fórmula: $A = B = \arctan\frac{1}{\tan\frac{54^\circ23'}{2}\cos 41^\circ45'} = 69^\circ01^\circ44''25$. Luego el exceso esférico es: $2E = 2\cdot 69^\circ01^\circ44''25 + 54^\circ23' = 192^\circ26'28''5$. La superficie del triángulo esférico ABC, es: $\frac{192^\circ26'28''5 - 180^\circ}{90^\circ}\cdot\frac{\pi R^2}{2} = \frac{12^\circ26'28''5\,\pi\, 20000^2}{180^\circ\,\pi^2} = 8.800.384,445\,\text{km}^2$. La superficie de la parte de zona esférica comprendida entre el paralelo AB, los meridianos AB y AC, y el polo norte, viene dada por: $\frac{2\pi Rh\, 54^\circ23'}{360^\circ}$, siendo su altura: $h = R(1-\sin 48^\circ15')$. Luego mide: $\frac{54^\circ23'\cdot 20000^2(1-\sin 48^\circ15')}{180^\circ\,\pi} = 9.768.751,033\,\text{km}^2$. El área de la parte de superficie esférica comprendida entre el arco de paralelo y el arco de círculo máximo que pasan por A y B, es: $9.768.751,033 - 8.800.384,445 = 968.366,588\,\text{km}^2$.

Q 68- Entre dos puntos A y B del hemisferio norte hay una distancia $d = 8.472$ km. Se sabe que un avión partió de A rumbo $N82^\circ42'E$, y después de volar por círculo máximo, llegó a B con rumbo $N85^\circ43'30''O$. Calcular las latitudes de A y B, la diferencia de longitudes de A y B, y la máxima latitud alcanzada. Un cuadrante de meridiano mide 10.000 km.

Solución: En el triángulo esférico ABC, en el que C es el polo norte, se conocen: $A = 82^\circ42'$, $B = 85^\circ43'30''$, $AB = \frac{8472\cdot 90^\circ}{10000} = 76^\circ248$. Para calcular a y b, se aplican las siguientes fórmulas: $$\frac{b+a}{2} = \arctan\frac{\tan\frac{76^\circ248}{2}\cos\frac{85^\circ43'30''-82^\circ42'}{2}}{\cos\frac{85^\circ43'30''+82^\circ42'}{2}} = 82^\circ67542352,$$ $$\frac{b-a}{2} = \arctan\frac{\tan\frac{76^\circ248}{2}\sin\frac{85^\circ43'30''-82^\circ42'}{2}}{\sin\frac{85^\circ43'30''+82^\circ42'}{2}} = 1^\circ192745337,$$ obteniéndose los valores: $b = AC = 83^\circ52'05''41$, $a = BC = 81^\circ28'57''64$. La latitud de A es: $90^\circ - 83^\circ52'05''41 = 6^\circ07'54''59N$, y la de B: $90^\circ - 81^\circ28'57''64 = 8^\circ31'02''36N$. El cálculo de C es: $C = \arcsin\frac{\sin 76^\circ248\sin 82^\circ42}{\sin 81^\circ28'57''64} = 76^\circ57'28''84$, que corresponde a la diferencia de longitudes de A y B. En el triángulo ACH, en el que H es el pie de la altura desde A sobre BC, se conocen: $H = 90^\circ$, $A = 82^\circ42'$, $AC = 83^\circ52'05''41$. Por tanto, se aplica la siguiente fórmula: $CH = \arcsin(\sin 83^\circ52'05''41\sin 82^\circ42') = 80^\circ4771055$. La máxima latitud alcanzada es: $90^\circ - 80^\circ4771055 = 9^\circ31'22''42$.

Q 69- En un cuadrilátero esférico se conocen: $d' = 30^\circ$, $d'' = 90^\circ$, α(ángulo de d' y d'') $= 60^\circ$. Hallar el valor de la expresión $E = 808\cos A\cos C(\tan a\tan c\sin b\sin d - \tan b\tan d\sin a\sin c)$.

Solución: Sea el cuadrilátero $ABCD$, en el sentido de las agujas del reloj, luego $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = d'$, $BD = d''$. En el triángulo esférico rectilátero ABD, se tiene: $\cos(180^\circ - A) = \cot a\cot d = -\cos A$. En el triángulo esférico rectilátero BCD, se tiene $\cos(180^\circ - C) = \cot b\cot c = -\cos C$. Sustituyendo estos valores en la expresión E, se tiene: $E = 808\cot a\cot d\cot b\cot c(\tan a\tan c\sin b\sin d - \tan b\tan d\sin a\sin c) = 808(\cos b\cos d - \cos a\cos c) = 808\sin d'\sin d''\cos 60^\circ = 202$.

Q 70- Desde un punto O se dirigen visuales a otros dos puntos, P y Q, midiéndose los ángulos ZOP y ZOQ que dichas visuales forman con la vertical OZ, y el ángulo POQ que las visuales forman entre sí. Determinar el valor del ángulo que forman entre sí las proyecciones ortogonales de las referidas visuales sobre un plano normal a OZ. Los ángulos medidos son: $\widehat{ZOP} = 78º37'25''$, $\widehat{ZOQ} = 82º25'30''$, $\widehat{POQ} = 37º25'45''$.

Solución: Trazando una esfera con centro O, se tiene el triángulo esférico ABC, en el que A es la intersección con OZ, B con OP y C con OQ, en el que se conocen: $BC = 37º25'45''$, $AC = 82º25'30''$, $AB = 78º37'25''$, $2p = 198º28'40''$, $p = 99º14'20''$, $p-a = 61º48'35''$, $p-b = 16º48'50''$, $p-c = 20º36'55''$. Luego se aplica la siguiente fórmula: $A = 2\arctan\sqrt{\dfrac{\sin 16º48'50'' \sin 20º36'55''}{\sin 99º14'20'' \sin 61º48'35''}} = 37º46'39''56$, que es el ángulo pedido.

Q 71- Hallar en función de p, el valor de la expresión $Q = \dfrac{\tan r_a \tan r_b \tan r_c}{\tan r}$.

Solución: Siendo: $\tan r = \sqrt{\dfrac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}$, y las fórmulas análogas para $\tan r_a$, $\tan r_b$, $\tan r_c$, se tiene que:

$$Q = \frac{\sqrt{\dfrac{\sin p \sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin(p-a)} \dfrac{\sin p \sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin(p-b)} \dfrac{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin(p-c)}}}{\sqrt{\dfrac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}}.$$

Operando, se obtiene el valor: $Q = \sin^2 p$.

Problemas de Cálculo Diferencial

Sección R - DERIVADAS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

R 1- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{x}}}$.

Solución: Haciendo las sustituciones: $u = a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$, $v = a+\sqrt{x}$, se tiene: $y = \sqrt{u}$, $u = a+\sqrt{v}$. Derivando, se obtiene: $y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $u' = \dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$, $v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Por tanto: $y' = \dfrac{1}{8\cdot\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}$.

R 2- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = \sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b+\sqrt[p]{x}}}$.

Solución: Haciendo las sustituciones: $u = a+\sqrt[n]{b+\sqrt[p]{x}}$, $v = b+\sqrt[p]{x}$, se tiene: $y = \sqrt[m]{u} = u^{\frac{1}{m}}$, $u = a+\sqrt[n]{v} = a+v^{\frac{1}{n}}$. Derivando, se obtiene: $y' = \dfrac{1}{m}u^{\frac{1}{m}-1}u'$, $u' = \dfrac{1}{n}v^{\frac{1}{n}-1}v'$, $v' = \dfrac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}$. Por tanto: $y' = \dfrac{1}{mnp}\cdot\sqrt[m]{\left(a+\sqrt[n]{b+\sqrt[p]{x}}\right)^{1-m}}\cdot\sqrt[n]{(b+\sqrt[p]{x})^{1-n}}\cdot\sqrt[p]{x^{1-p}}$.

R 3- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = a^{x^a}$.

Solución: Tomando logaritmos: $\ln y = x^a \ln a$. Derivando, se obtiene: $\dfrac{y'}{y} = ax^{a-1}\ln a$. Luego: $y' = a^{x^a}ax^{a-1}\ln a$.

R 4- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = \sin\sqrt[m]{ax}$.

Solución: Sustituyendo: $u = \sqrt[m]{ax}$, se tiene: $y = \sin u$. Derivando: $u' = \sqrt[m]{a}\,\dfrac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$, $y' = \cos u\cdot u'$. Por tanto: $y' = \cos\sqrt[m]{ax}\cdot\sqrt[m]{a}\,\dfrac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$.

R 5- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = \log_a\sqrt[m]{\sin(x^n)}$.

Solución: Haciendo las sustituciones: $u = \sqrt[m]{\sin(x^n)}$, $v = \sin(x^n)$, $w = x^n$, se tiene: $w' = nx^{n-1}$, $v = \sin w$, $v' = \cos w\cdot w'$, $u = \sqrt[m]{v}$, $u' = \dfrac{1}{m}v^{\frac{1-m}{m}}v'$, $y = \log_a u$, $y' = \dfrac{u'}{u\ln a}$. Por tanto: $y' = \dfrac{\frac{1}{m}v^{\frac{1-m}{m}}v'}{\sqrt[m]{\sin(x^n)}\,\ln a} = \dfrac{\frac{1}{m}(\sin w)^{\frac{1-m}{m}}\cdot\cos w\cdot w'}{\sqrt[m]{\sin(x^n)}\,\ln a} = \dfrac{\frac{1}{m}(\sin x^n)^{\frac{1-m}{m}}\cdot\cos x^n\cdot nx^{n-1}}{\sqrt[m]{\sin(x^n)}\,\ln a}$.

R 6- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = \sin\cos\tan\cot x$.

Solución: $y = \sin[\cos[\tan(\cot x)]]$. Haciendo las sustituciones: $y = \sin u$, $u = \cos v$, $v = \tan w$, $w = \cot x$, se tiene: $y' = \cos u\cdot u'$, $u' = -\sin v\cdot v'$, $v' = \dfrac{w'}{\cos^2 w}$, $w' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$. Por tanto: $y' = \cos\cos\tan\cot x\cdot\sin\tan\cot x\cdot\dfrac{1}{\cos^2\cot x\cdot\sin^2 x}$.

R 7- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = \sqrt[a]{\arcsin\sqrt[a]{\arccos\sqrt[a]{\arctan x}}}$.

Solución: Haciendo las sustituciones: $u = \arcsin\sqrt[a]{\arccos\sqrt[a]{\arctan x}}$, $v = \arccos\sqrt[a]{\arctan x}$, $w = \arctan x$, se tiene: $y = \sqrt[a]{u}$, $u = \arcsin\sqrt[a]{v}$, $v = \arccos\sqrt[a]{w}$, $y' = \dfrac{1}{a}u^{\frac{1-a}{a}}\cdot u'$,

$u' = \dfrac{v'}{\pm\sqrt{1-v^{\frac{2}{a}}}}$, $v' = \dfrac{-w'}{\pm\sqrt{1-w^{\frac{2}{a}}}}$, $w' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Por tanto se tiene que: $y' = \dfrac{1}{a}(\arcsin\sqrt[a]{\arccos\sqrt[a]{\arctan x}}\,)^{\frac{1-a}{a}} \cdot \dfrac{1}{\pm\sqrt{1-(\arccos\sqrt[a]{\arctan x}\,)^{\frac{2}{a}}}} \cdot \dfrac{-1}{\pm\sqrt{1-(\arctan x)^{\frac{2}{a}}}} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$

R 8- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = \arcsin \log_a \sqrt[m]{\cos x^n}$.

Solución: Haciendo las sustituciones: $u = \log_a \sqrt[m]{\cos x^n}$, $v = \sqrt[m]{\cos x^n}$, $w = \cos x^n$, se tiene: $y = \arcsin u$, $u = \log_a v$, $v = \sqrt[m]{w}$, $y' = \dfrac{u'}{\pm\sqrt{1-u^2}}$, $u' = \dfrac{v'}{v\ln a}$, $v' = \dfrac{w'}{m}w^{\frac{1-m}{m}}$, $w' = -\sin x^n \cdot nx^{n-1}$. Teniendo en cuenta lo anterior, la derivada pedida es la siguiente: $y' = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1-(\log_a \sqrt[m]{\cos x^n}\,)^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[m]{\cos x^n}\,\ln a} \cdot \dfrac{1}{m}(\cos x^n)^{\frac{1-m}{m}} \cdot (-1)\sin x^n \cdot nx^{n-1}$.

R 9- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = x^x$.

Solución: Tomando logaritmos: $\ln y = x\ln x$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = \ln x + 1$. Luego: $y' = x^x(\ln x + 1)$.

R 10- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = a^{\sqrt{b+c^{\sqrt{d+\cos x}}}}$.

Solución: Haciendo las sustituciones: $u = \sqrt{b+c^{\sqrt{d+\cos x}}}$, $v = c^{\sqrt{d+\cos x}}$, $w = \sqrt{d+\cos x}$, se tiene: $y = a^u$, $u = \sqrt{b+v}$, $v = c^w$, $y' = a^u u' \ln a$, $u' = \dfrac{1}{2}(b+v)^{-\frac{1}{2}}v'$, $v' = c^w w' \ln c$, $w' = \dfrac{1}{2}(d+\cos x)^{-\frac{1}{2}}(-\sin x)$. Teniendo en cuenta lo anterior, la derivada pedida es: $y' = a^{\sqrt{b+c^{\sqrt{d+\cos x}}}} \cdot \ln a \cdot \dfrac{1}{2}(b+c^{\sqrt{d+\cos x}})^{-\frac{1}{2}} \cdot c^{\sqrt{d+\cos x}} \cdot \ln c \cdot \dfrac{1}{2}(d+\cos x)^{-\frac{1}{2}}(-\sin x)$.

R 11- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = x^{\sin x}$.

Solución: Tomando logaritmos: $\ln y = \sin x \ln x$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = \cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}$. Luego: $y' = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x})$.

R 12- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Solución: $y' = \dfrac{1}{x} \cdot x^{\frac{1}{x}-1} + x^{\frac{1}{x}}\ln x$.

R 13- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = x^{\frac{1}{\tan x}}$.

Solución: Tomando logaritmos: $\ln y = \dfrac{1}{\tan x} \cdot \ln x$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}\ln x + \dfrac{1}{x\tan x}$. Luego: $y' = x^{\frac{1}{\tan x}}\left(\dfrac{-1}{\sin^2 x}\ln x + \dfrac{1}{x\tan x}\right)$.

R 14- Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$, descomponerla en fracciones simples y calcular su derivada de orden 6.

Solución: $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2} + \ldots + \dfrac{m}{x+n}$. De donde: $1 = a(x+1)(x+2)\ldots(x+n) + bx(x+2)\ldots(x+n) + cx(x+1)\ldots(x+n) + \ldots + mx(x+1)(x+2)\ldots$ Dando a x los valores: $0, -1, -2, \ldots, -n$, se obtiene: $a = \dfrac{1}{n!}$, $b = \dfrac{-1}{(n-1)!}$, $c = \dfrac{1}{2!(n-2)!}$, $d = \dfrac{-1}{3!(n-3)!}, \ldots,$ $m = \dfrac{(-1)^n}{n!1!}$. Por tanto, la descomposición en fracciones simples es: $f(x) = \dfrac{1}{n!x} + \dfrac{-1}{(n-1)!(x+1)} + \dfrac{1}{2!(n-2)!(x+2)} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n!1!(x+n)}$. Derivando esta expresión seis veces, se tiene: $f^{(6)}(x) =$

$$= \frac{6!}{n!x^7} - \frac{6!}{(n-1)!(x+1)^7} + \frac{6! \cdot 2^6}{2!(n-2)!(x+2)^7} - \frac{6! \cdot 3^6}{3!(n-3)!(x+3)^7} + \ldots + (-1)^n \frac{6! \cdot n^6}{n!1!(x+n)^7}.$$

R 15- Calcular la derivada de orden n de la función $y = \dfrac{4x^3 - 10x}{x^4 - 5x^2 + 4}$.

Solución: $y = \dfrac{4x^3 - 10x}{x^4 - 5x^2 + 4} = \dfrac{4x^3 - 10x}{(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$.
Por tanto: $y^{(n)} = (-1)^n n! \left[(x+2)^{-n-1} + (x-2)^{-n-1} + (x+1)^{-n-1} + (x-1)^{-n-1} \right]$.

R 16- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = (\sin x)^x$.

Solución: Tomando logaritmos: $\ln y = x \ln \sin x$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = \ln \sin x + x \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Luego: $y' = (\sin x)^x \left(\ln \sin x + x \dfrac{\cos x}{\sin x} \right)$.

R 17- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Solución: Tomando logaritmos: $\ln y = \dfrac{1}{x} \ln \cos x$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{-1}{x^2} \ln \cos x - \dfrac{\sin x}{x \cos x}$.
Luego: $y' = (\cos x)^{\frac{1}{x}} \left(\dfrac{-1}{x^2} \ln \cos x - \dfrac{\sin x}{x \cos x} \right)$.

R 18- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = (\tan x)^{\cot x}$.

Solución: Tomando logaritmos: $\ln y = \cot x \cdot \ln \tan x$. Derivando esta expresión, se tiene: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{-1}{\sin^2 x} \ln \tan x + \cot x \dfrac{-1}{\cos^2 x \, \tan x}$. $y' = (\tan x)^{\cot x} \left(\dfrac{-1}{\sin^2 x} \ln \tan x - \cot x \dfrac{1}{\cos^2 x \, \tan x} \right)$.

R 19- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = (\sin x)^{x^x}$.

Solución: Tomando logaritmos: $\ln y = x^x \ln \sin x$. Sustituyendo: $u = x^x$, y tomando logaritmos: $\ln u = x \ln x$. Derivando: $\dfrac{u'}{u} = \ln x + 1$. Luego: $u' = x^x(\ln x + 1)$. Por tanto: $\ln y = u \ln \sin x$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = u' \ln \sin x + u \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Luego se tiene que: $y' = (\sin x)^{x^x} (u' \ln \sin x + u \dfrac{\cos x}{\sin x}) =$
$= (\sin x)^{x^x} (x^x (\ln x + 1) \ln \sin x + x^x \dfrac{\cos x}{\sin x})$.

R 20- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = x^{x^{\frac{1}{x}}}$.

Solución: Tomando logaritmos: $\ln y = x^{\frac{1}{x}} \ln x$. Sustituyendo: $u = x^{\frac{1}{x}}$. Tomando logaritmos: $\ln u = \dfrac{1}{x} \ln x$. Derivando: $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{-1}{x^2} \ln x + \dfrac{1}{x^2}$. Luego: $u' = x^{\frac{1}{x}} (\dfrac{-1}{x^2} \ln x + \dfrac{1}{x^2})$. Por tanto: $\ln y = u \, \ln x$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = u' \ln x + u \dfrac{1}{x}$. Luego despejando y sustituyendo el valor de y, se tiene: $y' = x^{\sqrt[x]{x}} (u' \ln x + u \dfrac{1}{x}) = x^{\sqrt[x]{x}} \left[x^{\frac{1}{x}} (\dfrac{-1}{x^2} \ln x + \dfrac{1}{x^2}) \ln x + x^{\frac{1}{x}} \dfrac{1}{x} \right]$.

R 21- Derivar la siguiente expresión, sin simplificar el resultado: $y = \sin^{\cos^{\tan x} x} x = (\sin x)^{(\cos x)^{\tan x}}$.

Solución: Sustituyendo: $u = (\cos x)^{\tan x}$, $y = (\sin x)^u$. Tomando logaritmos: $\ln y = u \ln \sin x$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = u' \ln \sin x + u \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Por otra parte, sustituyendo: $v = \tan x$, se tiene: $u = (\cos x)^v$. Tomando logaritmos y derivando: $\ln u = v \ln \cos x$, $\dfrac{u'}{u} = v' \ln \cos x - v \dfrac{\sin x}{\cos x} =$
$= \dfrac{-1}{\cos^2 x} \ln \cos x - \tan x \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Luego: $u' = (\cos x)^{\tan x} (\dfrac{-1}{\cos^2 x} \ln \cos x - \tan x \dfrac{\sin x}{\cos x})$. Por tanto: $y' = (\sin x)^{(\cos x)^{\tan x}} \left[\left[(\cos x)^{\tan x} (\dfrac{-1}{\cos^2 x} \ln \cos x - \tan x \dfrac{\sin x}{\cos x}) \right] \ln \sin x + (\cos x)^{\tan x} \dfrac{\cos x}{\sin x} \right]$.

R 22- Hallar la derivada de $y = [\arctan(e^{\sin 2x})]^{x^2}$.

Solución: $y' = 2x [\arctan(e^{\sin 2x})]^{x^2} \left[\ln \arctan(e^{\sin 2x}) + \dfrac{x \cos 2x \cdot e^{\sin 2x}}{\arctan e^{\sin 2x} (1 + e^{2 \sin 2x})} \right]$.

R 23- Derivar la siguiente expresión, simplificando lo más posible el resultado: $y = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$.

Solución: $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}(1+\tan^2 x) = \frac{1}{\cos^4 x} = \sec^4 x.$

R 24- Derivar la expresión $y = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: Derivando: $y' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x} + \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x} =$
$= \frac{\sin^2 x - (1-\sin^2 x) + 1 + \sin^4 x - 2\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = \tan^4 x.$

R 25- Derivar la expresión $y = \frac{1}{\sqrt{1-a}} \arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{1-ax}}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: Sustituyendo: $u = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-ax}}$, se tiene: $y = \frac{1}{\sqrt{1-a}}\arccos u$. Derivando la función u, se tiene: $u' = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{1-ax}\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{-2x(1-ax)+a(1-x^2)}{(1-ax)^2}$. Por tanto, derivando la función y, se tiene: $y' = \frac{1}{\sqrt{1-a}} \cdot \frac{-u'}{\pm\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-a}} \cdot \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{1-ax}\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{-2x(1-ax)+a(1-x^2)}{(1-ax)^2}}{\pm\sqrt{1-\frac{1-x^2}{1-ax}}} =$

$$= \pm\frac{ax^2-2x+a}{2(1-ax)\sqrt{1-a}\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2-ax}} = \pm\frac{(ax^2-2x+a)\sqrt{(1-a)(1-x^2)(x^2-ax)}}{2(1-ax)(1-a)(1-x^2)(x^2-ax)}.$$

R 26- Derivar la expresión $y = (2bx-3a)\sqrt[3]{(a+bx)^2}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = 2b\sqrt[3]{(a+bx)^2} + (2bx-3a)\frac{2}{3}(a+bx)^{\frac{2}{3}-1}b = \frac{10b^2x}{3(a+bx)}\sqrt[3]{(a+bx)^2}.$

R 27- Derivar la expresión $y = (a^2+x^2)\arctan\frac{x}{a}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = 2x\arctan\frac{x}{a} + \frac{a^2+x^2}{a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = a + 2x\arctan\frac{x}{a}.$

R 28- Derivar la expresión $y = (a+x)\arctan\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \arctan\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{a+x}{1+\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{ax}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}} = \arctan\sqrt{\frac{x}{a}}.$

R 29- Derivar la expresión $y = \arctan\sqrt{\frac{x}{a}} + \ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \frac{1}{a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{2a}{(x+a)^2 \cdot 2\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} \cdot \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}} = \frac{2ax^2}{x^4-a^4}.$

R 30- Derivar la expresión $y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{2}(1+x^2)^{\frac{-1}{2}}2x}{1+x^2} = \pm\frac{1}{1+x^2}.$

R 31- Derivar la expresión $y = \ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \dfrac{\left(\sqrt{2}+2x\right)\left(1-x\sqrt{2}+x^2\right)-\left(-\sqrt{2}+2x\right)\left(1+x\sqrt{2}+x^2\right)}{\left(1-x\sqrt{2}+x^2\right)^2} \cdot \dfrac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2} +$

$+\dfrac{2}{1+\dfrac{2x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}\,(1-x^2)+2x^2\sqrt{2}}{(1-x^2)^2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{1+x^4}.$

R 32- Derivar la expresión $y = \dfrac{1}{\sqrt{a-1}} \ln \dfrac{x\sqrt{a-1}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-ax^2}}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \dfrac{\left(\sqrt{a-1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1-ax^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{2ax}{\sqrt{1-ax^2}}\left(x\sqrt{a-1}+\sqrt{1-x^2}\right)}{1-ax^2} \cdot$

$\cdot \dfrac{1}{\sqrt{a-1}} \cdot \dfrac{\sqrt{1-ax^2}}{x\sqrt{a-1}+\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{(1-ax^2)\sqrt{1-x^2}}.$

R 33- Derivar la expresión $y = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \dfrac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}} \cdot \dfrac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-x\sqrt{b}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+x\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-x\sqrt{b}\right)^2} \cdot \dfrac{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}{\sqrt{a}+x\sqrt{b}} = \dfrac{1}{a-bx^2}.$

R 34- Derivar la expresión $y = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln \dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{2}\dfrac{b}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}\left(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}\right)-\dfrac{1}{2}\dfrac{b}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}\left(\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}\right)^2} \cdot$

$\cdot \dfrac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}} = \dfrac{1}{x\sqrt{a+bx}} = \dfrac{\sqrt{a+bx}}{x(a+bx)}.$

R 35- Derivar la expresión $y = \ln \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: Racionalizando y derivando, se tiene: $y = \ln \dfrac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2}{1+x-1+x} = \ln \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$,

$y' = \dfrac{-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}2xx-1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \cdot \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}.$

R 36- Derivar la expresión $y = \dfrac{1}{6} \ln \dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \dfrac{1}{6}\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x-1)^2}{(x^2+x+1)^2} \cdot \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2} - \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1+\dfrac{(2x+1)^2}{3}} =$

$= \dfrac{1}{x^3-1}.$

R 37- Derivar la expresión $y = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}} \cdot \dfrac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2} = \dfrac{1}{1-\sin x}.$

R 38- Derivar la expresión $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) + \dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \sqrt{x^2+a^2}$.

R 39- Derivar la siguiente expresión, simplificando lo más posible el resultado: $y = \arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$.

Solución: $y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \dfrac{2(1-x^2)+2x2x}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2}{x^2+1}$.

R 40- Derivar la expresión $y = \arctan\dfrac{x+a+b-abx}{1+(a+b)x-ab}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: Derivando y operando, se tiene: $y' = \dfrac{a^2b^2-a^2-b^2-4ab+1}{[(a+b)x-ab+1]^2+[(1-ab)x+a+b]^2} =$
$= \dfrac{(ab-1)^2-(a+b)^2}{[(a+b)x-ab+1]^2+[(1-ab)x+a+b]^2} = \dfrac{(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)}{[(a+b)x-ab+1]^2+[(1-ab)x+a+b]^2}$.

R 41- Derivar la expresión $y = \dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)^2} \cdot \dfrac{(3-3x^2)(1-3x^2)+6x(3x-x^3)}{(1-3x^2)^2} = \dfrac{1}{x^2+1}$.

R 42- Derivar la expresión $y = \dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \dfrac{\sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{2} + \dfrac{a^2}{2} \cdot \dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}} \cdot \dfrac{1}{a} = \pm\sqrt{a^2-x^2}$.

R 43- Derivar la siguiente expresión, simplificando lo más posible el resultado: $y = \arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solución: $y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

R 44- Derivar la expresión $y = 2\arctan\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \dfrac{2}{1+\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)^2}{x^2}} \cdot \dfrac{x^2(1+x^2)^{\frac{-1}{2}} - \sqrt{1+x^2}+1}{x^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

R 45- Derivar la expresión $y = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)^2}\dfrac{(2x-2)(x^2+2x-1)-(2x+2)(x^2-2x-1)}{(x^2+2x-1)^2} = \dfrac{1}{x^2+1}$.

R 46- Derivar la siguiente expresión, simplificando lo más posible el resultado: $y = \arctan\dfrac{a+x}{1-ax}$.

Solución: $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{a+x}{1-ax}\right)^2} \cdot \dfrac{1-ax+a(a+x)}{(1-ax)^2} = \dfrac{1}{x^2+1}$.

R 47- Determinar el valor de y' para $x = 40°$ en la expresión $y = \dfrac{3\sin^2 x - 2}{2\sin x \cos x} + \dfrac{3}{2}\ln(\sin x + \tan x)$.

Solución: $y' = \dfrac{3\sin^4 x - 4\sin^2 x + 2}{2\sin^2 x \cos^2 x} + \dfrac{3}{2\cos x} = 3{,}730431655$.

R 48- Calcular la derivada enésima de $y = x \cdot e^x$.

Solución: $y' = e^x(x+1)$, $y'' = e^x(x+2)$, $y''' = e^x(x+3), \ldots$, $y^{(n-1)} = (n-1+x)e^x$, $y^{(n)} = (n+x)e^x$. En efecto, derivando la derivada $y^{(n-1)} = (n-1+x)e^x$, y simplificando, se tiene: $y^{(n)} = e^x + (n-1+x)e^x = (n+x)e^x$.

R 49- Calcular la derivada enésima de $y = \ln(x-a)$.

Solución: Las primeras derivadas son: $y' = \dfrac{1}{x-a} = (x-a)^{-1}$, $y'' = -(x-a)^{-2}$, $y''' = 2(x-a)^{-3}, \ldots$ Luego se deduce que: $y^{(n-1)} = (-1)^{n-2}(n-2)!(x-a)^{-(n-1)}$, $y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(x-a)^{-n}$. En efecto, la derivada de $y^{(n-1)} = (-1)^{n-2}(n-2)!(x-a)^{-(n-1)}$, es: $y^{(n)} = (-1)^{n-2}(n-2)![-(n-1)](x-a)^{-(n-1)-1} = (-1)^{n-1}(n-1)!(x-a)^{-n}$.

R 50- Calcular la derivada enésima de $y = \dfrac{x}{a+bx}$.

Solución: Las primera derivadas son: $y' = \dfrac{a+bx-bx}{(a+bx)^2} = a(a+bx)^{-2}$, $y'' = -2ab(a+bx)^{-3}, \ldots$ Luego se deduce que: $y^{(n-1)} = (-1)^{n-2}(n-1)!ab^{n-2}(a+bx)^{-n}$, $y^{(n)} = (-1)^{n-1}n!ab^{n-1}(a+bx)^{-n-1}$, lo que se comprueba, porque la derivada de $y^{(n-1)} = (-1)^{n-2}(n-1)!ab^{n-2}(a+bx)^{-n}$, es: $y^{(n)} = (-1)^{n-2}(n-1)!ab^{n-2}(-n)b(a+bx)^{-n-1} = (-1)^{n-1}n!ab^{n-1}(a+bx)^{-n-1}$.

R 51- Calcular la derivada enésima de $y = \dfrac{1}{x^3+3x^2+2x}$

Solución: Descomponiendo en fracciones simples: $y = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+2)}$, Por tanto, derivando: $y^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{2} x^{-(n+1)} - (-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)} + (-1)^n \dfrac{n!}{2}(x+2)^{-(n+1)}$.

R 52- Dada la función $f(n) = \dfrac{4x+6}{x^3+6x^2+11x+6}$, calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ y la derivada enésima de $f(x)$.

Solución: Descomponiendo en fracciones simples, se tiene: $f(n) = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{2}{n+2} - \dfrac{3}{n+3}$. Dando valores a n, desde $n = 1$ a $n = \infty$, se tiene el siguiente desarrollo: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}(*) + \frac{1}{3} + \frac{2}{4}(*) - \frac{3}{5}(**) + \frac{1}{4}(*) + \frac{2}{5}(**) - \frac{3}{6}(***) + \frac{1}{5}(**) + \frac{2}{6}(***) - \frac{3}{7}(****) + \ldots$ Como los sumandos que tienen un asterisco se anulan entre sí, y lo mismo los que tienen dos asteriscos, etc., se tiene que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$. La derivada enésima de $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{x+3}$, es:
$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)} + 2(-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)} - 3(-1)^n n!(x-3)^{-(n+1)}$.

R 53- Calcular el valor de a para que $y = (x+2)e^{-2x} + (x^2-a)e^{2x}$ satisfaga a la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = e^{2x}(16x^2+16x-14)$.

Solución: $y' = e^{-2x}(-2x-3) + e^{2x}(2x^2+2x-2a)$, $y'' = e^{-2x}(4x+4) + e^{2x}(4x^2+8x-4a+2)$, $y''+4y'+4y = e^{2x}(16x^2+16x-16a+2) = e^{2x}(16x^2+16x-14)$. Luego: $a = 1$.

R 54- Derivar la expresión $y = \dfrac{\sin 6x}{6} + \dfrac{3\sin 4x}{2} + \dfrac{15\sin 2x}{2} + 10x$, simplificando lo más posible el resultado.

Solución: $y' = \frac{6\cos 6x}{6} + \frac{12\cos 4x}{2} + \frac{30\cos 2x}{2} + 10 = \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10 =$
$= \cos^6 x - \binom{6}{2}\cos^4 x(1-\cos^2 x) + \binom{6}{4}\cos^2 x(1-\cos^2 x)^2 - \binom{6}{6}(1-\cos^2 x)^3 +$
$+6\left[\cos^4 x - \binom{4}{2}\cos^2 x(1-\cos^2 x) + \binom{4}{4}(1-\cos^2 x)^2\right] + 15[\cos^2 x - \binom{2}{2}(1-\cos^2 x)] + 10 =$
$= 32\cos^6 x.$

R 55- Hallar la derivada enésima de $y = e^{ax} \bullet \sin bx$, introduciendo un ángulo auxiliar $\theta = \arctan \frac{b}{a}$, de manera que la expresión de esta derivada quede monomia.

Solución: Sean: $S = e^{ax} \bullet \sin bx$, $C = e^{ax} \bullet \cos bx$, $C + iS = f = e^{(a+bi)x}$, $f^{(n)} = (a+bi)^n \bullet e^{(a+bi)x}$. Como: $a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos \arctan \frac{b}{a} + i \sin \arctan \frac{b}{a}) = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{\theta i}$, se tiene que: $f^{(n)} = (\sqrt{a^2+b^2}\, e^{\theta i})^n e^{(a+bi)x} = (\sqrt{a^2+b^2}\,)^n e^{ax+(n\theta+bx)i}$. Luego: $y^{(n)} = (\sqrt{a^2+b^2}\,)^n e^{ax} \sin(n\theta + bx)$.

R 56- Dado el polinomio $f(x) = 4x^4 - 7x^3 - 5x^2 - 8x + 1$, hallar aplicando Horner, el valor de sus sucesivas derivadas particularizadas para $x = 3$.

Solución:

	4	−7	−5	−8	1
3		12	15	30	66
	4	5	10	22	67
		12	51	183	
	4	17	61	**205**	
		12	87		
	4	29	**148**		
		12			
	4	**41**			

$f'(3) = 205$, $f''(3) = 148 \times 2! = 296$, $f'''(3) = 41 \times 3! = 246$, $f^{(4)}(3) = 4 \times 4! = 96$.

R 57- Dado el polinomio $f(x) = 5x^5 + 6x^4 - 3x^2 + 4$, hallar aplicando Horner, el valor de sus sucesivas derivadas particularizadas para $x = 3$.

Solución:

	5	6	0	−3	0	4
3		15	63	189	558	
	5	21	63	186	558	
		15	108	513	2097	
	5	36	171	699	**2655**	
		15	153	972		
	5	51	324	**1671**		
		15	198			
	5	66	**522**			
		15				
	5	**81**				

$f'(3) = 2655$, $f''(3) = 2! \times 1671 = 3342$, $f'''(3) = 3! \times 522 = 3132$, $f^{(4)}(3) = 4! \times 81 = 1944$, $f^{(5)}(3) = 5! \times 5 = 600$.

R 58- Hallar la derivada cuarta de $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ sabiendo que todos sus elementos son funciones de x.

Solución: La descomposición de Δ en cuatro sumandos, es la siguiente: $\begin{matrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$ .Por tanto:

$$\Delta^{(4)} = \frac{4!}{4!}\left[\begin{vmatrix} a^{(4} \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b^{(4} \\ c \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b \\ c^{(4} \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d^{(4} \end{vmatrix}\right] +$$

$$+\frac{4!}{3!}\left[\begin{matrix} \begin{vmatrix} a''' \\ b' \\ c \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''' \\ b \\ c' \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''' \\ b \\ c \\ d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' \\ b''' \\ c \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b''' \\ c' \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b''' \\ c \\ d' \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} a' \\ b \\ c''' \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b' \\ c''' \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b \\ c''' \\ d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' \\ b \\ c \\ d''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b' \\ c \\ d''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b \\ c' \\ d''' \end{vmatrix} \end{matrix}\right] +$$

$$+\frac{4!}{2!2!}\left[\begin{vmatrix} a'' \\ b'' \\ c \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' \\ b \\ c'' \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' \\ b \\ c \\ d'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b'' \\ c'' \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b'' \\ c \\ d'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b \\ c'' \\ d'' \end{vmatrix}\right] +$$

$$+\frac{4!}{2!}\left[\begin{matrix} \begin{vmatrix} a'' \\ b' \\ c' \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' \\ b' \\ c \\ d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' \\ b \\ c' \\ d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' \\ b'' \\ c' \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' \\ b'' \\ c \\ d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b'' \\ c' \\ d' \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c'' \\ d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' \\ b \\ c'' \\ d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b' \\ c'' \\ d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c \\ d'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' \\ b \\ c' \\ d'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b' \\ c' \\ d'' \end{vmatrix} \end{matrix}\right] + 4!\begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{vmatrix}.$$

Nota: Para simplificar la escritura, los determinantes se han representado por una sola columna generalizada, como por ejemplo, el determinante dado: $\Delta = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}$

R 59- Hallar la derivada enésima de $y = \dfrac{17x+55}{(x+1)(x+2)(x+5)}$.

Solución: Descomponiendo en fracciones simples, se tiene: $y = \dfrac{19}{2(x+1)} + \dfrac{-7}{x+2} + \dfrac{-5}{2(x+5)}$.
Por tanto, la derivada enésima es: $y^{(n)} = \dfrac{19}{2}(-1)^n(x+1)^{-n-1} - 7(-1)^n(x+2)^{-n-1} - \dfrac{5}{2}(x+5)^{-n-1}$.

R 60- Calcular el valor que toma el polinomio, $y = x^6 - 2,3x^5 + 6,21x^3 - 0,56x^2 + 8,3x - 5$ y sus sucesivas derivadas para $x = 1,35$, aplicando Horner (hacer las operaciones con dos decimales).

Solución:

	1	−2,30	0	6,21	−0,56	8,30	−5,00
1,35		1,35	−1,28	−1,73	6,05	7,41	21,21
	1	−0,95	−1,28	4,48	5,49	15,71	**16,21**
		1,35	0,54	−1,00	4,70	13,76	
	1	0,40	−0,74	3,48	10,19	**29,47**	
		1,35	2,36	2,19	7,65		
	1	1,75	1,62	5,67	**17,84**		
		1,35	4,18	7,83			
	1	3,10	5,80	**13,50**			
		1,35	6,01				
	1	4,45	**11,81**				
		1,35					
	1	**5,80**					

Luego los valores de las sucesivas derivadas son: $y(1,35) = 16,21$, $y'(1,35) = 29,47$, $y''(1,35) = 2! \times 17,84 = 35,68$, $y'''(1,35) = 3! \times 13,50 = 81$, $y^{(4)}(1,35) = 4! \times 11,81 = 283,44$, $y^{(5)} = 5! \times 5,80 = 696$, $y^{(6)} = 6! \times 1 = 720$.

R 61- Hallar la derivada enésima de la función $y = \dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2-x+2}$.

Solución: Descomponiendo en fracciones simples, se tiene: $y = \dfrac{1}{3(x+1)} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{5}{3(x-2)}$.
Por tanto: $y^{(n)} = \dfrac{1}{3}(-1)^n n!(x+1)^{-n-1} - (-1)^n n!(x-1)^{-n-1} + \dfrac{5}{3}(-1)^n n!(x-2)^{-n-1}$.

R 62- Derivar $y = (\sin x)^{\ln x}$.

Solución: Tomando logaritmos: $\ln y = \ln x \cdot \ln \sin x$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x}\ln \sin x + \ln x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
Luego: $y' = (\sin x)^{\ln x}\left(\dfrac{1}{x}\ln \sin x + \ln x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$.

R 63- Derivar $y = (\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Solución: $\ln y = \dfrac{1}{\sin x} \cdot \ln \sin x$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\ln \sin x + \dfrac{1}{\sin x}\dfrac{\cos x}{\sin x}$. Luego:
$y' = (\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\left(\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\ln \sin x + \dfrac{1}{\sin x}\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}(-\ln \sin x + 1)$.

R 64- Hallar la derivada enésima de la función $y = \dfrac{3x^2+4x-3}{x^3+2x^2-3x-4}$.

Solución: Descomponiendo en fracciones simples: $y = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+\frac{1-\sqrt{17}}{2}} + \dfrac{1}{x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$. Luego: $y^{(n)} = (-1)^n n!(x+1)^{-n-1} + (-1)^n n!(x+\frac{1-\sqrt{17}}{2})^{-n-1} + (-1)^n n!(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2})^{-n-1}$.

R 65- Dada la función $y = ax+b \pm \sqrt{mx^2+2nx+p}$, hallar $\dfrac{d^3}{dx^3}\left[\left(\dfrac{1}{y''}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$.

Solución: $y' = a \pm \dfrac{mx+n}{\sqrt{mx^2+2nx+p}}$, $y'' = \dfrac{mp-n^2}{(mx^2+2nx+p)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{1}{y''} = \dfrac{(mx^2+2nx+p)^{\frac{3}{2}}}{mp-n^2}$, $\left(\dfrac{1}{y''}\right)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{mx^2+2nx+p}{(mp-n^2)^{\frac{2}{3}}} = t$, $t' = \dfrac{2mx+2n}{(mp-n^2)^{\frac{2}{3}}}$, $t'' = \dfrac{2m}{(mp-n^2)^{\frac{2}{3}}}$, $t''' = 0$. Luego: $\dfrac{d^3}{dx^3}\left[\left(\dfrac{1}{y''}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = 0$.

R 66- Hallar el verdadero valor de $\dfrac{d^3}{dx^3}\left[\dfrac{x^4\cos x}{(x-1)\sin x^4}\right]$ para $x=0$.

Solución: $x^4\cos x = x^4(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots)$; $(x-1)\sin x^4 = (x-1)(x^4-\frac{x^{12}}{3!}+\frac{x^{20}}{5!}-\ldots)$;

$$y = \frac{x^4\cos x}{(x-1)\sin x^4} = \frac{x^4-\frac{x^6}{2}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{10}}{6!}+\ldots}{-x^4+x^5+\frac{x^{12}}{3!}-\frac{x^{13}}{3!}-\frac{x^{20}}{5!}+\frac{x^{21}}{5!}-\ldots} = -1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\ldots$$

Luego: $y' = -1-x-\frac{3}{2}x^2+\ldots$, $y'' = -1-3x+\ldots$, $y''' = -3+ax+\ldots$, $y'''(0) = -3$. Luego el verdadero valor pedido es: -3.

R 67- Calcular la derivada enésima de $y = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$, siendo la solución monomia.

Solución: $y' = (n-1)x^{n-2}e^{\frac{1}{x}} - x^{n-3}e^{\frac{1}{x}} = y[(n-1)x^{-1}-x^{-2}]$, $y'x^2 = y[(n-1)x-1]$. Derivando: $y^{(n+1)}x^2 + \binom{n}{1}y^{(n)}2x + \binom{n}{2}y^{(n-1)}2 = y^{(n)}[(n-1)x-1] + \binom{n}{1}(n-1)y^{(n-1)}$. Operando se tiene: $y^{(n+1)}x^2 + y^{(n)}(nx+x+1) = 0$, $\dfrac{y^{(n+1)}}{y^{(n)}} = \dfrac{dz}{z} = -\dfrac{nx+x+1}{x^2}dx = -\dfrac{n+1}{x}dx - \dfrac{dx}{x^2}$, siendo: $z = y^{(n)}$. Integrando: $\ln z = -(n+1)\ln x + \dfrac{1}{x} + C$, $z = e^{-(n+1)\ln x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot e^C = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}\cdot e^C$. Haciendo: $C = n\pi i$, $e^C = e^{n\pi i} = \cos n\pi + i\sin n\pi = (-1)^n$. Luego: $y^{(n)} = (-1)^n\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

R 68- Calcular la derivada enésima de $y = \dfrac{2x^2+3x+4}{(x-1)(x-2)^2}$.

Solución: Descomponiendo en fracciones simples, se tiene: $y = \dfrac{9}{x-1} + \dfrac{18}{(x-2)^2} + \dfrac{-7}{x-2}$. Luego: $y^{(n)} = 9(-1)^n\cdot n!(x-1)^{-n-1} + 18(-1)^n(n+1)!(x-2)^{-n-2} - 7(-1)^n n!(x-2)^{-n-1}$.

R 69- Calcular la derivada enésima de $y = (x^2+1)\sin^2 ax$.

Solución: Sustituyendo: $u = x^2+1$, $v = \sin^2 ax$, se tiene que la derivada enésima pedida es: $D^n u\cdot v = (x^2+1)D^n\sin^2 ax + \binom{n}{1}2xD^{n-1}\sin^2 ax + 2\binom{n}{2}D^{n-2}\sin^2 ax$. Ahora bien, se tienen las siguientes derivadas de la función v: $v' = 2a\sin ax\cos ax = a\sin 2ax$, $v'' = 2a^2\cos 2ax$, $v''' = -4a^3\sin 2ax$, $v^{(4)} = -8a^4\cos 2ax$, $v^{(5)} = 16a^5\sin 2ax\ldots$ Luego para $n = 4m$, $D^{4m}v = 2^{4m-1}a^{4m}\sin 2ax$. Para $n = 4m+1$, $D^{4m+1}v = 2^{4m}a^{4m+1}\cos 2ax$. Para $n = 4m+2$, $D^{4m+2}v = -2^{4m+1}a^{4m+2}\sin 2ax$. Para $n = 4m+3$, $D^{4m+3}v = -2^{4m+2}a^{4m+3}\cos 2ax$. Por tanto, se tiene:

$D^{4m}(x^2+1)\sin^2 ax = (x^2+1)2^{4m-1}a^{4m}\sin 2ax - n2^{4m-1}a^{4m-1}\cos 2ax - 2^{4m-2}n(n-1)a^{4m-2}\sin 2ax$.

$D^{4m+1}(x^2+1)\sin^2 ax = (x^2+1)2^{4m}a^{4m+1}\cos 2ax + n2^{4m}a^{4m}\sin 2ax - 2^{4m-1}n(n-1)a^{4m-1}\cos 2ax$.

$D^{4m+2}(x^2+1)\sin^2 ax = -(x^2+1)2^{4m+1}a^{4m+2}\sin 2ax + n2^{4m+1}a^{4m+1}\cos 2ax + 2^{4m}n(n-1)a^{4m}\sin 2ax$.

$$D^{4m+3}(x^2+1)\sin^2 ax = -(x^2+1)2^{4m+2}a^{4m+3}\cos 2ax - n2^{4m+2}a^{4m+2}\sin 2ax + 2^{4m+1}n(n-1)a^{4m+1}\cos 2ax$$

R 70- Dada la función $y = e^x \sin x$, calcular la suma de sus n primeras derivadas.

Solución: Sean: $S = y = e^x \sin x$, $C = e^x \cos x$, $\Phi = C + iS = e^x e^{xi} = e^{(1+i)x}$, $\Phi' = (1+i)e^{(1+i)x}$, $\Phi^{(n} = (1+i)^n e^{(1+i)x}$. La suma de las n primeras derivadas de Φ, es: $\sum \Phi^{(n} = e^{(1+i)x}[(1+i)+\ldots+(1+i)^n] = e^{(1+i)x}\dfrac{(1+i)^{n+1}-1-i}{1+i-1} = e^{x(1+i)}\dfrac{\sqrt{2}}{i}(e^{\frac{(n+1)\pi i}{4}} - e^{\frac{\pi i}{4}}) =$ $= \dfrac{\sqrt{2}}{i}e^{x+(x+\frac{\pi}{4})i}\left(e^{\frac{n\pi i}{4}}-1\right) = -i\sqrt{2}\,e^x\left[\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}-1\right)$. La suma pedida es la parte imaginaria de este producto, es decir: $\sqrt{2}\,e^x\left[-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\dfrac{n\pi}{4}+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\dfrac{n\pi}{4}+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right] =$ $= \sqrt{2}\,e^x\left[-\cos\left(x+\dfrac{(n+1)\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\,e^x\sin\dfrac{n\pi}{8}\sin\left(x+\dfrac{(n+2)\pi}{8}\right)$.

R 71- Derivar la función $y = (\log_x \sin x)^x$.

Solución: Sustituyendo: $u = \log_x \sin x$, $y = u^x$, $u = \dfrac{\ln\sin x}{\ln x}$, $u' = \dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}\ln x - \frac{1}{x}\ln\sin x}{(\ln x)^2}$, $\ln y = x\ln u$, $\dfrac{y'}{y} = \ln u + x\dfrac{u'}{u}$, $y' = (\log_x \sin x)^x\left[\ln\dfrac{\ln\sin x}{\ln x} + x\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}\ln x - \frac{1}{x}\ln\sin x}{(\ln x)^2\frac{\ln\sin x}{\ln x}}\right]$.

R 72- Derivar la función $y = (\arcsin x)^{\arcsin x}$.

Solución: Tomando logaritmos y derivando, se tiene que: $\ln y = \arcsin x \cdot \ln\arcsin x$, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\ln\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}$. Despejando y', y sustituyendo el valor de y, se tiene: $y' = (\arcsin x)^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}\right)$. Sacando factor común $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, se tiene: $y' = (\arcsin x)^{\arcsin x}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\ln\arcsin x + 1)$.

R 73- Dada la función $y = \sqrt{ax+\sqrt{bx+\sqrt{ax+\ldots}}}$, hallar y' e y'' en función de x e y.

Solución: $y = \sqrt{ax+\sqrt{bx+y}}$, luego: $y^2 = ax+\sqrt{bx+y}$, $(y^2-ax)^2 = bx+y$. Derivando: $2(y^2-ax)(2yy'-a) = b+y'$. De donde se tiene: $y' = \dfrac{2a(y^2-ax)+b}{4y(y^2-ax)-1}$. Derivando en: $y'(4y^3-4axy-1) = 2a(y^2-ax)+b$, se tiene: $y''(4y^3-4axy-1)+y'(12y^2y'-4ay-4axy') =$ $= 2a(2yy'-a)$. De donde, despejando: $y'' = \dfrac{2a(2yy'-a)-y'(12y^2y'-4ay-4axy')}{4y^3-4axy-1} =$ $= \dfrac{4(y')^2(ax-3y^2)+8ayy'-2a^2}{4y^3-4axy-1}$. Sustituyendo y' por su valor, se tiene:

$$y'' = \frac{4(ax-3y^2)\left(\dfrac{2a(y^2-ax)+b}{4y(y^2-ax)-1}\right)^2 + 8ay\left(\dfrac{2a(y^2-ax)+b}{4y(y^2-ax)-1}\right) - 2a^2}{4y^3-4axy-1},$$

o lo que es lo mismo:

$$y'' = \frac{4(ax-3y^2)[2a(y^2-ax)+b]^2 + 8ay[2a(y^2-ax)+b] - 2a^2[4y(y^2-ax)-1]}{(4y^3-4axy-1)[4y(y^2-ax)-1]}.$$

R 74- Siendo $P(x)$ un polinomio en x de grado n, hallar la derivada del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} nP & P' & P'' & \ldots & P^{(n-2} & P^{(n-1} \\ (n-1)P' & P'' & P''' & \ldots & P^{(n-1} & P^{(n} \\ (n-2)P'' & P''' & P^{(4} & \ldots & P^{(n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2P^{(n-2} & P^{(n-1} & P^{(n} & \ldots & 0 & 0 \\ P^{(n-1} & P^{(n} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} nP' & P' & P'' & \ldots & P^{(n-2} & P^{(n-1} \\ (n-1)P'' & P'' & P''' & \ldots & P^{(n-1} & P^{(n} \\ (n-2)P''' & P''' & P^{(4} & \ldots & P^{(n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2P^{(n-1} & P^{(n-1} & P^{(n} & \ldots & 0 & 0 \\ P^{(n} & P^{(n} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nP & P'' & P'' & \ldots & P^{(n-2} & P^{(n-1} \\ (n-1)P' & P''' & P''' & \ldots & P^{(n-1} & P^{(n} \\ (n-2)P'' & P^{(4} & P^{(4} & \ldots & P^{(n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2P^{(n-2} & P^{(n} & P^{(n} & \ldots & 0 & 0 \\ P^{(n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\ldots+ \begin{vmatrix} nP & P' & P'' & \ldots & P^{(n-1} & P^{(n-1} \\ (n-1)P' & P'' & P''' & \ldots & P^{(n} & P^{(n} \\ (n-2)P'' & P''' & P^{(4} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2P^{(n-2} & P^{(n-1} & P^{(n} & \ldots & 0 & 0 \\ P^{(n-1} & P^{(n} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nP & P' & P'' & \ldots & P^{(n-2} & P^{(n} \\ (n-1)P' & P'' & P''' & \ldots & P^{(n-1} & 0 \\ (n-2)P'' & P''' & P^{(4} & \ldots & P^{(n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2P^{(n-2} & P^{(n-1} & P^{(n} & \ldots & 0 & 0 \\ P^{(n-1} & P^{(n} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Los determinantes 2º, 3º,..., $(n-1)$, son nulos por tener cada uno de ellos dos columnas iguales. Luego se tiene que:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} nP' & P' & P'' & \ldots & P^{(n-2} & P^{(n-1} \\ (n-1)P'' & P'' & P''' & \ldots & P^{(n-1} & P^{(n} \\ (n-2)P''' & P''' & P^{(4} & \ldots & P^{(n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2P^{(n-1} & P^{(n-1} & P^{(n} & \ldots & 0 & 0 \\ P^{(n} & P^{(n} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nP & P' & P'' & \ldots & P^{(n-2} & P^{(n} \\ (n-1)P' & P'' & P''' & \ldots & P^{(n-1} & 0 \\ (n-2)P'' & P''' & P^{(4} & \ldots & P^{(n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2P^{(n-2} & P^{(n-1} & P^{(n} & \ldots & 0 & 0 \\ P^{(n-1} & P^{(n} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} nP'-P' & P' & P'' & \ldots & P^{(n-2} & P^{(n-1} \\ (n-1)P''-P'' & P'' & P''' & \ldots & P^{(n-1} & P^{(n} \\ (n-2)P'''-P''' & P''' & P^{(4} & \ldots & P^{(n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2P^{(n-1}-P^{(n-1} & P^{(n-1} & P^{(n} & \ldots & 0 & 0 \\ P^{(n}-P^{(n}=0 & P^{(n} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nP & P' & P'' & \ldots & P^{(n-2} & P^{(n} \\ (n-1)P' & P'' & P''' & \ldots & P^{(n-1} & 0 \\ (n-2)P'' & P''' & P^{(4} & \ldots & P^{(n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2P^{(n-2} & P^{(n-1} & P^{(n} & \ldots & 0 & 0 \\ P^{(n-1} & P^{(n} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (n-1)P' & P' & P'' & \ldots & P^{(n-2} & P^{(n-1} \\ (n-2)P'' & P'' & P''' & \ldots & P^{(n-1} & P^{(n} \\ (n-3)P''' & P''' & P^{(4} & \ldots & P^{(n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P^{(n-1} & P^{(n-1} & P^{(n} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & P^{(n} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nP & P' & P'' & \ldots & P^{(n-2} & P^{(n} \\ (n-1)P' & P'' & P''' & \ldots & P^{(n-1} & 0 \\ (n-2)P'' & P''' & P^{(4} & \ldots & P^{(n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2P^{(n-2} & P^{(n-1} & P^{(n} & \ldots & 0 & 0 \\ P^{(n-1} & P^{(n} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el primer determinante por los elementos de la última fila (sólo hay un elemento), y el segundo por los de la última columna (sólo hay un elemento), se tiene:

$$\Delta' = (-1)^{n+1}P^{(n}\begin{vmatrix} (n-1)P' & P'' & \dots & P^{(n-2} & P^{(n-1} \\ (n-2)P'' & P''' & \dots & P^{(n-1} & P^{(n} \\ (n-3)P''' & P^{(4} & \dots & P^{(n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P^{(n-1} & P^{(n} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{n}P^{(n}\begin{vmatrix} (n-1)P' & P'' & P''' & \dots & P^{(n-1} \\ (n-2)P'' & P''' & P^{(4} & \dots & P^{(n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2P^{(n-2} & P^{(n-1} & P^{(n} & \dots & 0 \\ P^{(n-1} & P^{(n} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Como estos dos determinantes son iguales y están con el signo cambiado, $\Delta' = 0$.

R 75- Calcular la derivada enésima de la función $y = (ax^2+bx+c)\sin mx$.

Solución: $ax^2+bx+c = a(x-A)(x-B)$, siendo A y B las raíces de $ax^2+bx+c = 0$..Llamando: $y_1 = (ax^2+bx+c)\cos mx$, se tiene la función F que es igual a: $F = y_1 + iy = a(x-A)(x-B)e^{mxi}$. Haciendo: $mxi = t$, $p = \dfrac{Am}{i} = -Ami$, $q = \dfrac{Bm}{i} = -Bmi$, $\Phi = -\dfrac{m^2F}{a}$ se tiene que: $\Phi = (t+p)(t+q)e^t$. Las sucesivas derivadas de Φ son: $\Phi' = e^t[t^2+(p+q+2)t+p+q+pq]$, $\Phi'' = e^t[t^2+(p+q+4)t+2p+2q+pq+2],\dots$
$\Phi^{(n)} = e^t[t^2+(p+q+2n)t+np+nq+pq+n(n-1)]$. Por tanto, la derivada enésima de F es: $F^{(n)} = \dfrac{\cos mx + i\sin mx}{m^2}[m^2x^2+(A+B)m^2x+2nmxi-ABm^2-n(A+B)mi+n(n-1)]$. Luego: $y^{(n)} = \dfrac{a\cos mx}{m^2}[2mnx-n(A+B)] + \dfrac{a\sin mx}{m^2}[m^2x^2+(A+B)m^2x-ABm^2+n(n-1)] =$
$= \dfrac{a\cos mx}{m^2}\left[2mnx+n\dfrac{b}{a}\right] + \dfrac{a\sin mx}{m^2}\left[m^2x^2-\dfrac{b}{a}m^2x-\dfrac{c}{a}m^2+n(n-1)\right]$.

R 76- Calcular la derivada de orden $n+2$ de $y = \cos(\lambda\arcsin x)$ para el valor particular $x = 0$. Indicar si en la serie de derivadas hay algunas nulas en general, y en particular para el valor $\lambda = 12$.

Solución: Derivando: $y' = -\sin(\lambda\arcsin x)\cdot\lambda\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y'\sqrt{1-x^2} = -\lambda\sin(\lambda\arcsin x)$, $y''\sqrt{1-x^2} - \dfrac{xy'}{\sqrt{1-x^2}} = -\lambda^2\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos(\lambda\arcsin x) = 0$. Es decir: $y''(1-x^2)-xy'+\lambda^2y = 0$. Derivando esta ecuación sucesivamente, se tiene: $y'''(1-x^2)-3xy''+(\lambda^2-1)y' = 0$, $y^{(4}(1-x^2)-5xy'''+(\lambda^2-4)y'' = 0$, $y^{(n+2)}(1-x^2)-(2n+1)xy^{(n+1)}+(\lambda^2-n^2)y^{(n)} = 0$, Para $x = 0$, se tiene: $y^{(n+2)}+(\lambda^2-n^2)y^{(n)} = 0$, $y^{(n+2)} = (n^2-\lambda^2)y^{(n)}$. Por tanto: $y^{(2n)}(0) = \left[(2n-2)^2-\lambda^2\right]\left[(2n-4)^2-\lambda^2\right]\dots[2^2-\lambda^2][-\lambda^2]$. Como $y'(0) = 0$, se tiene: $y' = y''' = \dots = y^{(2n+1)} = 0$. Luego todas las derivadas de orden impar son nulas. Para $\lambda = 12$, se tiene: $y^{(14)} = (12^2-12^2)y^{(12)} = 0$, luego la derivada decimocuarta es nula en el origen.

R 77- Hallar la derivada de $A = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix}$.

Solución:

$$A' = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ 0 & -1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= -A_{11}-A_{22}-A_{33}$.

R 78- Demostrar la fórmula de Bernan: $x^{n+1}\dfrac{d^n}{dx^n}[x^{n-1}f(x)] = \left(x^2\dfrac{d}{dx}\right)^n f(x)$.

Solución: La siguiente demostración se realiza por inducción.
Para $n = 1$, $x^2\dfrac{d}{dx}[f(x)] = x^2f'(x)$, $\left(x^2\dfrac{d}{dx}\right)^1 f(x) = x^2f'(x)$, luego se cumple la igualdad.
Para $n = 2$, $x^3\dfrac{d^2}{dx^2}[xf(x)] = x^3\dfrac{d}{dx}[f(x)+xf'(x)] = x^3[2f'(x)+xf''(x)] = 2x^3f'(x)+x^4f''(x)$, $\left(x^2\dfrac{d}{dx}\right)^2 f(x) = \left(x^2\dfrac{d}{dx}\right)[x^2f'(x)] = x^2[2xf'(x)+x^2f''(x)] = 2x^3f'(x)+x^4f''(x)$, luego se cumple la

igualdad. Por tanto la fórmula es válida para $n=1$ y para $n=2$. A continuación se demuestra que, suponiendo que es válida para n, lo es para $n+1$, es decir que: $x^{n+2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[x^n f(x)]=\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^{n+1}f(x)$. En efecto:

$$x^{n+2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[x^n f(x)]=x^{n+2}\frac{d}{dx}\frac{d^n}{dx^n}[x\cdot x^{n-1}f(x)]=$$

$$=x^{n+2}\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{0}x\frac{d^n}{dx^n}[x^{n-1}f(x)]+\binom{n}{1}1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[x^{n-1}f(x)]\right]=$$

$$=x^{n+2}\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{x^n}\frac{d^n}{dx^n}[x^{n-1}f(x)]+n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[x^{n-1}f(x)]\right]=$$

$$=x^{n+2}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^n}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^n f(x)+n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[x^{n-1}f(x)]\right]=$$

$$=x^{n+2}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^n}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\right]+x^{n+2}\frac{d}{dx}\left[n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[x^{n-1}f(x)]\right]=$$

$$=x^{n+2}\left[\frac{1}{x^n}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^n f(x)-\frac{n}{x^{n+1}}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\right]+x^{n+2}n\left[\frac{d^n}{dx^n}[x^{n-1}f(x)]\right]=$$

$$=\left[x^2\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^n f(x)-\frac{nx^{n+2}}{x^{n+1}}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\right]+x^{n+2}n\left[\frac{d^n}{dx^n}[x^{n-1}f(x)]\right]=$$

$=\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^{n+1}f(x)-nx\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^n f(x)+xn\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^n f(x)=\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^{n+1}f(x)$, con lo que queda demostrada la fórmula de Bernan.

R 79- Hallar la derivada enésima de $y=\frac{1}{e^x+1}$.

Solución: Las sucesivas derivadas son: $y'=\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$; $y''=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3};\ldots$, luego: $y^{(n)}=\frac{a_1e^x+a_2e^{2x}+\ldots+a_{n-1}e^{(n-1)x}+a_ne^{nx}}{(e^x+1)^{n+1}}$, es decir:

$(e^x+1)^{n+1}y^{(n)}=a_1e^x+a_2e^{2x}+\ldots+a_{n-1}e^{(n-1)x}+a_ne^{nx}$ (**a**). Por otra parte, haciendo la división: $\frac{1}{e^x+1}=e^{-x}-e^{-2x}+e^{-3x}-\ldots$, y derivando este cociente, se tiene: $y'=-e^{-x}+2e^{-2x}-3e^{-3x}+\ldots$, $y^{(n)}=(-1)^n(1^ne^{-x}-2^ne^{-2x}+3^ne^{-3x}+\ldots)$ (**b**).

Además: $(e^x+1)^{n+1}=e^{(n+1)x}+\binom{n+1}{1}e^{nx}+\binom{n+1}{2}e^{(n-1)x}+\ldots$ (**c**). Como: (**a**) = (**b**) $\cdot$ (**c**), se tiene: $(e^x+1)^{n+1}y^{(n)}=(-1)^n(1^ne^{-x}-2^ne^{-2x}+3^ne^{-3x}+\ldots)[e^{(n+1)x}+\binom{n+1}{1}e^{nx}+\binom{n+1}{2}e^{(n-1)x}+\ldots]=$ $=a_1e^x+a_2e^{2x}+\ldots+a_{n-1}e^{(n-1)x}+a_ne^{nx}$. Teniendo en cuenta (**a**), el número de términos ha de ser finito y los exponentes deben ser positivos. Por tanto:

$y^{(n)}(-1)^n(e^x+1)^{n+1}=e^{nx}-[2^n-\binom{n+1}{1}]e^{(n-1)x}+[3^n-\binom{n+1}{1}2^n+\binom{n+1}{2}]e^{(n-2)x}+\ldots$.

Luego: $y^{(n)}=(-1)^n\frac{e^{nx}-[2^n-\binom{n+1}{1}]e^{(n-1)x}+[3^n-\binom{n+1}{1}2^n+\binom{n+1}{2}]e^{(n-2)x}+\ldots}{(e^x+1)^{n+1}}$.

R 80- Entre las derivadas $f^{(n+1)}(x)$ y $f^{(n+2)}(x)$ de la función $f(x)=x^n(\ln x)^2$ existe la relación: $x^2f^{(n+2)}(x)+xf^{(n+1)}(x)=A_n$, en la que A_n es independiente de x. Calcular A_n.

Solución: $f'(x)=\left[n(\ln x)^2+2\ln x\right]x^{n-1}$, $f''(x)=[n(n-1)(\ln x)^2+2[n+(n-1)]\ln x+2]x^{n-2}$, $\frac{f'''(x)}{x^{n-3}}=n(n-1)(n-2)(\ln x)^2+2[n(n-1)+n(n-2)+(n-1)(n-2)]\ln x+2(n+n-1+n-2)$

Por tanto, se induce que: $f^{(m)}=[A_{m,m}(\ln x)^2+2A_{m,m-1}\ln x+2A_{m,m-2}]x^{n-m}$, en donde $A_{m.p}$ es la suma de todos los productos posibles de p factores de la serie: $n,\ n-1,\ n-2,\ldots,\ n-m+1$. Para $n=m$, se tiene: $f^{(n)}=A_{n,n}(\ln x)^2+2A_{n,n-1}\ln x+2A_{n,n-2}$, $f^{(n+1)}=2A_{n,n}\frac{\ln x}{x}+2A_{n,n-1}\frac{1}{x}$, $f^{(n+2)}=-2A_{n,n}\frac{\ln x}{x^2}+2A_{n,n}\frac{1}{x^2}-2A_{n,n-1}\frac{1}{x^2}$. Luego: $x^2f^{(n+2)}+xf^{(n+1)}=2A_{n,n}=2\cdot n!$, ya que $A_{n,n}$ es la suma de todos los productos posibles de n factores de la serie: $n,\ n-1,\ n-2,\ldots,\ 1$, es decir, que como hay n factores, sólo hay un producto: $n(n-1)(n-2)\ldots1=n!$. Y como por el enunciado: $x^2f^{(n+2)}(x)+xf^{(n+1)}(x)=A_n$, resulta que: $A_n=2A_{n,n}=2\cdot n!$.

R 81- Demostrar la igualdad: $[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\theta)i$, siendo $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Solución: Sean: $S=[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}$, $C=[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)}$, $C+iS=(e^{ax}e^{(bx+c)i})^{(n)}$. Luego: $C+iS=(e^{ax+(bx+c)i})^{(n)}=e^{ci}(e^{(a+bi)x})^{(n)}=e^{ci}(a+bi)^ne^{(a+bi)x}=e^{ci}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{n\theta i}e^{(a+bi)x}=$ $=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{(a+bi)x+(c+n\theta)i}=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}[\cos(bx+c+n\theta)+i\sin(bx+c+n\theta)]$. Por tanto,

considerando las partes imaginarias: $S = [e^{ax}\sin(bx + c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx + c + n\theta)$.
Considerando las partes reales: $C = [e^{ax}\cos(bx + c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx + c + n\theta)$.

S 1- Desarrollar en serie de potencias de $(x-\frac{\pi}{6})$ la función $y=\sin x$, completando el desarrollo con el resto de Lagrange.

Solución: La fórmula de Taylor para el desarrollo en serie de potencias de una función es la siguiente: $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$ El resto de Lagrange es: $R_L=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, en donde ξ es un punto intermedio entre a y x, es decir, llamando: $h=x-a$, $\xi=a+\theta h$, $0<\theta<1$. Las sucesivas derivadas de $f(x)$ son: $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x,\ldots$, $f^{(4m)}(x)=\sin x$, $f^{(4m+1)}(x)=\cos x$, $f^{(4m+2)}(x)=-\sin x$, $f^{(4m+3)}(x)=-\cos x,\ldots$ Y sus valores para $a=\frac{\pi}{6}$, son: $f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$, $f'(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f''(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$, $f'''(\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f^{(4)}(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2},\ldots$ Por tanto, el desarrollo pedido es el siguiente: $y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2\cdot 2!}(x-\frac{\pi}{6})^2+\ldots+\frac{1}{2\cdot(4m)!}(x-\frac{\pi}{6})^{4m}+$
$+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot(4m+1)!}(x-\frac{\pi}{6})^{4m+1}-\frac{1}{2\cdot(4m+2)!}(x-\frac{\pi}{6})^{4m+2}-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot(4m+3)!}(x-\frac{\pi}{6})^{4m+3}+$
$+\frac{\sin(\xi)}{(4m+4)!}(x-\frac{\pi}{6})^{4m+4}$.

S 2- Desarrollar en serie de potencias de x la función $y=\ln(1-x)$ completando el desarrollo con el resto de Cauchy.

Solución: La fórmula de Mac-Laurin es: $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$ El resto de Cauchy es: $R_C=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n$. Para $a=0$, $R_C=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}x(x-\xi)^n$, en donde: $\xi=\theta x$, $0<\theta<1$. Las sucesivas derivadas de $f(x)=\ln(1-x)$, son: $f'(x)=-(1-x)^{-1}$, $f''(x)=(1-x)^{-2},\ldots$, $f^{(n)}=(-1)^n(n-1)!(1-x)^n$. Y los valores para $x=0$ son: $f(0)=0$, $f'(0)=-1$, $f''(0)=1$, $f'''(0)=-2,\ldots$, $f^{(n)}(0)=(-1)^n(n-1)!$ Por tanto el desarrollo pedido es: $y=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+(-1)^{n+1}x(x-\xi)^n$.

S 3- Desarrollar en serie de potencias de x la función $y=(1-x)^m$, siendo m un número irracional, completando el desarrollo con el resto de Schloemilch.

Solución: Las sucesivas derivadas de y, son: $y'=-m(1-x)^{m-1}$, $y''=m(m-1)(1-x)^{m-2},\ldots$ $y^{(n)}=(-1)^n m(m-1)\ldots(m-n+1)(1-x)^{m-n}$. Los valores para $x=0$, son: $y(0)=1$, $y'(0)=-m$, $y''(0)=m(m-1),\ldots$, $y^{(n)}(0)=(-1)^n m(m-1)\ldots(m-n+1)$. Por no ser m un número entero, y se puede derivar indefinidamente. El resto de Schloemilch es: $R_S=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p\cdot n!}(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}$. Para $a=0$, $R_S=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p\cdot n!}x^p(x-\xi)^{n-p+1}$, siendo $\xi=\theta x$, con $0<\theta<1$. Por tanto: $y=(1-x)^m=1-mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$
$+(-1)^n\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+(-1)^{n+1}\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{p\cdot n!}x^p(x-\xi)^{m-p+1}$.

Nota: Haciendo en R_S, $p=1$, se obtiene el resto de Cauchy (R_C). Haciendo $p=n+1$, se obtiene el resto de Lagrange (R_L).

S 4- Desarrollar en serie de potencias de x la función $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, completando el desarrollo con el resto de Lagrange.

Solución: $y=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\binom{-\frac{1}{2}}{1}x^2+\binom{-\frac{1}{2}}{2}x^4+\ldots+(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}+\ldots$ De donde se obtienen los siguientes valores: $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-2\binom{-\frac{1}{2}}{1}=1$, $y'''(0)=0$,

$y^{(4)}(0) = 4!\binom{\frac{-1}{2}}{2} = 9$, $y^{(2m-1)}(0) = 0$, $y^{(2m)}(0) = (-1)^m n!\binom{\frac{-1}{2}}{n} = \dfrac{(2m)!(2m-1)!!}{m!2^m}$. Luego el desarrollo pedido es: $y = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3x^4}{8} + \ldots + \dfrac{(2m-1)!!x^{2m}}{m!2^m} + \dfrac{f^{(2(m+1))}(\xi)x^{2m+1}}{(2(m+1))!}$.

S 5- Desarrollar en serie de potencias de x la función $y = \arctan x$, completando el desarrollo con el resto de Cauchy.

Solución: Derivando: $y' = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$ Integrando esta serie, se tiene el desarrollo pedido: $y = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{y^{(n+2}(\xi)}{(2n+1)!} x(x-\xi)^{2n+1}$.

S 6- Desarrollar en serie de potencias de x la función $y = e^x$, completando el desarrollo con el resto de Lagrange e indicar cuántos términos hay que tomar en la serie para hallar el valor del número e con error $\varepsilon < \dfrac{1}{10^7}$.

Solución: $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{e\theta}{n!}x^n$. Para $x = 1$, $y(1) = e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{e^\theta}{n!}$. Por tanto: $\dfrac{e^\theta}{n!} < \dfrac{1}{10^7}$, luego hay que tomar: $n = 11$ términos.

S 7- Desarrollar por Mac-Laurin $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, hallando el término enésimo.

Solución: $y^{(n)} = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$. Para $x = 0$, $y^{(n)}(0) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}$. Por tanto el desarrollo pedido es: $y = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3x^2}{4 \cdot 2!} + \ldots + \dfrac{(2n-1)!!x^n}{2^n \cdot n!} + \ldots$.

S 8- Demostrar la fórmula $e^{xi} = \cos x + i \sin x$, por medio de los desarrollos en serie de e^x, $\cos x$ y $\sin x$, siendo $i = \sqrt{-1}$.

Solución: Los desarrollos en serie de potencias de $\cos x$ y $\sin x$, son los siguientes: $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^m \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots$, Por tanto, el desarrollo de $i\sin x$ es: $i\sin x = ix - i\dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^m i \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots$, El desarrollo de e^x es: $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$. Luego: $e^{xi} = 1 + ix - \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + i^n \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$ Sumando los desarrollos anteriores de $\cos x$ y de $i\sin x$, se obtiene efectivamente el desarrollo de e^{xi}: $\cos x + i \sin x = 1 + ix - \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + i^n \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = e^{xi}$.

S 9- En el desarrollo de e^x se toman diez términos para calcular $\sqrt{e}$. Hallar una cota superior de la suma de los términos despreciados.

Solución: El desarrollo de e^x es: $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{e^\xi x^n}{n!}$. Luego para $x = \dfrac{1}{2}$, se tiene: $\sqrt{e} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{e^\xi}{n!2^n}$, con $0 < \xi < \dfrac{1}{2}$. Para $n = 10$, el error ϵ cometido es: $\varepsilon < \dfrac{e^\xi}{n!2^n} < \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{10!2^{10}} < \dfrac{2}{10!2^{10}} = \dfrac{1}{10!2^9}$.

S 10- Hallar cuántos términos hay que tomar en el desarrollo de e^x para calcular $e^{\frac{1}{3}}$ de manera que la suma de los términos despreciados sea menor que 10^{-6}.

Solución: $e^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{18} + \ldots + \dfrac{e^\xi}{n!3^n}$, siendo: $0 < \xi < \dfrac{1}{3}$. Por tanto: $\varepsilon = \dfrac{e^\xi}{n!3^n} < \frac{1}{10^6}$. Es decir: $n!3^n > 10^6 e^\xi$. Para $n = 7$, se tiene que: $n!3^n = 11022480 > 10^6 \cdot 2$. Para $n = 6$, se tiene que: $n!3^n = 524880 < 10^6$. Luego hay que tomar siete términos.

S 11- Hallar cinco términos del desarrollo en serie de $y = \tan x$.

Solución: Dividiendo los desarrollos de $\sin x$ y $\cos x$, se obtiene el desarrollo de $\tan x$:

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots} =$$
$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots$$

S 12- Desarrollar por Mac-Laurin $y = e^{(e^x)}$, calculando los cinco primeros términos.

Solución: Tomando logaritmos y derivando sucesivamente, se tiene: $\ln y = e^x$, $\frac{y'}{y} = e^x$, $y' = e^x y$, $y'' = e^x(y + y')$, $y''' = e^x(y'' + 2y' + y), \ldots$ Para $x = 0$, se tiene: $y(0) = e$, $y'(0) = e$, $y''(0) = 2e$, $y'''(0) = 5e$, $y^{(4)}(0) = 15e$. Por tanto: $y = e + ex + ex^2 + \frac{5}{6}ex^3 + \frac{5}{8}ex^4 + \ldots$

S 13- Hallar una cota del error cometido al tomar por $\cos \frac{\pi}{10}$, el número $A = 1 - \frac{\pi^2}{200} + \frac{\pi^4}{240.000}$.

Solución: Por ser el desarrollo en serie de $\cos \frac{\pi}{10}$ una suma alternada, el error cometido al tomar n términos es menor que el término $n+1$. El número A corresponde a la suma de los tres primeros términos del desarrollo de $\cos \frac{\pi}{10}$, luego el error cometido es menor que el cuarto término que es: $\frac{\pi^6}{6!10^6} \approx \frac{1}{750.000}$.

S 14- Dado el polinomio $P(x) = x^4 + 2,5x^3 - 1,5x^2 - 0,8x - 3,2$, calcular su desarrollo en potencias de $(x + 2,2)$, realizando las operaciones con dos decimales.

Solución:

	1	2,50	−1,50	−0,80	−3,20
−2,20		−2,20	−0,66	4,75	−8,69
	1	0,30	−2,16	3,95	**−11,89**
		−2,20	4,18	−4,44	
	1	−1,90	2,02	**−0,49**	
		−2,20	9,02		
	1	−4,10	**11,04**		
		−2,20			
	1	**−6,30**			

Se tiene: $f(-2,2) = -11,89$, $f'(-2,2) = -0,49$, $f''(-2,2) = 11,04 \cdot 2!$, $f'''(-2,2) = -6,3 \cdot 3!$, $f^{(4)}(-2,2) = 1 \cdot 4!$. Luego el desarrollo de $P(x)$ en potencias de $(x + 2,2)$ es el siguiente: $P(x) = -11,89 - 0,49(x + 2,2) + 11,04(x + 2,2)^2 - 6,3(x + 2,2)^3 + (x + 2,2)^4$.

S 15- Desarrollar en serie $y = e^x \cdot \sin x$, hallando los coeficientes de x^{4n+1}, x^{4n+2}, x^{4n+3}.

Solución: $f' = e^x(\sin x + \cos x)$, $f'' = 2e^x \cos x$, $f''' = 2e^x(-\sin x + \cos x)$, $f^{(4)} = -4e^x \sin x, \ldots$ Generalizando: $f^{(4n)} = (-1)^n 4^n e^x \sin x$, $f^{(4n+1)} = (-1)^n 4^n e^x(\sin x + \cos x)$, $f^{(4n+2)} = (-1)^n 4^n 2e^x \cos x$, $f^{(4n+3)} = (-1)^n 4^n 2e^x(-\sin x + \cos x)$, $f^{(4n+4)} = (-1)^{n+1} 4^{n+1} e^x \sin x$. Los respectivos valores para $x = 0$, son: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = 2, \ldots$, $f^{4n)}(0) = 0$, $f^{(4n+1)}(0) = (-1)^n 4^n$, $f^{(4n+2)}(0) = (-1)^n 4^n 2$, $f^{(4n+3)}(0) = (-1)^n 4^n 2$, $f^{(4n+4)}(0) = 0$. Luego el desarrollo en serie de potencias de $y = e^x \cdot \sin x$, es el siguiente: $y = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} + \ldots + \frac{(-1)^n 4^n x^{4n+1}}{(4n+1)!} + \frac{(-1)^n 4^n 2x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{(-1)^n 4^n 2x^{4n+3}}{(4n+3)!} + \ldots$

S 16- Calcular el valor del polinomio $P(x) = x^6 - 3,4x^2 + x + 2$, y el de sus derivadas sucesivas para $x = 2,15$, realizando las operaciones con dos decimales.

Solución:

	1	0	0	0	$-3,40$	$1,00$	$2,00$
$2,15$		$2,15$	$4,62$	$9,94$	$21,37$	$38,63$	$85,20$
	1	$2,15$	$4,62$	$9,94$	$17,97$	$39,63$	$\mathbf{87,20}$
		$2,15$	$9,25$	$29,81$	$85,46$	$222,38$	
	1	$4,30$	$13,87$	$39,75$	$103,43$	$\mathbf{262,01}$	
		$2,15$	$13,87$	$59,64$	$213,69$		
	1	$6,45$	$27,74$	$99,39$	$\mathbf{317,12}$		
		$2,15$	$18,49$	$99,39$			
	1	$8,60$	$46,23$	$\mathbf{198,78}$			
		$2,15$	$23,11$				
	1	$10,75$	$\mathbf{69,34}$				
		$2,15$					
	1	$\mathbf{12,90}$					

Los valores del polinomio y de sus sucesivas derivadas para $x = 2,15$, son: $f(2,15) = 87,2$, $f'(2,15) = 262,01$, $f''(2,15) = 317,12 \cdot 2! = 634,24$, $f'''(2,15) = 198,78 \cdot 3! = 1192,68$, $f^{(4)} = 69,34 \cdot 4! = 1664,16$, $f^{(5)} = 12,9 \cdot 5! = 1548$, $f^{(6)} = 1 \cdot 6! = 720$.

S 17- Dada la ecuación de tercer grado $y^3 - y + x = 0$, desarrollar en serie entera de x sus tres raíces, hallando sus tres primeros términos no nulos.

Solución: Derivando sucesivamente la ecuación se tiene: $3y^2y' - y' + 1 = 0$,
$6yy'^2 + 3y^2y'' - y'' = 0$, $6y'^3 + 18yy'y'' + 3y^2y''' - y''' = 0$,
$36y'^2y'' + 18yy''^2 + 24yy'y''' + 3y^2y^{(4)} - y^{(4)} = 0$,
$80y'y''^2 + 60y'^2y''' + 60yy''y''' + 30yy'y^{(4)} + 3y^2y^{(5)} - y^{(5)} = 0, \ldots$
De donde: $y' = (1-3y^2)^{-1}$, $y'' = 6yy'^3$, $y''' = 6y'^{4)} + 108y^2y'^{5)}$, $y^{(4)} = 360yy'^6 + 3240y^3y'^7$, $y^{(5} = 360y'^7 + 22.680y^2y'^8 + 136.080y^4y'^9$. Para $x = 0$, la ecuación dada tiene las raíces: 0 y ± 1. Sustituyendo estos tres valores de y en las igualdades anteriores, se tiene el siguiente cuadro de valores para las correspondientes derivadas en el origen ($x = 0$):

y	y'	y''	y'''	$y^{(4)}$	$y^{(5)}$
0	1	0	6	0	360
1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-3		
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-3		

Los correspondientes desarrollos en serie son (con los primeros tres términos no nulos):
$y(0) = 0 + \frac{1 \cdot x}{1!} + 0 + \frac{6x^3}{3!} + 0 + \frac{360x^5}{5!} + \ldots = x + x^3 + 3x^5 + \ldots$
$y(1) = 1 - \frac{1 \cdot x}{2 \cdot 1!} - \frac{3x^2}{4 \cdot 2!} + \ldots = 1 - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} + \ldots$
$y(-1) = -1 - \frac{1 \cdot x}{2 \cdot 1!} + \frac{3x^2}{4 \cdot 2!} + \ldots = -1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \ldots$

S 18- Hallar por desarrollo en serie, el verdadero valor para $x = 0$, de $y = \dfrac{e^{\arcsin x} - e^{\sin x}}{e^{\tan x} - e^{\arctan x}}$.

Solución:
$$y = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{5x^4}{24} + \ldots\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{24} + \ldots\right)}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{8} + \ldots\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24} + \ldots\right)} =$$

$= \dfrac{\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + \ldots}{\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^3}{3} + \ldots}$. Para $x = 0$, el verdadero valor de esta expresión es: $\frac{1}{2}$.

S 19- Desarrollar en serie la función $y = \dfrac{x^2}{x^3+1}$.

Solución: Realizando la división $\dfrac{x^2}{1+x^3}$, se obtiene como cociente el desarrollo pedido: $y = x^2 - x^5 + x^8 - x^{11} + \ldots + (-1)^n x^{3n+2} + (-1)^n x^{3n+5} + \ldots$

S 20- Dada la función $y = (\arcsin x)^2$, hallar la ley recurrente entre sus derivadas consecutivas, la aplicación de esta ley en el origen ($x = 0$), y el desarrollo en serie de Mac-Laurin.

Solución: $y' = 2(\arcsin x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 2y^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $y'^2(1-x^2) = 4y$. Derivando sucesivamente se tiene: $y''(1-x^2) = 2 + xy'$, $y'''(1-x^2) = y' + 3xy''$, $y^{(4)}(1-x^2) = 4y'' + 5xy'''$, $y^{(5}(1-x^2) = 9y''' + 7xy^{(4}$. Luego la ley de recurrencia entre las derivadas, es: $y^{(n)}(1-x^2) = (n-2)^2 y^{(n-2)} + (2n-3)xy^{(n-1)}$. Para $x = 0$, la ley es: $y^{(n)} = (n-2)^2 y^{(n-2)}$. Por tanto, el desarrollo en serie es: $y = \dfrac{2x^2}{2!} + \dfrac{8x^4}{4!} + \dfrac{128x^6}{6!} + \dfrac{4.608x^8}{8!} + \ldots = x^2 + \dfrac{x^4}{3} + \dfrac{8x^6}{45} + \dfrac{4x^8}{35} + \ldots$

S 21- Se sabe que una función $y = f(x)$ verifica la ecuación diferencial $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x+y+1}}$, y que para $x = 0, y = 1$. Hallar los cuatro primeros términos del desarrollo en serie de $f(x)$.

Solución: Las sucesivas derivadas son las siguientes: $y'' = -\dfrac{1}{2}(x+y+1)^{-\frac{3}{2}}(1+y')$, $y''' = -\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{3}{2}(x+y+1)^{-\frac{5}{2}}(1+y')^2 + (x+y+1)^{-\frac{3}{2}}y''\right]$. Los valores de la función y sus derivadas para $x = 0$, son los siguientes: $y(0) = 1$, $y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{0+1+1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
$y''(0) = -\dfrac{1}{2}(0+1+1)^{-\frac{3}{2}}(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{8}$,
$y'''(0) = -\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{3}{2}(0+1+1)^{-\frac{5}{2}}(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 - \dfrac{1+\sqrt{2}}{8}(0+1+1)^{-\frac{3}{2}}\right] = \dfrac{7+5\sqrt{2}}{32}$. Por tanto el desarrollo de $f(x)$ es: $y = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{1+\sqrt{2}}{16}x^2 + \dfrac{7+5\sqrt{2}}{192}x^3 + \ldots$

S 22- Desarrollar en serie la función $y = e^{\arcsin x}$, hallando el término enésimo.

Solución: $y' = y(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $y''(1-x^2) = y + xy'$, $y'''(1-x^2)2y' + 3xy'', \ldots$ De donde: $y'' = \dfrac{y+xy'}{1-x^2}$, $y''' = \dfrac{2y'+3xy''}{1-x^2}, \ldots$ $y^{(n)} = \dfrac{\left[(n-2)^2+1\right]y^{(n-2)} + [2(n-2)+1]xy^{(n-1)}}{1-x^2}$. Para $x = 0$, se tiene: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 2$, $y^{(4)}(0) = 5$, $y^{(5)}(0) = 20$, $y^{(6)}(0) = 85$, $y^{(7)}(0) = 520, \ldots$, $y^{(n)}(0) = \left[(n-2)^2+1\right]\left[(n-4)^2+1\right]\left[(n-6)^2+1\right]\ldots$ Por tanto el desarrollo pedido es: $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{24}x^4 + \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{17}{144}x^6 + \dfrac{13}{126}x^7 + \ldots +$ $+ \dfrac{\left[(n-2)^2+1\right]\left[(n-4)^2+1\right]\ldots}{n!}x^n + \ldots.$

S 23- Desarrollar en serie la función $y = [\ln(1-x)]^2$, hallando el término enésimo.

Solución: El desarrollo de y' es: $y' = 2\ln(1-x)\dfrac{-1}{1-x} = 2\dfrac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots}{1-x} =$ $= 2x + 2\left(1+\dfrac{1}{2}\right)x^2 + 2\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)x^3 + \ldots + 2\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)x^n + \ldots$ Integrando esta serie se tiene el desarrollo pedido: $y = x^2 + x^3 + \dfrac{11}{12}x^4 + \ldots + \dfrac{2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}{n}x^n + \ldots$ La ley de recurrencia entre las derivadas sucesivas es: $y^{(n)} = (n-1)y^{(n-1)} + 2(n-2)!$

S 24- Desarrollar en serie entera de Mac-Laurin la función $y = \dfrac{2x^2}{x^3+2}$, hallando el coeficiente del término x^{3n+2} y el radio de convergencia.

Solución: Realizando la división $\dfrac{2x^2}{2+x^3}$ se obtiene como cociente la expresión:

$y = x^2 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^8}{4} - \frac{x^{11}}{8} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{3n+2}}{2^n} + \ldots$ Para $x^3 + 2 = 0$, $x = -\sqrt[3]{2}$. Luego el radio de convergencia es: $\left|\sqrt[3]{2}\right|$.

S 25- Calcular por desarrollo en serie el verdadero valor para $x = 0$, de $y = \frac{\tan x - \sin x}{(\sin x)^3}$.

Solución:

$$y = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{(\sin x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x\,(\sin x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots}{x^2 - \frac{5x^4}{6} + \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \ldots}{1 - \frac{5x^2}{6} + \ldots} = \frac{1}{2}.$$

S 26- Obtener el desarrollo en serie de $y = \frac{3x^2 - x + 1}{(x^2 - 5x + 6)(x^2+1)}$, descomponiendo previamente en fracciones simples.

Solución: $y = \frac{\frac{5}{2}}{-3+x} - \frac{\frac{11}{5}}{-2+x} - \frac{\frac{1}{10}(1+3x)}{1+x^2} = \frac{5}{2}\left(\frac{-1}{3} - \frac{x}{3^2} - \frac{x^2}{3^3} - \ldots - \frac{x^n}{3^n} - \ldots\right) -$

$- \frac{11}{5}\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} - \frac{x^2}{2^3} - \ldots - \frac{x^n}{2^n} - \ldots\right) - \frac{1}{10}(1+3x)(1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots) =$

$$= \sum \left[-\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} - (-1)^n \frac{1}{10} \right] x^{2n} +$$

$$+ \sum \left[-\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{2^{2n+2}} - (-1)^n \frac{3}{10} \right] x^{2n+1} = \frac{1}{6} - \frac{x}{36} + \frac{61x^2}{216} - \ldots$$

S 27- Obtener los distintos desarrollos en serie según las potencias de z que definen en todo el plano a la función $f(z) = \frac{2z^3 - 9z^2 + 50z - 75}{z^4 - 6z^3 + 50z^2 - 150z + 625}$.

Solución: Se tiene: $f(z) = \frac{1}{2}\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{2}\frac{F'(z)}{(z+5i)(z-5i)(z-3+4i)(z-3-4i)(*)} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+5i} + \frac{1}{z-5i} + \frac{1}{z-3+4i} + \frac{1}{z-3-4i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5i\left(1+\frac{z}{5i}\right)} - \frac{1}{5i\left(1-\frac{z}{5i}\right)} - \frac{1}{(-3+4i)\left(1-\frac{z}{-3+4i}\right)} - \frac{1}{(3+4i)\left(1-\frac{z}{3+4i}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum \frac{(-1)z^n}{(5i)^{n+1}} - \sum \frac{1}{(5i)^{n+1}} - \sum \frac{1}{(-3+4i)^{n+1}} - \sum \frac{1}{(3+4i)^{n+1}}\right), \text{ para } |z| < 5.$$

Si $|z| > 5$, se tiene que: $\frac{1}{z+5i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{5i}{z}} = \sum \frac{(-5i)^n}{z^n}$, y $\frac{1}{z-5i} = \sum \frac{(5i)^n}{z^n}$.

Luego: $2f(z) = \ldots + \frac{(5i)^n}{z^{n+1}}[(-1)^n + i^n] + \ldots - \frac{50}{z^3} + \frac{2}{z} + \frac{8i}{25} - z\left[\left(\frac{1}{3+4i}\right)^2 + \left(\frac{1}{-3+4i}\right)^2\right] +$

$+ \ldots - z^n\left[\left(\frac{1}{-3+4i}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3+4i}\right)^{n+1}\right] + \ldots$

$(*)$ La distancia de las cuatro raíces al polo es 5.

S 28- Obtener el desarrollo en serie de $\ln\frac{1+x}{1-x}$ y hallar su campo de convergencia.

Solución: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$, $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$. Por tanto: $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Como: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2n+1}{2n-1}x^2$ ha de ser menor que 1, $|x| < 1$.

S 29- Sumar $y = \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 5 - 2^{n+2})x^n$.

Solución: Se tiene que la suma dada es: $y = \sum_{n=0}^{\infty} 3nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} 5x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+2}x^n = 3xS_1 + 5S_2 - 4S_3$.

$S_1 = 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots = \dfrac{d}{dx}(x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots) = \dfrac{d}{dx}\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, para $x<1$; $S_2 = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots = \dfrac{1}{1-x}$, para $x<1$; $S_3 = 1+2x+(2x)^2+\ldots+(2x)^n+\ldots = \dfrac{1}{1-2x}$, para $2x<1$. Luego para $x<\dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{3x}{(1-x)^2}+\dfrac{5}{1-x}-\dfrac{4}{1-2x} = \dfrac{1-4x}{1-4x+5x^2-2x^3}$.

S 30- Calcular el verdadero valor para $x=0$, de $y = \dfrac{6x\csc x - x^2 - 6}{x^4}$. Nota: csc = cosecante.

Solución: Desarrollando en serie $\csc x$: $y = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x\left[\frac{1}{x}+\frac{x}{6}-\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{3!3!}\right)x^3+\ldots\right]-x^2-6}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\left[-6\left(\dfrac{1}{5!}-\dfrac{1}{3!3!}\right)+Ax+\ldots\right] = \dfrac{7}{60}$.

S 31- Desarrollar en serie de potencias de x la función $y=e^{ax}\cos bx$, introduciendo la variable $\theta = \arctan\dfrac{b}{a}$.

Solución: Sea $y_1 = e^{ax}\sin bx$, $F = y+y_1 = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = e^{ax+bxi}$, $F' = (a+bi)e^{x(a+bi)}$, $F^{(n)} = y^{(n)}+y_1^{(n)} = (a+bi)^n e^{x(a+bi)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{n\theta i}e^{x(a+bi)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax+i(n\theta+bx)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}[\cos(n\theta+bx)+i\sin(n\theta+bx)]$. La parte real de $F^{(n)}$ es la siguiente: $y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos(n\theta+bx)$. Para $x=0$, se tiene: $y^{(n)}(0) = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\theta$. Luego: $y = 1+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\cdot\dfrac{x}{1!}+(a^2+b^2)\cos 2\theta\cdot\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\theta\cdot\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$

S 32- ¿Existe alguna función $f(x)$, desarrollable en serie de Mac-Laurin, que para los puntos $x=\dfrac{1}{n}$, con n natural, adopte los valores $f(x) = f(\frac{1}{n}) = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$?

Solución: $f(0) = f(\frac{1}{\infty}) = \dfrac{1+(-1)^\infty}{2}$. Luego la función no está definida en el origen y por tanto no se puede desarrollar en serie de Mac-Laurin.

S 33- Hallar la expresión más general de una función $f(x)$, desarrollable en serie de Mac-Laurin, que satisfaga la ecuación funcional $f(x)\cdot f(y) = f(x+y)$.

Solución: Tomando logaritmos en la ecuación dada: $\ln f(x)+\ln f(y) = \ln f(x+y)$. Sea: $\ln f(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$, $\ln f(y) = a_0+a_1y+\ldots+a_ny^n+\ldots$ Luego: $\ln f(x)+\ln f(y) = 2a_0+a_1(x+y)+a_2(x^2+y^2)+\ldots+a_n(x^n+y^n)+\ldots$ Para que esta última expresión sea igual a: $\ln f(x+y) = a_0+a_1(x+y)+a_2(x+y)^2+\ldots+a_n(x+y)^n+\ldots$, ha de suceder que: $2a_0 = a_0$, $a_1(x+y) = a_1(x+y)$, $a_2(x^2+y^2) = a_2(x+y)^2,\ldots$, $a_n(x^n+y^n) = a_n(x+y)^n,\ldots$ De donde se tiene que: $a_0 = a_2 = a_n = 0$, mientras que a_1 puede ser cualquiera. Por tanto: $\ln f(x) = a_1x = kx$, siendo la expresión más general pedida: $f(x) = e^{kx}$.

S 34- Desarrollar en serie de Mac-Laurin la función $y=e^x\sin x$, hallando el coeficiente de x^{n-1}, completando el desarrollo con el resto de Lagrange.

Solución: Siendo $y_1 = e^x\cos x$, se tiene que: $F = y_1+iy = e^x(\cos x+i\sin x) = e^xe^{xi} = e^{x(1+i)}$, $F' = (1+i)e^{x(1+i)}$, $F'' = (1+i)^2e^{x(1+i)},\ldots$, $F^{(n)} = (1+i)^ne^{x(1+i)} = (\sqrt{2})^ne^{n\frac{\pi}{4}i}e^xe^{xi} = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n\pi i}{4}}e^xe^{xi}$. Para $x=0$, $F^{(n)}(0) = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n\pi i}{4}} = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4})$. Como $y^{(n)}$ corresponde a la parte imaginaria de $F^{(n)}(0) = 2^{\frac{n}{2}}\sin\dfrac{n\pi}{4}$, se tiene que: $y(0)=0$, $y'(0) = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{-1}{2}} = 1$, $y''(0) = 2\cdot 1 = 2$, $y^{(n-1)} = 2^{\frac{n-1}{2}}\sin\dfrac{(n-1)\pi}{4}$, $y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}\sin\dfrac{n\pi}{4}$. Por tanto, el desarrollo pedido es: $y = x+x^2+\ldots+2^{\frac{n-1}{2}}\sin\dfrac{(n-1)\pi}{4}\cdot\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{x^n}{n!}y^{(n)}(\theta x)$, con $0<\theta<1$.

S 35- Desarrollar según las potencias de z el producto infinito $f(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^nz)$.

Solución: Como: $(1+xz)f(xz) = (1+xz)\prod_{n=1}^{\infty}[1+x^n(xz)] = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n z)$, se tiene: $(1+xz)f(xz) = f(z)$. Desarrollando en serie de potencias, se tiene: $a_n = \dfrac{x^n}{1-x^n}a_{n-1}$. Luego: $a_n = \dfrac{x}{1-x}\cdot\dfrac{x^2}{1-x^2}\cdot\dfrac{x^3}{1-x^3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{x^n}{1-x^n}$. Por tanto, el desarrollo según las potencias de z del producto dado, es: $\Pi = \sum\dfrac{x}{1-x}\cdot\dfrac{x^2}{1-x^2}\cdot\dfrac{x^3}{1-x^3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{x^n}{1-x^n}z^n$.

S 36- Desarrollar según las potencias de z el producto infinito $\Pi = (1+xz)(1+x^3z)\ldots(1+x^{2n+1}z)\ldots$

Solución: $(1+xz)f(x^2z) = f(z)$. Desarrollando en serie de potencias, se tiene: $a_n = \dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n}}a_{n-1}$. Luego: $a_n = \dfrac{x}{1-x^2}\cdot\dfrac{x^3}{1-x^4}\cdot\dfrac{x^5}{1-x^6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n}}$. Por tanto, el desarrollo pedido es: $\Pi = \sum\dfrac{x}{1-x^2}\cdot\dfrac{x^3}{1-x^4}\cdot\dfrac{x^5}{1-x^6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n}}z^n$.

S 37- Desarrollar en serie de Mac-Laurin la función $y = \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k$.

Solución: $y^{\frac{1}{k}} = x+\sqrt{x^2+1}$. Derivando: $\dfrac{1}{k}y^{\frac{1}{k}-1}y' = 1+x(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}$, de donde: $y' = k\dfrac{1+x(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}}{y^{\frac{1}{k}-1}}$. Luego: $y'(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = k\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+x}{y^{\frac{1}{k}-1}} = \dfrac{ky^{\frac{1}{k}}}{y^{\frac{1}{k}-1}} = ky$. Derivando sucesivamente la ecuación: $y'(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = ky$, se tienen las siguientes igualdades: $y''(1+x^2) = ky'(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - y'x = k^2y - xy'$; $y'''(1+x^2) = (k^2-1)y' - 3xy''$; $y^{(4)}(1+x^2) = y''(k^2-4) - 5xy'''$; $y^{(5)}(1+x^2) = y'''(k^2-9) - 7xy^{(4}$;...
Es decir: $y^{(n)}(1+x^2) = \left[k^2-(n-2)^2\right]y^{(n-2)} - (2n-3)xy^{(n-1)}$. Para $x = 0$, se tiene: $y^{(n)}(0) = \left[k^2-(n-2)^2\right]y^{(n-2)}$. Y como: $y(0) = 1$, $y'(0) = k$, $y''(0) = k^2$, $y'''(0) = k(k^2-1),\ldots,$
$y^{(2n)}(0) = k^2(k^2-2^2)(k^2-4^2)\ldots[k^2-(2n-2)^2]$,
$y^{(2n+1)}(0) = k(k^2-1)(k^2-3^2)\ldots[k^2-(2n-1)^2]$. Por tanto, el desarrollo pedido es:

$$y = 1+kx+\frac{k^2}{2}x^2+\frac{k(k^2-1)}{3!}x^3+\frac{k^2(k^2-2^2)}{4!}x^4+\ldots+$$
$$+\frac{k^2(k^2-2^2)(k^2-4^2)\ldots[k^2-(2n-2)^2]}{(2n)!}x^{2n}+\frac{k(k^2-1)(k^2-3^2)\ldots[k^2-(2n-1)^2]}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots$$

S 38- Desarrollar $A = \dfrac{1}{x^3-5x^2-2x+24}$ en serie de potencias de $(x-1)$.

Solución: Haciendo: $y = x-1$, se tiene: $A = \dfrac{1}{(y+1)^3-5(y+1)^2-2(y+1)+24} =$

$$= \frac{1}{y^3-2y^2-9y+18} = \frac{1}{(y+3)(y-2)(y-3)} = \frac{1}{30}\frac{1}{y+3}-\frac{1}{5}\frac{1}{y-2}+\frac{1}{6}\frac{1}{y-3} =$$
$$= \frac{1}{90}\frac{1}{1+\frac{y}{3}}+\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{y}{2}}-\frac{1}{18}\frac{1}{1-\frac{y}{3}},$$ cuyo desarrollo en serie de potencias es:

$$A = \frac{1}{90}\left[1-\frac{y}{3}+(\frac{y}{3})^2-\ldots+(-1)^n(\frac{y}{3})^n+\ldots\right]+\frac{1}{10}\left[1+\frac{y}{2}+(\frac{y}{2})^2+\ldots+(\frac{y}{2})^n+\ldots\right]-$$
$$-\frac{1}{18}\left[1+\frac{y}{3}+(\frac{y}{3})^2+\ldots+(\frac{y}{3})^n+\ldots\right] = \frac{1}{90}\sum(\frac{-y}{3})^n+\frac{1}{10}\sum(\frac{y}{2})^n-\frac{1}{18}\sum(\frac{y}{3})^n =$$
$$= \frac{1}{90}\sum\left[\frac{5+(-1)^n}{3^n}+\frac{9}{2^n}\right]y^n = \frac{1}{90}\sum\left[\frac{5+(-1)^n}{3^n}+\frac{9}{2^n}\right](x-1)^n.$$

S 39- Hallar los veinte primeros números de Bernouilli y su función generatriz, sabiendo que su ecuación fundamental es: $B_p = (B-1)^{(p} = B_p - \binom{p}{1}B_{p-1}+\ldots+B_0$, con $B_0 = 1$.

Solución: La función generatriz de los números de Bernouilli es: $\dfrac{x}{1-e^{-x}} = \sum\dfrac{B_{2n}x^{2n}}{(2n)!}$. Desarrollándola, se tiene (partiendo de $B_0 = 1$): $B_1 = \dfrac{1}{2}$, $B_2 = \dfrac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\dfrac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \dfrac{1}{42}$, $B_7 = 0$, $B_8 = -\dfrac{1}{30}$, $B_9 = 0$, $B_{10} = \dfrac{5}{66}$, $B_{11} = 0$, $B_{12} = -\dfrac{691}{2.730}$, $B_{13} = 0$, $B_{14} = \dfrac{7}{6}$, $B_{15} = 0$, $B_{16} = -\dfrac{3.617}{510}$, $B_{17} = 0$, $B_{18} = \dfrac{43.867}{798}$, $B_{19} = 0$, $B_{20} = -\dfrac{174.611}{330}$.

S 40- La ecuación fundamental de los números de Euler es: $(E+1)^{(p}+(E-1)^{(p}=0$, con $E_0=1$. Hallar los doce primeros números de Euler y su función generatriz.

Solución: La función generatriz de los números de Euler es: $\operatorname{sech}x=\dfrac{1}{\cosh x}=\sum\dfrac{E_{2n}x^{2n}}{(2n)!}$. Desarrollándola, partiendo de $E_0=1$, se tiene: $E_1=0$, $E_2=-1$, $E_3=0$, $E_4=5$, $E_5=0$, $E_6=-61$, $E_7=0$, $E_8=1.385$, $E_9=0$, $E_{10}=-10.521$, $E_{11}=0$, $E_{12}=2.702.765$.

S 41- Obtener el desarrollo en potencias de x, de la función $f(x)=\cot x$, mediante los números de Bernouilli.

Solución: Tomando en el desarrollo de la ecuación fundamental de los números de Bernouilli, $f(x)=\cos 2x$ (en vez de tomar $f(x)=e^x$), se tiene: $\cos 2Bx-\cos 2(B-1)x=0$, $\cos 2Bx-\cos 2Bx\cdot\cos 2x-\sin 2Bx\cdot\sin 2x=0$. Ahora bien: $\sin 2Bx=\dfrac{2B_1}{1!}x-\dfrac{2^3B_3}{3!}x^3+\ldots=x$, pues los números impares de Bernouilli son nulos. Por tanto: $\cos 2Bx(1-\cos 2x)=x\sin 2x$, $\cos 2Bx=\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}=x\cot x$. El desarrollo pedido es:

$$\cot x=\frac{1}{x}\cos 2Bx=\frac{1}{x}-\frac{2^2B_2}{2!}x+\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}+\ldots=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}.$$

Nota: En el origen $(x=0)$, $x\cot x=1$.

S 42- Obtener el desarrollo en potencias de x, de la función $f(x)=\tan x$, mediante los números de Bernouilli.

Solución: Siendo $\tan x=\cot x-2\cot 2x$, se tiene:

$$\tan x=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}-2\sum_0^\infty(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}2^{2n-1}x^{2n-1}=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}(1-2^{2n})x^{2n-1}.$$

S 43- Obtener el desarrollo en potencias de x, de la función $f(x)=\operatorname{cosec}x=\dfrac{1}{\sin x}$, mediante los números de Bernouilli.

Solución: Siendo: $\operatorname{cosec}x=\dfrac{1}{\sin x}=\cot\dfrac{x}{2}-\cot x$, se tiene:

$$\operatorname{cosec}x=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}-\sum_0^\infty(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{2B_{2n}}{(2n)!}(1-2^{2n-1})x^{2n-1}.$$

S 44- Obtener el desarrollo en potencias de x, de la función $f(x)=\sec x$, mediante los números de Euler.

Solución: Siendo: $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{\cosh(xi)}=e^{Exi}$, se tiene:

$$\sec x=\sum\frac{E_{2n}(xi)^{2n}}{(2n)!}=\sum(-1)^n\frac{E_{2n}x^{2n}}{(2n)!}.$$

S 45- Hallar la relación existente entre los números de Bernouilli y los de Euler.

Solución: $e^{(4B-1)x}-e^{(4B-3)x}=e^{4Bx}(e^{-x}-e^{-3x})=\dfrac{4x}{1-e^{-4x}}(e^{-x}-e^{-3x})=\dfrac{4xe^{-x}(1-e^{-2x})}{(1+e^{-2x})(1-e^{-2x})}=$ $=\dfrac{4xe^{-x}}{1+e^{-2x}}=\dfrac{4x}{e^x+e^{-x}}=2xe^{Ex}$. Identificando coeficientes de x^n, se tiene: $\dfrac{(4B-1)^n}{n!}-\dfrac{(4B-3)^n}{n!}=2\dfrac{E_{n-1}}{(n-1)!}$. Luego: $E_{n-1}=\dfrac{(4B-1)^n-(4B-3)^n}{2n}$. Por otra parte: $e^{4Bx}-e^{2Bx}=\dfrac{4x}{1-e^{-4x}}-\dfrac{2x}{1-e^{-2x}}=\dfrac{4x-2x(1+e^{-2x})}{1-e^{-4x}}=\dfrac{2x-2xe^{-2x}}{(1+e^{-2x})(1-e^{-2x})}=\dfrac{2x}{1+e^{-2x}}=$ $=\dfrac{2xe^x}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{xe^x}{\cosh x}=xe^xe^{Ex}=xe^{(E+1)x}$. Identificando coeficientes de x^n, se tiene: $\dfrac{(4B)^n}{n!}-\dfrac{(2B)^n}{n!}=\dfrac{(E+1)^{n-1}}{(n-1)!}$, $B_n\left(\dfrac{4^n-2^n}{n}\right)=(E+1)^{n-1}$; luego: $B_n=\dfrac{n(E+1)^{n-1}}{4^n-2^n}$.

S 46- Hallar la suma de las series armónicas de exponente par, $H_{2a}=\sum\dfrac{1}{n^{2a}}$, por medio de los números de Bernouilli.

Solución: Partiendo de la igualdad: $\cos(2n+1)x + i\sin(2n+1)x = (\cos x + i\sin x)^{2n+1}$, se tiene que: $\sin(2n+1)x = \binom{2n+1}{1}\cos^{2n}x\sin x - \binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}x\sin^3 x + \ldots$ De donde se obtiene que: $\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \binom{2n+1}{1}\cos^{2n}x - \binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}x\sin^2 x + \ldots =$
$= \binom{2n+1}{1}(1-\sin^2 x)^n - \binom{2n+1}{3}(1-\sin^2 x)^{n-1}\sin^2 x + \ldots = P(\sin^2 x)$. Las raíces de este polinomio son las de la ecuación: $\sin(2n+1)x = 0$, es decir: $x = \dfrac{k\pi}{2n+1}$. Por tanto: $P(\sin^2 x) = A\left(\sin^2 x - \sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}\right)\left(\sin^2 x - \sin^2\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)\ldots$ Para calcular el valor de A, se tiene: $1 = (-1)^n A \prod_{k=1}^{n}\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}$, luego: $A = \dfrac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^{n}\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}$. Por tanto:

$$\frac{P(\sin^2 x)}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)\sin x} = \prod_{k=1}^{n}\left[1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right].$$ Haciendo: $x = \dfrac{\theta}{2n+1}$, se tiene:

$$\frac{\sin\theta}{(2n+1)\sin\frac{\theta}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{n}\left[1 - \frac{\sin^2\frac{\theta}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right].$$ Pasando al límite, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{(2n+1)\sin\frac{\theta}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[1 - \frac{\sin^2\frac{\theta}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right].$$ De donde: $\dfrac{\sin\theta}{\theta} = \prod_{k=1}^{n}\left[1 - \dfrac{\theta^2}{k^2\pi^2}\right]$. Es decir: $\sin x = x\prod_{k=1}^{n}\left[1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right]$, $\ln\sin x = \ln x + \sum_{1}^{\infty}\ln\left[1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right]$. Derivando en esta ecuación:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}\frac{2x}{k^2\pi^2\left[1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right]},\quad x\cot x = 1 - 2\sum_{1}^{\infty}\frac{\frac{x^2}{k^2\pi^2}}{1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}} =$$

$$= 1 - 2\left[\frac{\frac{x^2}{\pi^2}}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}} + \frac{\frac{x^2}{4\pi^2}}{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}} + \ldots\right] = 1 - 2\left[\frac{H_2}{\pi^2}x^2 + \frac{H_4}{\pi^4}x^4 + \ldots\right].$$

Como: $x\cot x = \cos 2Bx = \sum_{0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$, se tiene: $-2\dfrac{H_{2n}}{\pi^{2n}} = (-1)^n\dfrac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}$, es decir: $H_{2n} = (-1)^n\dfrac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}$. Luego: $H_2 = \dfrac{\pi^2}{6}$, $H_4 = \dfrac{\pi^4}{90}$, $H_6 = \dfrac{\pi^6}{945}$, $H_8 = \dfrac{\pi^8}{9.450}\ldots$ De estas relaciones se deduce también que, para n suficientemente grande, $B_{2n} \simeq \dfrac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$.

S 47- Hallar las funciones de x que verifican la siguiente ecuación funcional: $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)[1 - f(x_1)f(x_2)]$.

Solución: Sea: $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots$ Ha de cumplirse que: $a + bx_1 + cx_1^2 + \ldots + a + bx_2 + cx_2^2 + \ldots =$
$= [a + b(x_1+x_2) + c(x_1+x_2)^2 + \ldots][1 - (a + bx_1 + cx_1^2 + \ldots)(a + bx_2 + cx_2^2 + \ldots)]$. Igualando los términos independientes, se tiene: $2a = a(1-a^2)$, de donde se tienen las raíces: $0, \pm i$. Para $a = 0$, igualando los coeficientes de $x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2$, etc. se tiene: $b = 1$, $c = 0$, $d = \dfrac{1}{3}$, $e = 0$, $f = \dfrac{2}{15}, \ldots$ Por tanto: $f(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + \ldots$, desarrollo que corresponde a la función $\tan x$. En efecto, la ecuación funcional del enunciado se refiere a la fórmula trigonométrica: $\tan(x_1+x_2) = \dfrac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1\tan x_2}$, es decir: $f(x_1+x_2) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{1 - f(x_1)f(x_2)}$. En cuanto a las raíces $a = \pm i$, al operar se obtiene: $b = c = \ldots = 0$, con lo que no existe $f(x)$ sino sólo la constante $\pm i$, pues en efecto: $\pm i \pm i = \pm i[1 - i^2] = \pm 2i$.

S 48- Sea la función $y = f(x)$, continua y derivable hasta el orden necesario. Se considera la función inversa $x = \varphi(y)$. Se sabe que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Calcular $E = \lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)\varphi(x) - x^2}{x^4}$.

Solución: Por ser funciones inversas, se cumple que: $f' \cdot \varphi' = 1$. Luego: $\varphi'(0) = 1$. Además, al ser

$f(0)=0$, también $\varphi(0)=0$. Derivando sucesivamente la igualdad $f'\cdot\varphi'=1$, se tiene: $f''\varphi'+f'\cdot\varphi''=0$, $f'''\varphi'+2f''\varphi''+f'\varphi'''=0$. Particularizando para $x=0$, se deduce: $f''(0)+\varphi''(0)=0$, $f'''(0)+2f''(0)\varphi''(0)+\varphi'''(0)=0$. De donde se obtiene: $f''(0)=-\varphi''(0)$, $\varphi'''(0)=-f'''(0)+2[f''(0)]^2$. Como $E=\frac{0}{0}$, aplicando L´Hopital sucesivamente, se tiene:

$$E=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\varphi(x)-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)\varphi(x)+f(x)\varphi'(x)-2x}{4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)\varphi(x)+2f'(x)\varphi'(x)+f(x)\varphi''(x)-2}{12x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)\varphi(x)+3f''(x)\varphi'(x)+3f'(x)\varphi''(x)+f(x)\varphi'''(x)}{24x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(4}(x)\varphi(x)+4f'''(x)\varphi'(x)+6f''(x)\varphi''(x)+4f'(x)\varphi'''(x)+f(x)\varphi^{(4}(x)}{24}.$$

Particularizando esta expresión para $x=0$, se tiene: $E=\dfrac{4f'''(0)+6f''(0)\varphi''(0)+4\varphi'''(0)}{24}$. Sustituyendo los valores hallados más arriba: $E=\dfrac{4f'''(0)-6[f''(0)]^2-4f'''(0)+8[f''(0)]^2}{24}=\dfrac{[f''(0)]^2}{12}$.

Sección T - MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

T 1- Un recipiente cilíndrico de $300\,\text{m}^3$ de capacidad está apoyado en su base inferior y abierto en la superior. El m^2 del material de la pared cilíndrica cuesta el doble que el de la base. Hallar el radio r y la altura h, para que resulte lo mas económico posible.

Solución: Volumen del recipiente: $\pi r^2 h = 300$, de donde: $h = \dfrac{300}{\pi r^2}$. Superficie del recipiente: $\pi r^2 + 2\pi rh$. Siendo p el precio del m^2 del material de la base, el precio total del material es: $P = \pi r^2 p + 2\pi rh2p = \pi r^2 p + 2\pi r\dfrac{300}{\pi r^2}2p = \pi r^2 p + 1200\dfrac{p}{r}$. Luego: $P'(r) = 2\pi rp - 1200\dfrac{p}{r^2} = 0$, $r^3 = \dfrac{600}{\pi}$, $r = 5{,}76\,\text{m}$, $h = 2{,}88\,\text{m}$.

T 2- Un canal abierto, cuyas paredes tienen una inclinación de 45º, ha de tener una sección de $12\,\text{m}^2$. Determinar las dimensiones de esta sección para que el canal tenga en la superficie un ancho mínimo.

Solución: Sea la sección del canal un trapecio isósceles apoyado en su base menor x, siendo su base mayor y, que corresponde al ancho en superficie. La altura del trapecio es: $\dfrac{y-x}{2}$. La superficie del trapecio es: $\dfrac{x+y}{2} \cdot \dfrac{y-x}{2} = 12$. Luego: $y^2 - x^2 = 48$, es decir: $y = \sqrt{48+x^2}$. Por tanto: $y'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{48+x^2}} = 0$. Luego: $x = 0$, $y = 4\sqrt{3}$, y la altura es: $2\sqrt{3}$. Luego la sección es un triángulo isósceles invertido, de base $4\sqrt{3}$ m y altura $2\sqrt{3}$ m.

T 3- Trazar a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, una tangente da manera que la longitud del segmento de esta tangente comprendido entre los ejes de la elipse, sea mínima. Calcular esta longitud.

Solución: Siendo el punto de tangencia $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, la tangente corta a los ejes en: $(0, \dfrac{b}{\sin\theta})$ y $(\dfrac{a}{\cos\theta}, 0)$. La distancia d entre estos dos puntos viene dada por: $d^2 = \dfrac{b^2}{\sin^2\theta} + \dfrac{a^2}{\cos^2\theta}$. Para que d sea mínima, también lo será d^2, para lo cual: $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{b^2}{\sin^2\theta} + \dfrac{a^2}{\cos^2\theta}\right) = 0$. Derivando y simplificando se obtiene: $\tan^4\theta = \dfrac{b^2}{a^2}$, $\tan\theta = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$. Sustituyendo en d, se obtiene: $d = a + b$. La tangente corta a los ejes en los puntos: $\left(0, \sqrt{b(a+b)}\right)$ y $\left(\sqrt{a(a+b)}, 0\right)$, siendo su ecuación: $\dfrac{x}{\sqrt{a}} + \dfrac{y}{\sqrt{b}} = \sqrt{a+b}$.

T 4- Dos puntos recorren el eje OX con velocidades constantes v_1 y v_2, partiendo del origen al mismo tiempo. Transcurrido el tiempo t, los puntos se encuentran en B y C. Calcular este tiempo para que el ángulo $\widehat{BAC}$ sea máximo. A es el punto de coordenadas $(0, a)$.

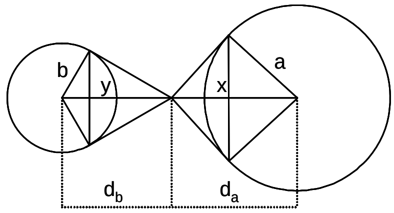
Solución: Ángulo $\widehat{OAB} = \arctan\dfrac{v_1 t}{a}$. Ángulo $\widehat{OAC} = \arctan\dfrac{v_2 t}{a}$. Luego: $\widehat{BAC} = \theta =$ $= \arctan\dfrac{v_1 t}{a} - \arctan\dfrac{v_2 t}{a}$. Derivando e igualando a cero, se tiene: $\theta'(t) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{v_1 t}{a}\right)^2}\dfrac{v_1}{a} + \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{v_2 t}{a}\right)^2}\dfrac{v_2}{a} = 0$. De donde: $t = \dfrac{a}{\sqrt{v_1 v_2}}$.

T 5- Hallar el volumen máximo de un cono de revolución inscrito en una esfera de radio R.

Solución: Siendo r el radio de la base del cono y h su altura, el volumen del cono es: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. Al estar inscrito en la esfera se tiene que: $(h-r)^2 + r^2 = R^2$. Luego: $V = \dfrac{1}{3}\pi h\left[R^2 - (h-R)^2\right]$. Derivando e igualando a cero, se tiene: $V'(h) = 4hR - 3h^2 = 0$. De donde: $h = \dfrac{4}{3}R$. Sustituyendo este valor en V, se tiene que el volumen pedido es: $\dfrac{32}{81}\pi R^3$.

T 6- La distancia entre los centros de dos esferas de radios a y b es c, siendo $c > a+b$. Determinar un punto P de la línea de los centros, exterior a ambas esferas, tal que la suma de las superficies visibles de las dos esferas desde dicho punto, sea máxima.

Solución:



Sean x e y las alturas de los dos casquetes esféricos definidos por los conos de vértice P circunscritos a ambas esferas. La suma de las superficies vistas desde P es: $S = 2\pi(ax+by)$. Siendo d_a y d_b las distancias de P a los centros de las esferas, se tiene que: $a^2 = d_a(a-x)$ y $b^2 = d_b(b-y)$, siendo: $d_a + d_b = c$. De estas ecuaciones se obtiene: $x = a - \dfrac{a^2}{d_a}$, $y = b - \dfrac{b^2}{d_b}$. Por tanto: $S = 2\pi\left[a\left(a-\dfrac{a^2}{d_a}\right) + b\left(b - \dfrac{b^2}{d_b}\right)\right] = 2\pi\left[a^2 - \dfrac{a^3}{d_a} + b^2 - \dfrac{b^3}{c-d_a}\right]$. Derivando e igualando a cero, se tiene: $S'(d_a) = 2\pi\left(\dfrac{a^3}{d_a^2} - \dfrac{b^3}{(c-d_a)^2}\right) = 0$. De donde se obtienen las distancias de P a los centros de las esferas: $d_a = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}c}{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}$, $d_b = \dfrac{b^{\frac{3}{2}}c}{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}$.

T 7- Una ventana está formada por un rectángulo cuyo lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero, siendo su perímetro de 4,5 metros. Hallar sus dimensiones para que su superficie sea máxima.

Solución: Sean b y a la base y la altura respectivamente, del rectángulo. El perímetro de la ventana es: $3b + 2a = 4,5$. Su superficie: $S = ba + b^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = b(\dfrac{4,5-3b}{2}) + b^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Derivando e igualando a cero, se tiene: $S'(b) = \dfrac{4,5-3b}{2} - \dfrac{3b}{2} + b\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$, $b = \dfrac{18+3\sqrt{3}}{22}$ (base del rectángulo y lado del triángulo equilátero), $a = \dfrac{45-9\sqrt{3}}{44}$ (altura del rectángulo).

T 8- Se quiere construir un pináculo formado por un paralelepípedo recto de altura a y de base cuadrada, rematado por una pirámide regular cuya altura sea $\dfrac{3}{8}$ del lado b de la base. El volumen total ha de ser de $3\,\text{m}^3$, y ha de cubrirse de pan de oro. Hallar las dimensiones del pináculo para que el coste del pan de oro sea mínimo.

Solución: El volumen del paralelepípedo es: b^2a, y el de la pirámide: $\dfrac{1}{3}b^2\dfrac{3}{8}b = \dfrac{b^3}{8}$. Luego: $b^2a + \dfrac{b^3}{8} = 3$, $a = \dfrac{24-b^3}{8b^2}$. La superficie a cubrir es la suma de las superficies laterales del paralelepípedo y de la pirámide: $S = 4ba + 4\dfrac{b \cdot \frac{5}{8}b}{2} = \dfrac{24-b^3}{2b} + \dfrac{5b^2}{4}$. Derivando e igualando a cero, se tiene: $S'(b) = \dfrac{-4b^3-48}{4b^2} + \dfrac{10b^4}{4} = 0$, $b = 2\,\text{m}$, $a = \dfrac{1}{2}\,\text{m}$.

T 9- Un triángulo isósceles de perímetro $2p$, gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué valor hay que dar a la base para que el volumen del cono sea máximo?

Solución: Siendo b la base del triángulo, su altura es: $\sqrt{p^2-pb}$. El volumen del cono es: $V = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{b^2}{4}\sqrt{p^2-pb}$. Derivando esta ecuación e igualando a cero, se tiene: $V'(b) = \dfrac{\pi}{12}\left[2b\sqrt{p^2-pb} - \dfrac{1}{2}b^2(p^2-pb)^{-\frac{1}{2}}p\right] = 0$. De donde: $b = \dfrac{4}{5}p$.

T 10- De todos los cilindros de igual volumen V, determinar el radio r de la base y la altura h, para que la superficie del cilindro sea la menor posible.

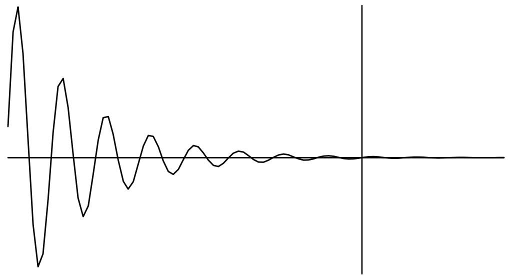
Solución: $V = \pi r^2 h,\ h = \dfrac{V}{\pi r^2}$. La superficie del cilindro es: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r\left(r + \dfrac{V}{\pi r^2}\right)$. Derivando respecto a r e igualando a cero, se obtiene: $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}},\ h = 2r$.

T 11- De una pieza rectangular de cartón de lados 20 cm y 30 cm, se quiere hacer una caja cortando para ello de cada esquina un cuadrado de lado x. Hallar el valor de x para que la capacidad de la caja sea máxima.

Solución: La capacidad de la caja es: $C = (30 - 2x)(20 - 2x)x$. Derivando e igualando a cero, se obtiene: $C'(x) = 3x^2 - 50x + 150 = 0$. De donde: $x = \dfrac{25 \pm \sqrt{7}}{3}$. Sustituyendo estos valores en $C''(x)$, se tiene que: $C''(\dfrac{25-\sqrt{7}}{3}) < 0$, por lo que el valor calculado $\dfrac{25-\sqrt{7}}{3}$ cm, determina la capacidad máxima de la caja.

T 12- Demostrar que las abscisas de los máximos de las curvas $y = A \bullet e^{-k^2 t}\sin(mt + \theta)$ están en progresión aritmética y las ordenadas en progresión geométrica.

Solución:



Derivando: $y' = -Ak^2 e^{-k^2 t}\sin(mt+\theta) + Ae^{-k^2 t} m\cos(mt+\theta) = 0$. De donde se tiene que: $\tan(mt+\theta) = \dfrac{m}{k^2},\ t = \dfrac{1}{m}\left(\arctan\dfrac{m}{k^2} + \lambda\pi - \theta\right)$. Como en esta expresión la única variable es λ, que toma valores enteros, los valores de t están en progresión aritmética de razón $\frac{\pi}{m}$. Por otra parte: $\sin(mt+\theta) = \dfrac{\tan(mt+\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(mt+\theta)}} = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+k^4}}$, que es constante. Por tanto, el cociente: $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{-k^2 t_1}}{e^{-k^2 t_2}} = e^{-k^2(t_1 - t_2)} = e^{-k^2 \frac{\pi}{m}}$, es constante, por lo que las ordenadas están en progresión geométrica de razón: $e^{-k^2 \frac{\pi}{m}}$.

Nota: La gráfica representa una curva de la familia estudiada.

T 13- Un cosechero calcula que si realizara hoy la vendimia, obtendría 120 hectolitros de vino y los podría vender a 100 euros el hectolitro. Ahora bien, si aguardara algún tiempo, la cosecha aumentaría a razón de 20 hectolitros por semana, al par que el precio disminuirá a razón de 10 euros por semana. ¿En qué momento conviene vendimiar para obtener el mayor ingreso posible?

Solución: Siendo x el número de semanas que conviene que pasen desde hoy hasta la recogida de la cosecha, el valor de ésta es: $V = (120 + 20x)(100 - 10x)$. Derivando e igualando a cero, se tiene que: $x = 2$. Hay que recoger la cosecha dentro de dos semanas.

T 14- Se va a construir una boya formada por dos conos de revolución unidos por su base, para lo cual se utilizarán dos planchas circulares iguales de hierro de radio R. Calcular las dimensiones de la boya para que su volumen sea máximo.

Solución: Volumen de la boya: $V = \dfrac{2}{3}r^2 h$, siendo r el radio de la base de los conos, y h su altura Se tiene que: $r^2 + h^2 = R^2$. Luego: $V = \dfrac{2}{3}(R^2 - h^2)h$. Derivando e igualando a cero, se tiene que: $h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}R,\ r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R$.

Nota: En la construcción se ha utilizado el 81,65% de la superficie de las planchas.

T 15- En un campo se quiere limitar una parcela de $216\,\text{m}^2$ por medio de una valla rectangular y además dividirla en dos partes iguales por otra valla paralela a uno de los lados. Hallar las dimensiones del campo para que la longitud total de las vallas sea mínima.

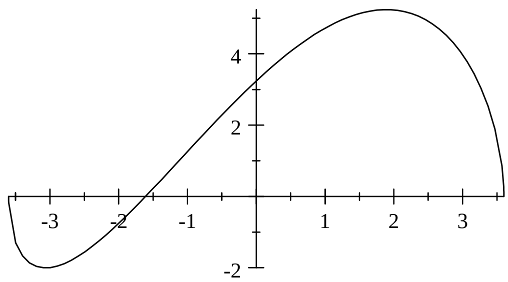
Solución: Sean x, y las dimensiones del campo: $xy = 216$. La longitud de la valla es: $L = 3x + 2y = 3x + \frac{432}{x}$. Derivando e igualando a cero, se tiene: $x = 12\,\text{m},\ y = 18\,\text{m}$.

T 16- Una ventana normanda se forma sustituyendo el lado superior de un marco rectangular por un semicírculo. Dado el perímetro p de una ventana normanda, hallar sus dimensiones para conseguir su máxima superficie.

Solución: Sea a el lado vertical del marco y b su base. Se tiene que: $p = b + 2a + \frac{\pi b}{2}$, de donde: $a = \frac{2p - b(2+\pi)}{4}$. La superficie es: $S = ab + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{2p - b(2+\pi)}{4}b + \frac{\pi b^2}{8}$. Derivando e igualando a cero, se tiene que: $b = \frac{2p}{\pi + 4}$, $a = \frac{p}{\pi + 4} = \frac{b}{2}$.

T 17- Dada una esfera de $1,8\,\text{m}$ de radio, calcular la altura del cilindro recto circular inscrito en la esfera, cuya superficie total sea máxima.

Solución:



Siendo r el radio de la base del cilindro, y h su altura, su superficie total es: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Al estar inscrito en la esfera, se tiene: $\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = 1,8^2$. Por tanto: $S = 2\pi\left[1,8^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right] + 2\pi h\sqrt{1,8^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$. Derivando e igualando a cero, se tiene: $h = 3,6\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}}$. Se obtienen los dos valores: $3,0623\,\text{m}$ y $1,8926\,\text{m}$. Para estos valores se tiene que S toma respectivamente los valores: $3,79\,\text{m}^2$ y $5,24\,\text{m}^2$. Por tanto, la altura pedida es: $1,8926\,\text{m}$ (el otro valor de la altura es una solución extraña). La gráfica se refiere a la superficie en función de la altura, comprobándose los valores obtenidos.

T 18- Un cartel pegado en una pared vertical, tiene sus bordes superior e inferior a una altura a y b respectivamente de la visual horizontal de un lector. ¿A qué distancia debe colocarse éste de la pared para que el ángulo visual determinado por la pupila y ambos bordes sea máximo?

Solución: El ángulo definido es: $A = \arctan\frac{a}{d} - \arctan\frac{b}{d}$, siendo d la distancia pedida. Derivando respecto a d, e igualando a cero, se tiene: $\frac{1}{1 + \frac{a^2}{d^2}} \cdot \frac{-a}{d^2} - \frac{1}{1 + \frac{b^2}{d^2}} \cdot \frac{-b}{d^2} = 0$. De donde: $d = \sqrt{ab}$.

T 19- Hallar el área máxima de un rectángulo inscrito en un segmento circular de radio R, siendo d la distancia de la cuerda al centro de la circunferencia.

Solución: El área solicitada es: $S = 2ab$, siendo a la altura del rectángulo y $2b$ su base. Se tiene: $R^2 = b^2 + (d+a)^2$. Luego: $S = 2a\sqrt{R^2 - (d+a)^2}$. Igualando a cero la derivada $S'(a)$, se tiene: $a = \frac{-3d + \sqrt{8R^2 + d^2}}{4}$. Por tanto: $S = 2\frac{-3d + \sqrt{8R^2 + d^2}}{4}\sqrt{R^2 - \left(d + \frac{-3d + \sqrt{8R^2 + d^2}}{4}\right)^2} =$

$$= \frac{1}{8}\left(-3d + \sqrt{8R^2 + d^2}\right)\sqrt{8R^2 - 2d^2 - 2d\sqrt{8R^2 + d^2}}\ .$$

T 20- De todos los triángulos ABC que tienen el lado BC de longitud a, y que su círculo inscrito tiene de radio r, hallar el que tiene área máxima y calcularla.

Solución: Sean x y $a - x$ los segmentos en que el punto de tangencia de r divide al lado a. Y sean m y n los segmentos en que la altura h trazada desde A sobre BC, divide a BC. Se tiene que: $\tan\frac{\widehat{B}}{2} = \frac{r}{x}$. Por tanto: $\tan\widehat{B} = \dfrac{2\frac{r}{x}}{1 - (\frac{r}{x})^2} = \dfrac{2rx}{x^2 - r^2} = \dfrac{h}{m}$, $m = \dfrac{h(x^2 - r^2)}{2rx}$. Igualmente: $\tan\frac{\widehat{C}}{2} = \frac{r}{a - x}$, $\tan\widehat{C} = \dfrac{2\frac{r}{a-x}}{1 - \left(\frac{r}{a-x}\right)^2} = \dfrac{2r(a - x)}{(a - x)^2 - r^2} = \dfrac{h}{n}$, $n = \dfrac{h[(a - x)^2 - r^2]}{2r(a - x)}$. Como $a = m + n$, se tiene que el lado BC mide: $a = \dfrac{h(x^2 - r^2)}{2rx} + \dfrac{h[(a - x)^2 - r^2]}{2r(a - x)}$, y la altura mide: $h = \dfrac{a}{\frac{x^2 - r^2}{2rx} + \frac{(a-x)^2 - r^2}{2r(a-x)}} = \dfrac{2arx - 2rx^2}{-x^2 + ax - r^2}$. Siendo la superficie: $S = \dfrac{ah}{2}$, será máxima cuando lo sea h, pues a es constante. Derivando h e igualando a cero, se tiene: $\dfrac{(2ar - 4rx)(-x^2 + ax - r^2) - (-2x + a)(2aex - 2rx^2)}{(-x^2 + ax - r^2)^2} = 0$. Operando, se obtiene que: $x = \dfrac{a}{2}$, por lo que el triángulo es isósceles, siendo su altura: $h = \dfrac{2a^2r}{a^2 - 4r^2}$ y su área: $S = \dfrac{a^3r}{a^2 - 4r^2}$.

T 21- Un punto luminoso M recorre una circunferencia de centro O y radio R, iluminando una superficie infinitamente pequeña σ situada en un punto P interior al círculo y cuyo plano es perpendicular al del círculo y pasa por su centro O. Se pide la posición de M para que dicha superficie σ reciba la máxima iluminación procedente de M. La iluminación es proporcional al seno del ángulo que forma el rayo luminoso con la superficie iluminada, y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de M a la superficie iluminada.

Solución: En el triángulo OMP se conocen $OP = a$, y $OM = R$. Hay que definir el ángulo $\theta = \widehat{MOP}$, de forma que la relación $F = \dfrac{\sin\widehat{MPO}}{\overline{MP}^2} = \dfrac{\sin\widehat{MPO}}{d^2}$ sea máxima. Se tiene que: $\sin\widehat{MPO} = \dfrac{R\sin\theta}{d}$. Además: $d^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta$. Luego de dichas igualdades se obtiene: $F = \dfrac{R\sin\theta}{d^3} = \dfrac{R\sin\theta}{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$. Derivando respecto a θ e igualando a cero, se tiene la siguiente ecuación: $\cos^2\theta + \dfrac{a^2 + R^2}{aR}\cos\theta - 3 = 0$. Luego: $\theta = \arccos\dfrac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 12}}{2}$, siendo $\lambda = \dfrac{a^2 + R^2}{aR}$.

T 22- Sobre una recta XX', se marcan n puntos consecutivos $A, B, C, \dots, N$, siendo siempre a la distancia entre dos puntos consecutivos, y se numeran respectivamente $1, 2, \dots, n$. Encontrar la distancia al primer punto A, de un punto Y de la recta tal que la suma de los cuadrados de sus distancias $AY, BY, \dots, NY$, a los otros puntos dados multiplicados por los números correspondientes $1, 2, \dots, n$, sea mínima.

Solución: Sea la incógnita: $x = AY$. Siendo D la distancia a considerar, se tiene que: $D = 1\overline{AY}^2 + 2\overline{BY}^2 + \ldots + n\overline{NY}^2 = x^2 + 2(x - a)^2 + 3(x - 2a)^2 + \ldots + n[x - (n - 1)a]^2$. Derivando e igualando a cero: $2[x + 2(x - a) + 3(x - 2a) + \ldots + n[x - (n - 1)a]] = 0$. De donde: $x[1 + 2 + 3 + \ldots + n] = a[2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n - 1)]$. Luego la distancia buscada AY es:

$$x = a\frac{\frac{(n-1)n(n+1)}{3}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2(n - 1)a}{3}.$$

T 23- Hallar máximos y mínimos de la función $y = \dfrac{(1 + \sin x)^2}{\sin x(1 - \sin x)}$.

Solución: Derivando se tiene: $y' = \dfrac{(1+\sin x)\cos x\,(3\sin x - 1)}{\sin^2 x(1-\sin x)^2} = 0$. Luego se obtienen las siguientes soluciones: $1+\sin x = 0$, $\cos x = 0$, $3\sin x - 1 = 0$. Para $1+\sin x = 0$, $x = \dfrac{3\pi}{2} \pm 2k\pi$. Para $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ y $x = \dfrac{3\pi}{2} \pm 2k\pi$. Para $3\sin x - 1 = 0$, $x = \arcsin\dfrac{1}{3} \pm 2k\pi$, cuyo valor aproximado es: $0,34 \pm 2k\pi$. Para $x = \dfrac{3\pi}{2} \pm 2k\pi$, se trata de máximos para los que $y = 0$. Para $x = \dfrac{\pi}{2} \pm 2k\pi$, se trata de valores asintóticos ($y \to \pm\infty$). Para $x = \arcsin\dfrac{1}{3} \pm 2k\pi$, se trata de mínimos para los que $y = 8$.

Sección U - DERIVADAS DE FUNCIONES DE DOS O MÁS VARIABLES

U 1- Hallar el valor de $zx\dfrac{\delta z}{\delta x}+zy\dfrac{\delta z}{\delta y}$, siendo $z^2 = \ln xy + \arcsin\dfrac{y}{x}$.

Solución: $\dfrac{\delta z}{\delta x} = \dfrac{\dfrac{y}{xy}+\dfrac{\frac{-y}{x^2}}{\pm\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}}{2\left(\ln xy+\arcsin\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}$, $\dfrac{\delta z}{\delta y} = \dfrac{\dfrac{x}{xy}+\dfrac{\frac{1}{x}}{\pm\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}}{2\left(\ln xy+\arcsin\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}$. Operando, se tiene que el valor pedido es: $zx\dfrac{\delta z}{\delta x}+zy\dfrac{\delta z}{\delta y} = 1$.

U 2- Hallar el valor de $xz'_x+yz'_y$, siendo $z = \sin\dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x-y}+\tan\dfrac{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{x+y}$.

Solución: La expresión dada es homogénea, con $m = 0$. En efecto, homogeneizando: $\sin\dfrac{(x^2t^2+y^2t^2)^{\frac{1}{2}}}{xt-yt}+\tan\dfrac{(x^2t^2-y^2t^2)^{\frac{1}{2}}}{xt+yt} = \sin\dfrac{t}{t}\dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x-y}+\tan\dfrac{t}{t}\dfrac{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{x+y}$, es decir que el grado de homogeneidad es: $m = 0$. Aplicando la fórmula de Euler para funciones homogéneas, se tiene que: $xz'_x+yz'_y = mf(xy) = 0$.

U 3- Hallar en el punto (x_1,y_1,z_1) la diferencial total de la función $z = c\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Solución: $z'_x = \dfrac{-cx}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$, $z'_y = \dfrac{-cy}{b^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$. Siendo: $dz = z'_x dx+z'_y dy$, se tiene: $dz_1 = \dfrac{-c(b^2x_1dx_1+a^2y_1dy_1)}{a^2b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$.

U 4- Hallar en el punto (x_1,y_1,z_1) la derivada de la función $z = c\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, según la dirección que forma con el eje OX un ángulo de 150º.

Solución: La derivada según la dirección de 150º, es: $\dfrac{\delta z_1}{\delta r(150º)} = z'_{x_1}\cos 150º+z'_{y_1}\sin 150º =$

$$= \frac{cx_1\sqrt{3}}{2a^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{-cy_1}{2b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{c(b^2x_x\sqrt{3}-a^2y_1)}{2a^2b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

U 5- Dada la función $u = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$, hallar $u'_x+u'_y+u'_z$.

Solución: $u'_x = \dfrac{3x^2-3yz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$, $u'_y = \dfrac{3y^2-3xz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$, $u'_z = \dfrac{3z^2-3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$. Luego, sumando y operando: $u'_x+u'_y+u'_z = \dfrac{3}{x+y+z}$.

U 6- Dada la función $u = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$, hallar $u''_{x^2}+u''_{y^2}+u''_{z^2}$.

Solución: $\dfrac{-3x^4+6xy^3+6xz^3-9y^2z^2-3y^4+6x^3y+6yz^3-9x^2z^2-3z^4+6zy^3+6zx^3-9y^2x^2}{(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2}$.

U 7- Dada la función $z = \dfrac{x^4+y^4}{x+y}$, hallar su diferencial total en el punto $(1,2)$.

Solución: $dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{4x^3(x+y)-x^4-y^4}{(x+y)^2}dx + \frac{4y^3(x+y)-x^4-y^4}{(x+y)^2}dy$. Introduciendo las coordenadas dadas: $dz = -\frac{5}{9}dx + \frac{79}{9}dy$.

U 8- Dada la función $z = \frac{x^4+y^4}{x+y}$, hallar el gradiente y su dirección en el punto $(1,2)$.

Solución: El gradiente es: $\sqrt{z'^2_{x_1}+z'^2_{y_1}} = \sqrt{\frac{5^2}{9^2}+\frac{79^2}{9^2}} = \frac{\sqrt{6266}}{9}$. La dirección del gradiente es: $\theta = \arctan\frac{z'_y}{z'_x} = \arctan\frac{79}{-5}$. La dirección de nivel es: $\arctan\frac{-5}{79}$.

U 9- Dada la función $z = \frac{x^4+y^4}{x+y}$, hallar su plano tangente en el punto $(1,2,\frac{17}{3})$.

Solución: $z-z_1 = z'_{x_1}(x-x_1)+z'_{y_1}(y-y_1)$. El plano tangente en el punto $(1,2,\frac{17}{3})$, es: $z-\frac{17}{3} = -\frac{5}{9}(x-1)+\frac{79}{9}(y-2)$.

U 10- Dada la función $u = \ln r$, siendo r la distancia de un punto variable (x,y,z) del espacio a uno fijo de coordenadas (a,b,c), hallar el valor de $u''_{x^2}+u''_{y^2}+u''_{z^2}$.

Solución: Siendo: $r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, $u'_x = \frac{r'_x}{r}$, la derivada de r respecto a x es: $r'_x = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} = \frac{x-a}{r}$. Luego: $u'_x = \frac{x-a}{r^2}$, $u''_{x^2} = \frac{r^2-2(x-a)^2}{r^4}$, Por tanto: $u''_{x^2}+u''_{y^2}+u''_{z^2} = \frac{3r^2-2[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}{r^4} = \frac{3r^2-2r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$.

U 11- Dada la función $z = \ln(x+y)+\ln(x-y)$, calcular $\frac{\delta^z z}{\delta x^2} - \frac{\delta^z z}{\delta y^2}$.

Solución: Como: $\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}$, $\frac{\delta^z z}{\delta x^2} = \frac{-1}{(x+y)^2}+\frac{-1}{(x-y)^2}$, $\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}$, $\frac{\delta^z z}{\delta y^2} = \frac{-1}{(x+y)^2}+\frac{-1}{(x-y)^2}$, se tiene que: $\frac{\delta^z z}{\delta x^2} - \frac{\delta^z z}{\delta y^2} = 0$.

U 12- Dada la función $z = \sqrt{xy+\arctan\frac{y}{x}}$, hallar el valor más simplificado posible de $zx\frac{\delta z}{\delta x}+zy\frac{\delta z}{\delta y}$.

Solución: $\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{yx^2+y^3-y}{2z(x^2+y^2)}$, $\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{x^2+y^2+1}{2z(x+\frac{y^2}{x})}$, $zx\frac{\delta z}{\delta x}+zy\frac{\delta z}{\delta y} = xy$.

U 13- Dada la función $u = \frac{x+y^2+z^3}{x^3+y^2+z}$, hallar el valor de du en el punto $(2,2,2)$.

Solución: $du = u'_x dx+u'_y dy+u'_z dz = -\frac{11}{14}dx+\frac{11}{14}dz$.

U 14- Dada la función $u = \frac{x+y^2+z^3}{x^3+y^2+z}$, hallar el valor en el punto $(2,2,2)$,.de la derivada según la dirección de parámetros directores $(2,2,1)$.

Solución: Siendo: $\cos\alpha = \frac{2}{\pm\sqrt{4+4+1}} = \pm\frac{2}{3}$, $\cos\beta = \pm\frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \pm\frac{1}{3}$, la derivada pedida es: $\frac{\delta u}{\delta r} = u'_x\cos\alpha+u'_y\cos\beta+u'_z\cos\gamma = -\frac{11}{42}$.

U 15- Dada la función $u = \frac{x+y^2+z^3}{x^3+y^2+z}$, hallar la indicatriz de pendientes en el punto $(2,2,2)$.

Solución: Gradiente $\sqrt{u'^2_{x_1}+u'^2_{y_1}+u'^2_{z_1}} = \frac{11\sqrt{2}}{14}$. La indicatriz es una esfera de radio: $\frac{11\sqrt{2}}{28}$ y centro: $(2-\frac{11}{28}, 2, 2+\frac{11}{28})$.

U 16- Dada la función $u=\frac{x+y^2+z^3}{x^3+y^2+z}$, hallar la ecuación del "plano tangente" (se trata de un espacio de cuatro dimensiones), en el punto de la función definido por $x=y=z=2,\ u=1$.

Solución: $u-1=u'_{x_1}(x-2)+u'_{y_1}(y-2)+u'_{z_1}(z-2)$. Luego: $11x-11z+14u-14=0$.

U 17- Dada la función $z=\arctan\frac{x-1}{y-1}$, hallar los términos de grado inferior a cuatro, en su desarrollo por Mac-Laurin.

Solución: El desarrollo es: $f(x,y)=f(0,0)+xf'_x(0,0)+yf'_y(0,0)+\frac{1}{2!}(xf_x+yf_y)^{(2)}+\ldots$ Se tienen los siguientes valores en el origen: $f(0,0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$, $f'_{x_0}=-\frac{1}{2}$, $f'_{y_0}=\frac{1}{2}$, $f''_{x_0^2}=-\frac{1}{2}$, $f''_{y_0^2}=\frac{1}{2}$, $f''_{x_0y_0}=0$, $f'''_{x_0^3}=-\frac{1}{2}$, $f'''_{y_0^3}=\frac{1}{2}$, $f'''_{x_0^2y_0}=-\frac{1}{2}$, $f'''_{x_0y_0^2}=\frac{1}{2}$.

Luego: $(xf_x+yf_y)^{(2)}=x^2f''_{x^2}+y^2f''_{y^2}+2xyf''_{xy}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$,

$(xf_x+yf_y)^{(3)}=x^3f'''_{x_0^3}+3x^2yf'''_{x_0^2y_0}+3xy^2f'''_{x_0y_0^2}+y^3f'''_{y_0^3}=-\frac{1}{2}x^3-3x^2y\frac{1}{2}+3xy^2\frac{1}{2}+y^3\frac{1}{2}$.

El desarrollo pedido es: $z=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{x^3}{12}-\frac{x^2y}{4}+\frac{y^2x}{4}+\frac{y^3}{12}+\ldots$

U 18- Dada la función $z=\ln\frac{x+y}{x-y}$, hallar el valor de $x^2z''_{x^2}+2xyz''_{xy}+y^2z''_{y^2}$.

Solución: La función z es homogénea de grado cero, luego: $x^2z''_{x^2}+2xyz''_{xy}+y^2z''_{y^2}=0$.

U 19- La función $\ln(x^2+y^2)-\arctan\frac{y}{x}=0$, define a y como función de x. Hallar y' e y''.

Solución: $y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=\frac{2x+y}{x-2y}$, $y''=\frac{(2+y')(x-2y)-(1-2y')(2x+y)}{(x-2y)^2}=\frac{10(x^2+y^2)}{(x-2y)^2}$.

U 20- Hallar la diferencial total de $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$.

Solución: $du=u'_xdx+u'_ydy+u'_zdz=\frac{(x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$.

U 21- Hallar la diferencial total de $u=\arctan\frac{y-b}{z-c}+\arctan\frac{z-c}{x-a}+\arctan\frac{x-a}{y-b}$.

Solución: $du=u'_xdx+u'_ydy+u'_zdz=\left[\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}-\frac{z-c}{(x-a)^2+(z-c)^2}\right]dx+$

$+\left[\frac{z-c}{(z-c)^2+(y-b)^2}-\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}\right]dy+$

$+\left[\frac{x-a}{(x-a)^2+(z-c)^2}-\frac{y-b}{(y-b)^2+(z-c)^2}\right]dz.$

U 22- Dada la función $y=f(x,u)$, siendo $u=\sqrt{\cos x}$, hallar y' e y''.

Solución: $u'_x=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}=\frac{-\sin x}{2u}$, $u''_{x^2}=-\frac{1}{2}\left[\sqrt{\cos x}+\frac{\sin^2 x}{2\sqrt{\cos^3 x}}\right]=-\frac{u^4+1}{4u^3}$,

$y'=f'_xx'+f'_uu'_x=f'_xx'-\frac{\sin x}{2u}f'_u$,

$y''=(f'_xx'+f'_uu'_x)^{(2}+(f'_xx''+f'_uu''_{x^2})=f''_{x^2}x'^2+f''_{u^2}(\frac{-\sin x}{2u})^2+f''_{x^2}x'(\frac{-\sin x}{u})+f'_xx''-f'_u\frac{u^4+1}{4u^3}$.

U 23- Dada la función $z=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{xy}}$, hallar el valor de $x^2z''_{x^2}+2xyz''_{xy}+y^2z''_{y^2}$.

Solución: La función z es homogénea de grado cero, luego: $x^2z''_{x^2}+2xyz''_{xy}+y^2z''_{y^2}=0$.

U 24- Dada la función $u = \sqrt{xy^2z^3\sqrt{xy^2z^3\sqrt{xy^2z^3\ldots}}}$, hallar d^3u.

Solución: $u = \sqrt{xy^2z^3u}$, $u^2 = xy^2z^3u$, $u = xy^2z^3$, $u'_x = y^2z^3$, $u'_y = 2xyz^3$, $u'_z = 3xy^2z^2$, $u''_{x^2} = 0$, $u''_{xy} = 2yz^3$, $u''_{xz} = 3y^2z^2$, $u''_{y^2} = 2xz^3$, $u''_{yz} = 6xyz^2$, $u''_{z^2} = 6xy^2z$, $u'''_{x^3} = 0$, $u'''_{x^2y} = 0$, $u'''_{x^2z} = 0$, $u'''_{xy^2} = 2z^3$, $u'''_{y^2z} = 6xz^2$, $u'''_{xz^2} = 6y^2z$, $u'''_{z^2y} = 12xyz$, $u'''_{xyz} = 6yz^2$. $d^3u = u'''_{x^3}dx^3 + u'''_{y^3}dy^3 + u'''_{z^3}dz^3 + +3u'''_{x^2y}dx^2dy + 3u'''_{x^2z}dx^2dz + 3u'''_{y^2x}dy^2dx + 3u'''_{y^2z}dy^2dz + 3u'''_{z^2x}dz^2dx + 3u'''_{z^2y}dz^2dy + 6u'''_{xyz}dxdydz$.
Introduciendo los valores calculados más arriba, se tiene:
$d^3u = 6xy^2dz^3 + 6z^3dy^2dx + 18xz^2dy^2dz + 18y^2zdz^2dx + 36xyzdz^2dy + 36yz^2dxdydz$.

U 25- Dada la función $y = f(u,v)$, siendo $u = x^2$, $v = \sin x$, hallar y', y'', y'''.

Solución: $y' = 2xf'_u + \cos x f'_v$, $y'' = 4x^2f''_{u^2} + 4x\cos x f''_{uv} + \cos^2 x f''_{v^2} + 2f'_u - \sin x f'_v$, $y''' = 8x^3f'''_{u^3} + +12x^2\cos x f'''_{u^2v} + 6x\cos^2 x f'''_{uv^2} + \cos^3 x f'''_{v^3} + 12xf''_{u^2} + 6(\cos x - x\sin x)f''_{uv} - -3\sin x\cos x f''_{v^2} - \cos x f'_v$.

U 26- Dada $z = f(x,y)$, siendo $x = a + ht$, $y = b + kt$, donde son constantes a, b, h, k, hallar $\dfrac{d^nz}{dt^n}$.

Solución: $f' = z'_t = z'_xx'_t + z'_yy'_t = hz'_x + kz'_y$, $f'' = z''_{t^2} = [hz'_x + kz'_y]^{(\prime)}$, $f^{(n)} = z^{(n)}_{tn} = [hz'_x + kz'_y]^{(n-1)} = = h^nz^{(n)}_{x^n} + h^{n-1}kz^{(n)}_{x^{n-1}y} + \ldots + h^mk^{n-m}z^{(n)}_{x^my^{n-m}} + \ldots + k^nz^{(n)}_{y^n}$.

U 27- Dada la función $y = f(u,v)$, siendo $u = ax^2$, $v = \arcsin x$, hallar y' e y''.

Solución: $y' = 2axf'_u + \dfrac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}f'_v$,
$y'' = 4a^2x^2f''_{u2} + \dfrac{1}{1-x^2}f''_{v^2} + f''_{uv}\dfrac{4ax}{\sqrt{1-x^2}} + 2af'_u + x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}f'_v$.

U 28- Dada la función $z = \arctan\dfrac{y}{x}$, hallar $x^2z''_{x^2} + 2xyz''_{xy} + y^2z''_{y^2}$.

Solución: Siendo z función homogénea de grado cero: $x^2z''_{x^2} + 2xyz''_{xy} + y^2z''_{y^2} = 0$.

U 29- Hallar la derivada segunda de $y = f(u,v)$, siendo $u = \cos x$, $v = \tan x$.

Solución: $y'' = \sin^2 x f''_{u^2} + \dfrac{1}{\cos^4 x}f''_{v^2} - \dfrac{2\sin x}{\cos^2 x}f''_{uv} + \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}f'_v - \cos x f'_u$.

U 30- Dada la función $y = f(u,v)$, siendo $u = \tan x$, $v = a^x$, hallar y' e y''.

Solución: $y' = \cos^2 x f'_u + a^x\ln a f'_v$,
$y'' = \dfrac{1}{\cos^4 x}f''_{u^2} + a^{2x}(\ln a)^2f''_{v^2} + \dfrac{2a^x\ln a}{\cos^2 x}f''_{uv} + 2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}f'_u + a^x(\ln a)^2f'_v$.

U 31- Aplicando la fórmula de Leibniz de la derivada de un producto, hallar la ley recurrente que existe entre las derivadas consecutivas de la función implícita y definida por la ecuación diferencial $(1-x^3)y'' + x^2y' - (1+x)y = 0$.

Solución: La fórmula de Leibniz es: $y^{(n)} = \overline{uv}^{(n} = uv^{(n)} + \binom{n}{1}u'v^{(n-1)} + \ldots + u^{(n)}v = (u+v)^{(n)}$.
Operando en la ecuación dada: $(1-x^3)y'' + x^2y' - (1+x)y = y'' - x^3y'' + x^2y' - y + xy = 0$.
Su derivada enésima es: $y^{(n+2)} - [x^3y^{(n+2)} + \binom{n}{1}x^2y^{(n+1)} + \binom{n}{2}6xy^{(n)} + \binom{n}{3}6y^{(n-1)}] + x^2y^{(n+1)} + +\binom{n}{1}2xy^{(n)} + \binom{n}{2}2y^{(n-1)} - y^{(n)} - [xy^{(n)} + \binom{n}{1}y^{(n-1)}] = 0$. Simplificando, se obtiene la ley recurrente pedida: $(1-x^3)y^{(n+2)} + (1-3n)x^2y^{(n+1)} + (-3n^2x + 5nx - x - 1)y^{(n)} + (-n^3 + 4n^2 - 4n)y^{(n-1)} = 0$.

U 32- Dada la función de n variables $z = \dfrac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}}$, hallar el valor de $z''_{x_1^2} + z''_{x_2^2} + \ldots + z''_{x_n^2}$.

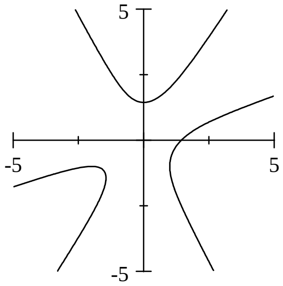
Solución: Derivando respecto a x_1, se tiene: $z'_{x_1} = (-\dfrac{n}{2} + 1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}2x_1$, $z''_{x_1^2} = (-\dfrac{n}{2} + 1)2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n)^{-\frac{n}{2}-1}(-nx_1^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$. Luego: $z''_{x_1^2} + z''_{x_2^2} + \ldots + z''_{x_n^2} = = (-\dfrac{n}{2} + 1)2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n)^{-\frac{n}{2}-1}[-n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)] = 0$.

U 33- Dada la función $y = f(x, u^2, v)$, siendo $u = \ln x$, $v = \sin x$, hallar y''.

Solución: $y'' = f''_{x^2} + f''_{xu^2}(u^2)' + f''_{xv}v' + (u^2)'\left[f''_{u^2x} + f''_{(u^2)^2}(u^2)' + f''_{u^2v}v'\right] + f'_{u^2}(u^2)'' +$
$+v'[f''_{vx} + f''_{vu^2}(u^2)' + f''_{v^2}v'] + f'_v v'' =$
$= f''_{x^2} + \dfrac{4\ln x}{x} f''_{xu^2} + 2\cos x f''_{xv} + 4(\dfrac{\ln x}{x})^2 f''_{(u^2)^2} + 4\dfrac{\ln x}{x}\cos x f''_{u^2v} + \cos^2 x f''_{v^2} + 2\dfrac{1-\ln x}{x^2} f'_{u^2} - \sin x f'_v.$

U 34- Hallar máximos y mínimos de la función y definida por la ecuación $y^3 - 3x^2y + x^3 - 3 = 0$.

Solución:



$f'_x = -6xy + 3x^2 = 0$, $x = 0$, $x = 2y$. Para $x = 0$, $y = \sqrt[3]{3}$. Para $x = 2y$, $y = -1$, $x = -2$. Los valores que toma y'' son: $y'' = \dfrac{2y-2x}{y^2-x^2} = \dfrac{2}{x+y}$, $y''(0, \sqrt[3]{3}) > 0$, luego $(0, \sqrt[3]{3})$ es mínimo; $y''(-2, -1) < 0$, luego $(-2, -1)$ es máximo.

U 35- Dada la ecuación $y^3 - x^2y + x - y = 0$, que define a y como función implícita, hallar y', y'', y''' para los puntos cuya ordenada sea 1.

Solución: Los puntos cuya ordenada es 1, son: $(0,1)$ y $(1,1)$. Derivando tres veces la ecuación dada, se obtiene: $3y^2y' - 2xy - x^2y' + 1 - y' = 0$, $6yy'^2 + 3y^2y'' - 2y - 4xy' - x^2y'' - y'' = 0$, $6y'^3 + 18yy'y'' + 3y^2y''' - 6y' - 6xy'' - x^2y''' - y''' = 0$. Sustituyendo los valores de x, y, se tiene para el punto $(0,1)$: $y' = -\dfrac{1}{2}$, $y'' = \dfrac{1}{4}$, $y''' = 0$. Y para el punto $(1,1)$: $y' = 1, y'' = 0, y''' = 0$.

U 36- Sea $y = f(u^2, v)$, siendo $u = \cos(x+z)$, $v = \sin x$, $z = \tan x$. Hallar y''.

Solución:
$y'' = 4\cos^2(x+\tan x)\left(\dfrac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) f''_{u^2} + \cos^2 x f''_{v^2} + 4\cos x\cos(x+\tan x)\left(\dfrac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) f''_{u^2v} -$
$-2\left[\sin(x+\tan x)\left(\dfrac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^2 - 2\cos(x+\tan x)\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\right] f'_u - \sin x f'_v.$

U 37- Definida la función implícita y por $y^{\frac{1}{x}} + x^{\frac{1}{y}} + \sqrt{xy} + 1 = 0$, hallar y' sin simplificar el resultado.

$$\textit{Solución: } y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-y^{\frac{1}{x}}(\ln y)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}x^{\frac{1}{y}-1} + \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}y}{\frac{1}{x}y^{\frac{1}{x}-1} - x^{\frac{1}{y}}(\ln x)\frac{1}{y^2} + \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}x}.$$

U 38- Dada la ecuación $\ln(x^2 + y^2) - \arctan\dfrac{y}{x} = 0$, que define a y como función de x, hallar y' e y''.

Solución: $y' = \dfrac{2x+y}{x-2y}$, $y'' = 10\dfrac{x^2+y^2}{(x-2y)^3}$.

U 39- Dada la función $z = \arcsin(x+y) + \arg\sinh(x-y)$, calcular $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} - \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2}$.

Solución: $z'_x = \left[1-(x+y)^2\right]^{\frac{-1}{2}} + \left[1+(x-y)^2\right]^{\frac{-1}{2}}$,
$z''_{x^2} = \left[1-(x+y)^2\right]^{\frac{-3}{2}}(x+y) - \left[1+(x-y)^2\right]^{\frac{-3}{2}}(x-y)$,
$z'_y = \left[1-(x+y)^2\right]^{\frac{-1}{2}} - \left[1+(x-y)^2\right]^{\frac{-1}{2}}$,

$z''_{y^2} = \left[1-(x+y)^2\right]^{\frac{-3}{2}}(x+y) - \left[1+(x-y)^2\right]^{\frac{-3}{2}}(x-y)$, Como $z''_{x^2} = z''_{y^2}$, se tiene que: $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} - \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0$.

U 40- Dadas las funciones $u = \dfrac{x+y}{1-xy}$, $v = \arctan x + \arctan y$, hallar $J(x,y) = \dfrac{\delta(uv)}{\delta(x,y)}$.

Solución: $J(x,y) = \dfrac{\delta(uv)}{\delta(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1+y^2}{(1-xy)^2} & \dfrac{1+x^2}{(1-xy)^2} \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \dfrac{1}{1+y^2} \end{vmatrix} = 0.$

U 41- Un punto se mueve sobre $z = \arctan\dfrac{x}{2y}$, de modo que la proyección en el plano XY, de la curva descrita por el punto, es: $x^2 - y^2 = 9$ Hallar $\dfrac{\delta z}{\delta x}$ en función de x.

Solución: Siendo: $y = (x^2-9)^{\frac{1}{2}}$, sustituyendo se tiene: $z = \arctan\dfrac{x}{2}(x^2-9)^{\frac{1}{2}}$ Luego: $z'_x = \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{4(x^2-9)}} - \dfrac{(x^2-9)^{\frac{1}{2}} - x^2(x^2-9)^{-\frac{1}{2}}}{2(x^2-9)} = \dfrac{-18}{(5x^2-36)(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}$.

U 42- Dada la función $z = f(x,u)$, siendo $u = g(x^2y)$, $y = h(x)$, hallar z' y z''.

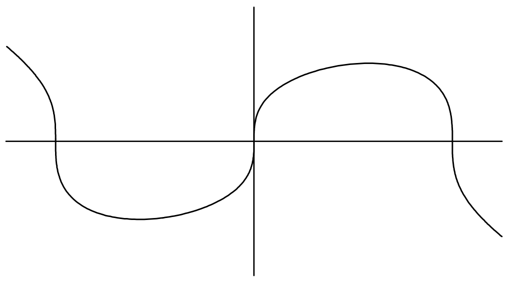
Solución: $z' = f'_x + f'_u u'_g(g'_{x^2}2x + g'_y y')$,
$z'' = f''_{x^2} + f''_{xu}u'_g(g'_{x^2}2x + g'_y y') + f''_{ux} + f''_{u^2}[u'_g(g'_{x^2}2x + g'_y y)]^2 + f'_u u''_{g^2}(g'_{x^2}2x + g'_y y')^2 u'_g +$
$+f'_u u'_g\left[\left(g''_{x^2 2}4x^2 + g''_{x^2y}y'2x\right) + 2g'_{x^2} + g''_{yx}2xy' + g''_{y^2}y'^2 + g'_y y''\right]$.

U 43- Hallar el valor de y' siendo $(y^2+ax)^2 = x^2(a^2+2ax-x^2)$, en el punto $(0,0)$.

Solución: Desarrollando: $y^4 + 2axy^2 - 2ax^3 - x^4 = 0$. Derivando sucesivamente: $4y^3y' +$ $+2ay^2 + 4axyy' - 6ax^2 - 4x^3 = 0$, $12y^2y'^2 + 4y^3y'' + 8ayy' + 4axy'^2 + 4axyy'' - 12ax - 12x^2 = 0$, $24yy'^3 + 24y^2y'y'' + 12y^2y'y'' + 4y^3y''' + 8ay'^2 + 8ayy'' + 4ay'^2 + 8axy'y'' + 4ayy'' + 4axy'y'' +$ $+4axyy''' - 12a - 24x = 0$. Introduciendo $x = y = 0$, se tiene: $12ay'^2 - 12a = 0$. Luego: $y' = \pm 1$.

U 44- Hallar máximos y mínimos de $x^3 + y^3 - a^2x = 0$.

Solución:



$y = (a^2x - x^3)^{\frac{1}{3}}$, $y' = \dfrac{a^2-3x^2}{3(a^2x-x^3)^{\frac{2}{3}}} = 0$, $x = \pm\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $y = \pm a\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$. Para $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $y'' < 0$, luego es un máximo. Para $x = -\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $y'' > 0$, luego es un mínimo.

U 45- Calcular la primera derivada de las funciones y, z definidas implícitamente en el sistema: $\cos x + \cos y + \cos z = a$, $x^3 + y^3 + z^3 = b^3$.

Solución: $f(x,y) = \cos x + \cos y + \cos z - a = 0$, $g(x,y) = x^3 + y^3 + z^3 - b^3 = 0$. Se tiene:

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} f'_x & f'_z \\ g'_x & g'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -\sin x & -\sin z \\ 3x^2 & 3z^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\sin y & -\sin z \\ 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}} = \frac{z^2 \sin x - x^2 \sin z}{-z^2 \sin y + y^2 \sin z},$$

$$z' = \frac{\begin{vmatrix} f'_y & f'_x \\ g'_y & g'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -\sin y & -\sin x \\ 3y^2 & 3x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\sin y & -\sin z \\ 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}} = \frac{x^2 \sin y - y^2 \sin x}{-z^2 \sin y + y^2 \sin z}.$$

U 46- Estudiar máximos y mínimos de $z = y^4 - 4xy + 4x^2$.

Solución: $z'_x = -4y + 8x = 0$, $z'_y = 4y^3 - 4x = 0$, Las soluciones de este sistema son: $(0,0)$, $(\pm\frac{\sqrt{2}}{4}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$. $H = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 96y^2 - 16$, Para $(0,0)$, $H < 0$, luego es puerto. Para $(\pm\frac{\sqrt{2}}{4}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$, $H > 0$, $f''_{y^2} > 0$, luego son mínimos.

U 47- Estudiar el signo de la forma $F = 19x^2 + 12y^2 + 3z^2 + u^2 - 2xy - 6xz - 2xu - 10yz - 2yu + 2zu$.

Solución:
$$\begin{array}{l} \delta_1 > 0 \\ \delta_2 > 0 \\ \delta_3 > 0 \\ \delta_4 > 0 \end{array} \begin{vmatrix} 19 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 12 & -5 & -1 \\ -3 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Siendo: $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0, \delta_4 > 0$, el signo de la forma es definido positivo.

U 48- Estudiar el signo de la forma cuadrática $F = 2x^2 + 11y^2 + 6z^2 - 8xy + 4xz - 2yz$.

Solución:
$$\begin{array}{l} \delta_1 > 0 \\ \delta_2 > 0 \\ \delta_3 > 0 \end{array} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 11 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Siendo: $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0$, el signo de la forma es definido positivo.

U 49- Estudiar el signo de la forma cuadrática cuyo hessiano es $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix}$.

Solución:
$$\begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix}.$$

Siendo: $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0$, el signo de la forma es definido negativo.

U 50- Estudiar el signo de la forma cuadrática cuyo hessiano es $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Solución:
$$\begin{array}{c|ccc|}
\delta_1 & 4 & -2 & 2 \\
\delta_2 & -2 & -1 & -1 \\
\delta_3 & 2 & -1 & 4
\end{array}.$$

Siendo: $\delta_1 > 0, \delta_2 < 0, \delta_3 < 0$, el signo de la forma es indefinido.

U 51- Sabiendo que $f(u,v,z) = 0$, $u = \sin(x+y)$, $v = \cos(x-y)$, hallar: $z''_{x^2}, z''_{y^2}, z''_{xy}$.

Solución: $z'_x = \dfrac{-1}{f'_z}[\cos(x+y)f'_u - \sin(x-y)f'_v]$, $\quad z'_y = \dfrac{-1}{f'_z}[\cos(x+y)f'_u + \sin(x-y)f'_v]$,

$$z''_{x^2} = \frac{-1}{(f'_z)^3}\left[\begin{array}{c}(f'_z)^2\left[\begin{array}{c}\cos^2(x+y)f''_{u^2} - \cos(x+y)\sin(x-y)f''_{uv} - \sin(x+y)f'_u - \\ -\cos(x+y)\sin(x-y)f''_{vu} + \sin^2(x-y)f''_{v^2} - \cos(x-y)f'_v\end{array}\right] + \\ +f''_{z^2}[\cos(x+y)f'_u - \sin(x-y)f'_v]^2\end{array}\right],$$

$$z''_{y^2} = \frac{-1}{(f'_z)^3}\left[\begin{array}{c}(f'_z)^2\left[\begin{array}{c}\cos^2(x+y)f''_{u^2} + \cos(x+y)\sin(x-y)f''_{uv} - \sin(x+y)f'_u + \\ +\cos(x+y)\sin(x-y)f''_{vu} + \sin^2(x-y)f''_{v^2} - \cos(x-y)f'_v\end{array}\right] + \\ +f''_{z^2}[\cos(x+y)f'_u + \sin(x-y)f'_v]^2\end{array}\right],$$

$$z''_{xy} = \frac{-1}{(f'_z)^3}\left[\begin{array}{c}(f'_z)^2\left[\begin{array}{c}\cos^2(x+y)f''_{u^2} + \cos(x+y)\sin(x-y)f''_{uv} - \sin(x+y)f'_u - \\ -\cos(x+y)\sin(x-y)f''_{vu} - \sin^2(x-y)f''_{v^2} + \cos(x-y)f'_v\end{array}\right] + \\ +f''_{z^2}[\cos(x+y)f'_u - \sin(x-y)f'_v][\cos(x+y)f'_u + \sin(x-y)f'_v]\end{array}\right].$$

U 52- Definida la función y por medio de la ecuación $y = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x+\ldots}}}$, hallar y' e y'' en función de x.

Solución: $y = \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{2y}} = \dfrac{2y}{2xy+1}$, $y = \dfrac{1}{2x}$, $y' = \dfrac{-1}{2x^2}$, $y'' = \dfrac{1}{x^3}$.

U 53- Calcular las derivadas primeras de las tres funciones implícitas y, z, u definidas por el sistema

$$\begin{array}{lllll}
u & +x & +y & +z & = a \\
u^2 & +x^2 & +y^2 & +z^2 & = b^2 \\
u^3 & +x^3 & +y^3 & +z^3 & = b^3
\end{array}$$

Solución: Derivando respecto a x (variable independiente), se tiene: $u' + 1 + y' + z' = 0$, $2uu' + 2x + 2yy' + 2zz' = 0$, $3u^2u' + 3x^2 + 3y^2y' + 3z^2z' = 0$. Luego:

$$u' = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2u & 2y & 2z \\ 3u^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}} = -\frac{6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}}{6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & y & z \\ u^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}} = -\frac{V(x,y,z)}{V(u,y,z)} = -\frac{(x-y)(x-z)}{(u-y)(u-z)}.$$

De forma análoga: $y' = -\dfrac{(u-x)(x-z)}{(u-y)(y-z)}$, $z' = -\dfrac{(u-x)(y-x)}{(y-z)(u-z)}$.

Nota: V = Determinante de Vandermonde.

U 54- Hallar la derivada segunda de $y = f(\frac{u+v}{u-v})$, sabiendo que u y v son funciones de x.

Solución: $y' = f'_{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)}\left(\frac{u+v}{u-v}\right)'$, $y'' = f''_{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^2}\left(\frac{u+v}{u-v}\right)'^2 + f'_{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)}\left(\frac{u+v}{u-v}\right)''$,
$\left(\frac{u+v}{u-v}\right)' = 2\frac{uv'-u'v}{(u-v)^2} = A$,
$\left(\frac{u+v}{u-v}\right)'' = 2\frac{u^2v''-uvu''-uvv''+v^2u''-2u'v'v'+2vu'^2+2uv'^2-2vu'v'}{(u-v)^3} = B$,
$y'' = A^2 f''_{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^2} + Bf'_{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)}$.

U 55- Demostrar la identidad de Euler $(xf'_x + yf'_y + zf'_z)^{(p)} = m(m-1)\dots(m-p+1)f(x,y,z)$, siendo $f(x,y,z)$ homogénea de grado m.

Solución: Se tiene por definición de función homogénea que: $f(xt,yt,zt) = t^m f(x,y,z)$, Derivando sucesivamente: $(xf'_x + yf'_y + zf'_z)^{(1)} = xf'_{xt} + yf'_{yt} + zf'_{zt} = mt^{m-1}f(x,y,z) = mf(x,y,z)$,
$(xf'_x + yf'_y + zf'_z)^{(2)} = m(m-1)t^{m-2}f(x,y,z) = m(m-1)f(x,y,z)$. Luego, generalizando:
$(xf'_x + yf'_y + zf'_z)^{(p)} = m(m-1)\dots(m-p+1)t^{m-p}f(x,y,z) = m(m-1)\dots(m-p+1)f(x,y,z)$.

U 56- Hallar la d^2z de la función $z = \arctan\frac{y}{x}$.

Solución: $d^2z = z''_{x^2}(dx)^2 + z''_{y^2}(dy)^2 + 2z''_{xy}dxdy$, $z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$, $z''_{x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$,
$z''_{xy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$. Luego:
$d^2z = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}(dx)^2 - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}(dy)^2 + 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$.

U 57- Hallar la d^2z de la función $z = \arcsin\frac{y}{x}$.

Solución: $d^2z = z''_{x^2}(dx)^2 + z''_{y^2}(dy)^2 + 2z''_{xy}dxdy$, $z'_x = -\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,
$z''_{x^2} = \frac{y\left[\sqrt{x^2-y^2} + x^2(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{x^2(x^2-y^2)}$, $z''_{xy} = \frac{-x(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^2-y^2}$, $z''_{y^2} = \frac{y(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^2-y^2}$. Luego:
$d^2z = \frac{y\left[\sqrt{x^2-y^2} + x^2(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{x^2(x^2-y^2)}(dx)^2 + \frac{y(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^2-y^2}(dy)^2 - \frac{2x(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^2-y^2}dxdy$.

U 58- Dada la función $y = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, hallar $P(x,y) = y''(x^2-1) + 2xy' - n(n+1)y$.

Solución: $z = (x^2-1)^n$, $\ln z = n\ln(x^2-1)$, $\frac{z'}{z} = \frac{2nx}{x^2-1}$, $(x^2-1)z' - 2nxz = 0$. Aplicando Leibniz: $z^{(n+2)}(x^2-1) + \binom{n+1}{1}z^{(n+1)}2x + \binom{n+1}{2}z^{(n)}2 - 2n(xz^{(n+1)} + \binom{n+1}{1}z^{(n)}) = 0$, Ahora bien: $z^{(n+2)} = y''$. Luego: $y''(x^2-1) + 2(n+1)xy' + n(n+1)y - 2nxy' - 2n(n+1)y = 0$. Simplificando: $y''(x^2-1) + 2xy' - n(n+1)y = 0$. Luego: $P(x,y) = 0$.

U 59- Hallar dz y du en el sistema: $x+y+z+u = 1$, $\ln(xyzu) = 2$.

Solución: $dx+dy+dz+du = 0$, $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{du}{u} = 0$. Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: dz y du. Luego:

$$dz = -\frac{\begin{vmatrix} dx+dy & 1 \\ \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y} & \frac{1}{u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{u} \end{vmatrix}} = \frac{z[dx(yu-xy)+dy(xu-xy)]}{xy(z-u)},$$

$$du = \frac{\begin{vmatrix} dx+dy & 1 \\ \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{u} \end{vmatrix}} = \frac{u[dx(-yz+xy)+dy(-xz+xy)]}{xy(z-u)}.$$

U 60- Dada la función $w = f(u,v,z)$, siendo $u = \phi(x,z)$, $v = \varphi(y,z)$, $z = \psi(x,y)$, hallar $\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}$.

Solución: $w'_x = f'_u(u'_x + u'_z z'_x) + f'_v v'_z z'_x + f'_z z'_x$,
$w''_{x^2} = f''_{u^2}(u'_x + u'_z z'_x)^2 + f''_{v^2} v'^2_z z'^2_x + f''_{z^2} z'^2_x + 2f''_{uv}(u'_x + u'_z z'_x)v'_z z'_x + 2f''_{uz}(u'_x + u'_z z'_x)z'_x + 2f''_{vz} v'_z z'^2_x +$
$+f'_u(u''_{x^2} + u''_{z^2} z'^2_x + 2u''_{xz} z'_x + u'_z z''_{x^2}) + f'_v(v''_{z^2} z'^2_x + v'_z z''_{x^2}) + f'_z z''_{x^2}$.

U 61- Hallar máximos y mínimos de $z = x^4 + y^4 - ax^2y - axy^2 + c^2x^2 + c^2y^2$.

Solución: $z'_x = 4x^3 - 2axy - ay^2 + 2c^2x = 0$, $z'_y = 4y^3 - 2axy - ax^2 + 2c^2y = 0$. Este sistema tiene como solución: $x = y$, es decir: $4x^3 - 3ax^2 + 2c^2x = 0$, cuyas raíces son: $x = 0$, $x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8}$. Por tanto, los puntos a estudiar son: $(0,0)$ y $(\frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8}, \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8})$. Para calcular los hessianos se tiene que para $x = y$, $z''_{x^2} = z''_{y^2} = 12x^2 - 2ax + 2c^2$, $z''_{xy} = -4ax$. Para $(0,0)$, $H = \begin{vmatrix} 2c^2 & 0 \\ 0 & 2c^2 \end{vmatrix} = 4c^4 > 0$, luego $(0,0)$ es un mínimo.

Para $x = y = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8}$, $H = \begin{vmatrix} 12x^2 - 2ax + 2c^2 & -4ax \\ -4ax & 12x^2 - 2ax + 2c^2 \end{vmatrix} =$
$= (12x^2 - 2ax + 2c^2)^2 - 16a^2x^2 = (12x^2 - 2ax + 2c^2 + 4ax)(12x^2 - 2ax + 2c^2 - 4ax)$. Como: $4x^2 - 3ax + 2c^2 = 0$, $ax = \frac{4x^2 + 2c^2}{3}$. Por tanto, se tiene que: $H = \left(12x^2 + 2\frac{4x^2 + 2c^2}{3} + 2c^2\right)\left(12x^2 - 6\frac{4x^2 + 2c^2}{3} + 2c^2\right)$, cuyo primer factor es siempre > 0. El segundo factor tiene el signo de $2x^2 - c^2 = 2\left(\frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8}\right)^2 - c^2 = F$. Si $F > 0$, es un mínimo. Si $F < 0$, es un máximo. Si $F = 0$, es puerto. En cualquiera de estos casos ha de cumplirse que: $9a^2 - 32c^2 \geq 0$. Operando, se tiene para $x = y = \frac{3a + \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8}$, si $a > \frac{4\sqrt{2}}{3}c$, $F > 0$, es mínimo; si $a < -\frac{4\sqrt{2}}{3}c$, $F < 0$, es máximo. Para $x = y = \frac{3a - \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8}$, si $a > \frac{4\sqrt{2}}{3}c$, $F < 0$, es máximo; si $a < -\frac{4\sqrt{2}}{3}$, $F > 0$, es mínimo. Para $9a^2 = 32c^2$, es decir, para $a = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}c$, $F = 0$, es puerto.

Nota: en lo anterior se ha supuesto $c > 0$, lo que no significa ninguna restricción ya que en el enunciado sólo existe c^2, que es > 0.

U 62- Por el punto de coordenadas (a,b,c) se traza un plano que forma con los ejes coordenados rectangulares, un tetraedro de volumen mínimo. Hallar este volumen y la ecuación del plano.

Solución: Sea el plano $\lambda(x-a) + \mu(y-b) + \nu(z-c) = 0$, que corta a los ejes coordenados en: $\left(\frac{\lambda a + \mu b + \nu c}{\lambda}, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{\lambda a + \mu b + \nu c}{\mu}, 0\right)$, $\left(0, 0, \frac{\lambda a + \mu b + \nu c}{\nu}\right)$. El volumen del tetraedro es: $V = \frac{(\lambda a + \mu b + \nu c)^3}{6\lambda\mu\nu} = \frac{S^3}{6\lambda\mu\nu}$. Derivando se tiene: $6V'_\lambda = \frac{3S^2a\lambda\mu\nu - \mu\nu S^3}{\lambda^2\mu^2\nu^2} = 0$, $3\lambda a = S$. De forma similar se obtiene: $3\mu b = S$, $3\nu c = S$. Luego: $\lambda a = \mu b = \nu c$. Por tanto, el volumen mínimo del tetraedro es: $V = \frac{S^3}{6\lambda\mu\nu} = \frac{3\lambda a 3\mu b 3\nu c}{6\lambda\mu\nu} = \frac{9abc}{2}$. La ecuación del plano viene dada por:

$$\frac{S}{3a}(x-a)+\frac{S}{3b}(y-b)+\frac{S}{3c}(z-c)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-3=0.$$

U 63- Hallar la diferencial total segunda de z, sabiendo que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Solución: $z=\frac{c}{ab}(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{\frac{1}{2}}$, $z'_x=-\frac{cb}{a}x(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{-\frac{1}{2}}$,

$z''_{x^2}=-\frac{cb}{a}\left[\frac{-1}{2}x^2(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{-\frac{3}{2}}+(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$,

$z'_y=-\frac{ca}{b}y(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{-\frac{1}{2}}$,

$z''_{y^2}=-\frac{ca}{b}\left[\frac{-1}{2}y^2(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{-\frac{3}{2}}+(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$,

$z''_{xy}=-abcxy(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{-\frac{3}{2}}$, Luego:

$d^2z=-\frac{cb}{a}\left[\frac{-1}{2}x^2(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{-\frac{3}{2}}+(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{-\frac{1}{2}}\right](dx)^2-$

$-\frac{ca}{b}\left[\frac{-1}{2}y^2(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{-\frac{3}{2}}+(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{-\frac{1}{2}}\right](dy)^2-$

$-abcxy(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)^{-\frac{3}{2}}dxdy.$

U 64- Hallar la d^2z de la función $z=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

Solución: $z'_x=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$, $z'_y=\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}$, $z''_{x^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]^2}$,

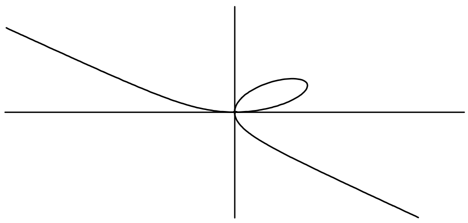
$z''_{y^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]^2}$, $z''_{xy}=\frac{-2(x-a)(y-b)}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]^2}$, Luego:

$d^2z=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]^2}(dx)^2+\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]^2}(dy)^2-$

$-\frac{4(x-a)(y-b)}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]^2}dxdy.$

U 65- Hallar máximos y mínimos del folium de Descartes, $x^3+y^3-3axy=0$.

Solución:



Siendo $y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=0$, derivando se tiene que: $f'_x=3x^2-3ay=0$, $y=\frac{x^2}{a}$, $x^3+(\frac{x^2}{a})^3-3ax\frac{x^2}{a}=0$, $x^3(x^3-2a^3)=0$, $x=0$, $x=a\sqrt[3]{2}$. Estas abscisas corresponden a los puntos: $(0,0)$ y $(a\sqrt[3]{2},a\sqrt[3]{4})$. Para $(0,0)$, $f'_y=0$, $f''_{y^2}=0$, $f'''_{y^3}=6$, luego es un punto doble. Para $(a\sqrt[3]{2},a\sqrt[3]{4})$, $y''=-\frac{f''_{x^2}}{f'_y}=\frac{-6x}{3y^2-3ax}=\frac{-6a\sqrt[3]{2}}{3(a\sqrt[3]{4})^2-3a^2\sqrt[3]{2}}<0$, luego es un máximo.

U 66- Dada la función $z=f(u,\sin v)$, siendo $u=ax^2$, $v=by^2$, hallar d^2z.

Solución: $d^2z=(4a^2x^2z''_{u^2}+2az'_u)(dx)^2+(4b^2y^2z''_{(\sin v)^2}+2bz'_{\sin v})(dy)^2+8abxyz''_{u,\sin v}dxdy$.

U 67- Calcular $(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$, siendo $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$.

Solución: $(dx)^2=\left(\sin\theta\cos\varphi\,d\rho+\rho\cos\varphi\cos\theta\,d\theta-\rho\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi\right)^2$,

$(dy)^2=\left(\sin\theta\sin\varphi\,d\rho+\rho\sin\varphi\cos\theta\,d\theta+\rho\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi\right)^2$,

$(dz)^2 = \left(\cos\theta \, d\varphi - \rho \sin\theta \, d\theta\right)^2$.

Sumando y simplificando, se tiene: $(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\theta)^2 + \rho^2 \sin^2\theta \, (d\varphi)^2$.

U 68- Calcular las derivadas primeras de las funciones implícitas y, z definidas por el sistema: $\cos^2 x + \cos^2 z = 1$, $x^3 + z^3 = R^3$.

Solución: Derivando las ecuaciones, se tiene el sistema: $-2\cos x \; \sin x - 2\cos y \; \sin y \; y' = 0$, $3x^2 + 3y^2 y' + 3z^2 z' = 0$ De donde: $y' = \dfrac{z^2 \sin 2x - x^2 \sin 2z}{-z^2 \sin 2y + y^2 \sin 2z}$, $z' = \dfrac{x^2 \sin 2y - y^2 \sin 2x}{-z^2 \sin 2y + y^2 \sin 2z}$.

U 69- Dada la forma cuadrática
$f(x,y,z,u) = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + A_4 u^2 + 2B_1 xy + 2B_2 xz + 2B_3 xu + 2B_4 yz + 2B_5 yu + 2B_6 zu$,
demostrar la identidad: $x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} + u_1 f'_{u_2} \equiv x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1} + u_2 f'_{u_1}$.

Solución: Se considera la función:

$$f(x+m, y+n, z+p, u+q) = f(x,y,z,u) + \frac{f'_x m + f'_y n + f'_z p + f'_u q}{1!} + \frac{(f'_x m + f'_y n + f'_z p + f'_u q)^{(2)}}{2!}.$$

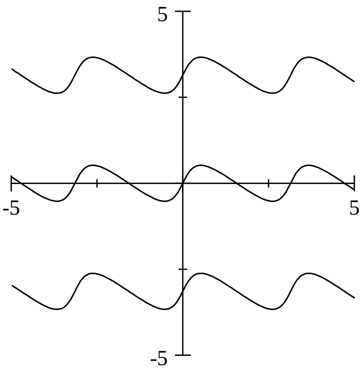
Sea P un punto alineado con (x_1, y_1, z_1, u_1) y (x_2, y_2, z_2, u_2), cuyas coordenadas son: $(x_1 - \lambda x_2, y_1 - \lambda y_2, z_1 - \lambda z_2, u_1 - \lambda u_2)$. Se tiene que: $f(x_1 - \lambda x_2, y_1 - \lambda y_2, z_1 - \lambda z_2, u_1 - \lambda u_2) =$
$= f(x_1, y_1, z_1, u_1) - \lambda(x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1} + u_2 f'_{u_1}) + \lambda^2 f(x_2, y_2, z_2, u_2)$ [**A**].

Haciendo: $x = -\lambda x_2$, $m = x_1, \ldots$, se tiene: $f(x+m, y+n, z+p, u+q) =$
$= f(-\lambda x_2, -\lambda y_2 - \lambda z_2 - \lambda u x_2) + (x_1 f'_{-\lambda x_2} + y_1 f'_{-\lambda y_2} + z_1 f'_{-\lambda z_2} + u_1 f'_{-\lambda u_2}) + f(x_1, y_1, z_1, u_1) =$
$= (-\lambda)^2 f(x_2, y_2, z_2, u_2) - \lambda(x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} + u_1 f'_{u_2}) + f(x_1, y_1, z_1, u_1)$.

Comparando con [**A**], se tiene que: $x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} + u_1 f'_{u_2} \equiv x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1} + u_2 f'_{u_1}$.

U 70- Dada la función y definida por la ecuación $f(x,y) = B\cot(x+y) - A\cot x = 0$, hallar sus máximos y mínimos. Aplicación para $A = 1$, $B = 3$.

Solución:



Se supone que tanto A como B son > 0. De la ecuación dada se tiene: $\cot(x+y) = \dfrac{A}{B}\cot x$.
Derivando:
$f'_x = -B[1 + \cot^2(x+y)] + A(1 + \cot^2 x) = -B(1 + \dfrac{A^2}{B^2}\cot^2 x) + A(1 + \cot^2 x) = 0$, de donde se obtiene: $\cot x = \pm\sqrt{\dfrac{B}{A}}$, $x = \operatorname{arccot}\left(\pm\sqrt{\dfrac{B}{A}}\right) = \pm\operatorname{arccot}\sqrt{\dfrac{B}{A}}$, $\cot(x+y) = \pm\sqrt{\dfrac{A}{B}}$, $x + y = \operatorname{arccot}\left(\pm\sqrt{\dfrac{A}{B}}\right) = \pm\operatorname{arccot}\sqrt{\dfrac{A}{B}}$, $f'_y = -B[1 + \cot^2(x+y)] = -B(1 + \dfrac{A}{B}) = -A - B \neq 0$, luego no se trata de punto singular. Para hallar máximos y mínimos se calcula: $y'' = -\dfrac{f''_{x^2}}{f'_y}$, siendo: $f''_{x^2} = 2B\cot(x+y)[1 + \cot^2(x+y)] - 2A\cot x(1 + \cot^2 x) = \pm 2(A+B)\left(\sqrt{\dfrac{A}{B}} - \sqrt{\dfrac{B}{A}}\right)$. Luego: $y'' = -\dfrac{\cdot f''_{x^2}}{f'_y} = \dfrac{\pm 2(A+B)\left(\sqrt{\dfrac{A}{B}} - \sqrt{\dfrac{B}{A}}\right)}{A+B} = \pm 2\left(\sqrt{\dfrac{A}{B}} - \sqrt{\dfrac{B}{A}}\right)$. Para $x = \operatorname{arccot}\sqrt{\dfrac{B}{A}}$, siendo $A > B$, $y'' > 0$, es un mínimo; siendo $A < B$, $y'' < 0$, es un máximo. Para $x = -\operatorname{arccot}\sqrt{\dfrac{B}{A}}$,

siendo $A > B$, $y'' < 0$, es un máximo; siendo $A < B$, $y'' > 0$, es un mínimo. Para $A = 1$, $B = 3$, se tiene que para $x = \operatorname{arccot}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $y = \operatorname{arccot}\sqrt{\frac{1}{3}} - \operatorname{arccot}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $y'' < 0$, es un máximo, y para. $x = -\operatorname{arccot}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $y = -\operatorname{arccot}\sqrt{\frac{1}{3}} + \operatorname{arccot}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $y'' > 0$, es un mínimo.

U 71- Hallar dz y du en el sistema: $xy + zu = 2$, $x + y = 3(z + u)$.

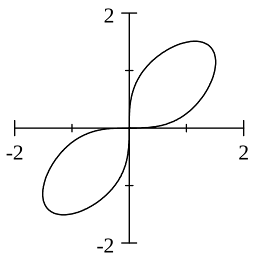
Solución: Derivando: $ydx + xdy + udz + zdu = 0$, $dx + dy - 3dz - 3du = 0$, de donde se obtiene: $dz = \frac{(3y+z)dx + (3x+z)dy}{3(u-z)}$, $du = \frac{(3y+u)dx + (3x+u)dy}{6u - x - y}$.

U 72- Hallar la máxima distancia del centro de la elipse $\frac{x2}{a^2} + \frac{y2}{b^2} = 1$, a una de sus normales, obteniendo previamente la ecuación de las normales y las coordenadas del pie en éstas.

Solución: Siendo (α, β) un punto de la elipse, es decir: $\frac{\alpha 2}{a^2} + \frac{\beta 2}{b^2} - 1 = 0$, la ecuación de la normal en ese punto es: $y - \beta = \frac{a^2\beta}{b^2\alpha}(x - \alpha)$. La perpendicular a la normal desde el centro, es: $y = -\frac{b^2\alpha}{a^2\beta}x$. Las coordenadas del pie son: $x = \frac{a^2(a^2-b^2)\alpha\beta^2}{\alpha^2 b^4 + a^4\beta^2}$, $y = -\frac{b^2(a^2-b^2)\alpha^2\beta}{\alpha^2 b^4 + a^4\beta^2}$. Por tanto, se obtiene que el cuadrado de la distancia desde el centro, es: $d^2 = \left(\frac{a^2(a^2-b^2)\alpha\beta^2}{\alpha^2 b^4 + a^4\beta^2}\right)^2 + \left(\frac{b^2(a^2-b^2)\alpha^2\beta}{\alpha^2 b^4 + a^4\beta^2}\right)^2 = \frac{(a^2-b^2)^2\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 b^4 + a^4\beta^2}$. Derivando e igualando a cero, se tiene que: $\alpha^2 = \frac{a^3}{a+b}$, $\beta^2 = \frac{b^3}{a+b}$. Sustituyendo en d, se tiene que la distancia mínima es: $a - b$.

U 73- Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy = 0$.

Solución:



Se trata de una curva simétrica respecto al origen y a la recta $x = y$. Derivando se tiene: $f'_x = 4x^3 - 4y = 0$. Y sustituyendo en $f(x,y)$, se tienen los puntos: $(0,0), (3^{\frac{1}{8}}, 27^{\frac{1}{8}}), (-3^{\frac{1}{8}}, -27^{\frac{1}{8}})$. Como: $y'' = -\frac{f''_{x^2}}{f'_y} = \frac{-3x^2}{y^3 - x}$, para $(3^{\frac{1}{8}}, 27^{\frac{1}{8}})$, $y'' < 0$, es un máximo de y. Para $(-3^{\frac{1}{8}}, -27^{\frac{1}{8}})$, $y'' > 0$, es un mínimo de y. Por simetría respecto a $x = y$, se tiene que: $(27^{\frac{1}{8}}, 3^{\frac{1}{8}})$ es un máximo de x, y $(-27^{\frac{1}{8}}, -3^{\frac{1}{8}})$ es un mínimo de x. Para $(0,0)$, se tiene que: $f'(0,0) = 0$, y $f''(0,0) = -8y' = 0$, que corresponde a la tangente $y = 0$. Sustituyendo x por y, la tangente es $x = 0$. Por tanto, $(0,0)$ es un punto singular con tangentes de inflexión: $x = 0$, $y = 0$.

U 74- Empleando el método de Sylvester, indicar la naturaleza de la forma cuadrática $f(x,y,z,u) = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 4xy + 4xz - 2xu + 2yz - 6yu + 6zu$, .

Solución: Las sucesivas derivadas son: $f'_x = 2x - 4y + 4z - 2u$, $f''_{x^2} = 2$, $f''_{xy} = -4$, $f''_{xz} = 4$, $f''_{xu} = -2$, $f'_y = 2y - 4x + 2z - 6u$, $f''_{y^2} = 2$, $f''_{yz} = 2$, $f''yu = -6$, $f'_z = 2z + 4x + 2y + 6u$, $f''_{z^2} = 2$,

$f''_{zu} = 6,\ f'_u = 2u - 2x - 6y + 6z,\ f''_{u^2} = 2.$ Por tanto, se tiene: $H = \begin{array}{c|cccc} \delta_1 & 2 & -4 & 4 & -2 \\ \delta_2 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ \delta_3 & 4 & 2 & 2 & 6 \\ \delta_4 & -2 & -6 & 6 & 2 \end{array}$. Siendo: $\delta_1 > 0,\ \delta_2 < 0,\ \delta_3 < 0,$ la forma es puerto, indefinida en signo.

U 75- Dado el sistema $xy + zu = a,\ \dfrac{x+y}{z+u} = b,$ calcular las derivadas parciales segundas de z y u respecto de x e y.

Solución: Derivando respecto a x, se tiene: $z'_x u + zu'_x + y = 0,\ bz'_x + bu'x - 1 = 0,$ de donde resolviendo este sistema, se tiene: $u'_x = \dfrac{\frac{u}{b} + y}{u - z} = \dfrac{u + by}{b(u-z)},\ z'_x = \dfrac{1}{b} - \dfrac{\frac{u}{b} + y}{u - z} = -\dfrac{z + by}{b(u-z)}.$ Derivando respecto a y, se tiene: $z'_y u + zu'_y + x = 0,\quad bz'_y + bu'_y - 1 = 0,$ de donde: $u'_y = \dfrac{\frac{u}{b} + x}{u - z} = \dfrac{u + bx}{b(u-z)},\quad z'_y = \dfrac{1}{b} - \dfrac{\frac{u}{b} + x}{u - z} = -\dfrac{z + bx}{b(u-z)}.$ Derivando, se obtienen: $z''_{x^2} = \dfrac{-\frac{u'_x}{b}(u-z) + (u'_x - z'_x)(\frac{u}{b} + y)}{(u-z)^2} = \dfrac{2(u+by)(z+by)}{b^2(u-z)^3}.$ Análogamente se obtienen: $z''_{y^2} = \dfrac{2(u+bx)(z+bx)}{b^2(u-z)^3},\ u''_{x^2} = \dfrac{-2(u+by)(z+by)}{b^2(u-z)^3},\ u''_{y^2} = \dfrac{-2(u+bx)(z+bx)}{b^2(u-z)^3}.$

U 76- Encontrar en el plano de un triángulo dado, el punto P tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a los tres vértices del triángulo, sea mínima.

Solución: Sean los vértices: $(0,0),\ (a,0),\ (b,c).$ $S = x^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2,$ $S'_x = 2x + 2(x-a) + 2(x-b) = 0,\quad S'_y = 2y + 2y + 2(y-c) = 0.$ Luego: $x = \dfrac{a+b}{3},\quad y = \dfrac{c}{3}.$ Además: $S''_{x^2} = 6,\ S''_{xy} = 0,\ S''_{y^2} = 6.$ Luego: $H = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0,$ por lo que se trata de un mínimo. La solución es el centro de gravedad del triángulo.

U 77- Desarrollar por Mac-Laurin la función de dos variables $z = \dfrac{x+y+1}{x+y-1},$ obteniendo hasta los términos de segundo grado.

Solución: $z = \dfrac{x+y-1+2}{x+y-1} = 1 - \dfrac{2}{1-(x+y)} = 1 - 2[1 + (x+y) + (x+y)^2 + \ldots] =$
$= -1 - 2x - 2y - 2x^2 - 2y^2 - 4xy + \ldots$

U 78- Partir un número A en tres sumandos $x,\ y,\ z,$ tales que $P = x^m \cdot y^n \cdot z^p$ sea máximo. Nota: Los valores de $x,\ y,\ z,\ m,\ n,\ p,$ son positivos.

Solución: $P = x^m y^n (A-x-y)^p.$ Luego: $P'_x = mx^{m-1}y^n(A-x-y)^p - p(A-x-y)^{p-1}x^m y^n = 0,$ de donde: $m(A-x-y) - px = 0.$ $P'_y = nx^m y^{n-1}(A-x-y)^p - p(A-x-y)^{p-1}x^m y^n = 0,$ de donde: $n(A-x-y) - py = 0.$ Luego: $x = \dfrac{mA}{m+n+p},\ y = \dfrac{nA}{m+n+p},\ z = \dfrac{pA}{m+n+p}.$

U 79- Dada la función $f(xy, y^3 - 3xyz) = 0,$ que define a z como función implícita de $x,y,$ hallar $F(x,y) = x^2 z'_x - xyz'_y + y^2.$

Solución: Haciendo: $u = xy,\quad v = y^3 - 3xyz,$ se tiene: $u'_x = y,\quad u'_y = x,\quad v'_x = -3yz,$ $v'_y = 3y^2 - 3xz,\ v'_z = -3xy.$ Derivando f respecto a $x,$ se tiene: $f'_u u'_x + f'_v(v'_x + v'_z z'_x) = 0.$ Derivando respecto a $y,$ se tiene: $f'_u u'_y + f'_v(v'_y + v'_z z'_y) = 0.$ De donde se obtiene: $z'_x = \dfrac{-\frac{f'_u u'_x}{f'_v} - v'_x}{v'_z},$ $z'_y = \dfrac{-\frac{f'_u u'_y}{f'_v} - v'_y}{v'_z}.$ Luego: $F(x,y) = x^2 z'_x - xyz'_y + y^2 = x^2 \dfrac{-\frac{f'_u u'_x}{f'_v} - v'_x}{v'_z} - xy\dfrac{-\frac{f'_u u'_y}{f'_v} - v'_y}{v'_z} + y^2 =$

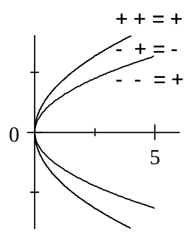
$$= x^2 \frac{-\frac{f'_u y}{f'_v} + 3yz}{-3xy} - xy \frac{-\frac{f'_u x}{f'_v} - 3y^2 + 3xz}{-3xy} + y^2 = 0.$$

U 80- Dado el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ encontrar en el primer octante de esta superficie, un punto P tal que el plano tangente en P al elipsoide determine con los planos coordenados, un tetraedro de volumen mínimo, y hallar este volumen.

Solución: Sea $P(\alpha,\beta,\gamma)$. Se cumplen: $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1,$ $\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 1.$ Este plano corta a los ejes en los puntos: $(\frac{a^2}{\alpha},0,0),$ $(0,\frac{b^2}{\beta},0),$ $(0,0,\frac{c^2}{\gamma}).$ El volumen del tetraedro formado por estos tres puntos y el origen, es: $V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a^2}{\alpha} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b^2}{\beta} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{c^2}{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^2b^2c^2}{6\alpha\beta\gamma}.$ Sea la función: $W = \frac{a^2b^2c^2}{6\alpha\beta\gamma} + \lambda\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) = 0.$ Derivando se tiene que: $W'_\alpha = \frac{a^2b^2c^2}{6} \cdot \frac{-1}{\alpha^2\beta\gamma} + \frac{2\lambda\alpha}{a^2} = \frac{-V}{\alpha} + \frac{2\lambda\alpha}{a^2} = 0.$ Análogamente, obteniendo W'_β y W'_γ se tiene que: $\frac{-V}{\beta} + \frac{2\lambda\beta}{b^2} = 0,$ $\frac{-V}{\gamma} + \frac{2\lambda\gamma}{c^2} = 0.$ Luego: $\alpha^2 = \frac{a^2V}{2\lambda},$ $\beta^2 = \frac{b^2V}{2\lambda},$ $\gamma^2 = \frac{c^2V}{2\lambda}.$ Por tanto: $\frac{V}{2\lambda} + \frac{V}{2\lambda} + \frac{V}{2\lambda} = 1,$ de donde: $\lambda = \frac{3V}{2}.$ Luego: $\alpha^2 = \frac{a^2V}{3V} = \frac{a^2}{3},$ $\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$ Análogamente: $\beta = \frac{b\sqrt{3}}{3},$ $\gamma = \frac{c\sqrt{3}}{3}.$ Sustituyendo: $V = \frac{abc\sqrt{3}}{2}$ y $P(\frac{a\sqrt{3}}{3},\frac{b\sqrt{3}}{3},\frac{c\sqrt{3}}{3}).$

U 81- Hallar máximos, mínimos y puertos de $z = (y^2 - 4x)(y^2 - 2x),$ estudiando los valores de z en el entorno del punto $(0,0).$

Solución: Las derivadas parciales son: $z'_x = -6y^2 + 16x,$ $z'_y = 4y^3 - 12xy = 4y(y^2 - 3x),$ $z''_{x^2} = 16,$ $z''_{xy} = -12y,$ $z''_{y^2} = 12y^2 - 12x.$ Para $z'_x = 0,$ $z'_y = 0,$ se obtiene una sola solución: $x = y = 0,$ cuyo hessiano es: $\begin{vmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$ Luego, $(0,0,0)$ es puerto. La intersección con el plano tangente $z = 0,$ da las parábolas: $y^2 - 4x = 0,$ $y^2 - 2x = 0,$ de eje común $y = 0$ y tangente común $x = 0$, en el vértice $(0,0)$, estando la segunda parábola en el interior de la primera. En el entorno de $(0,0,0)$, se tiene: $z_1 = (y_1^2 - 4x_1)(y_1^2 - 2x_1),$ luego: $y_1^2 - 4x_1 = 0,$ $y_1^2 - 2x_1 = 0.$



En el interior de esta segunda parábola el signo es negativo y en su exterior es positivo. En el exterior de la primera parábola el signo es positivo, y en su interior negativo. Luego en la zona interior a la primera, siendo ambos signos negativos su producto es positivo, por lo que la superficie está por encima del plano tangente. En la zona exterior a la segunda parábola, siendo ambos signos positivos su producto lo es, por lo que la superficie está por encima del plano tangente. En la zona intermedia de las dos parábolas, siendo un signo positivo y negativo el otro, su producto es negativo, por lo que la superficie está por debajo del plano tangente.

U 82- Definida la función y por medio del límite $y = \sqrt{x + \sqrt{y + \sqrt{x + \ldots}}}$, hallar y' e y''.

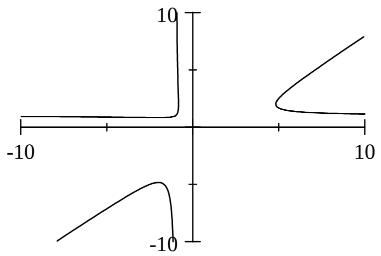
Solución: $y = \sqrt{x + \sqrt{y + y}}$, obteniéndose: $f(x,y) = y^4 - 2y^2x - 2y + x^2 = 0$. Derivando: $y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{y^2 - x}{2y^3 - 2yx - 1}$, $y'' = \frac{-f''_{x^2}f'^2_y + 2f''_{xy}f'_xf'_y - f''_{y^2}f'^2_x}{f'^3_y} = \frac{-2y^6 + xy^4 - x^2y^2 + 2x^3 - 2y^3 + 2xy}{(2y^3 - 2xy - 1)^2}$.

U 83- Dadas las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$, $x^2 + y^2 - zx = 0$, hallar las diferenciales primeras en el origen $(0,0,0)$.

Solución: Diferenciando: $2xdx + 2ydy + 2zdz - 2adx = 0$, $2xdx + 2ydy - xdz - zdx = 0$. De donde, para $(0,0,0)$, se tiene: $dx = 0$. Volviendo a diferenciar, se tiene: $(dx)^2 + xd^2x + (dy)^2 + yd^2y + (dz)^2 + zd^2z - ad^2x = 0$, $2(dx)^2 + 2xd^2x + 2(dy)^2 + 2yd^2y - dxdz - xd^2z - dzdx - zd^2x = 0$. Para $(0,0,0)$, se tiene: $dy = 0$, $dz = \pm\sqrt{ad^2x}$. Volviendo a diferenciar la última ecuación, se tiene: $d^2xdz = 0$. Luego de las dos últimas igualdades se tiene que $dz = 0$. Por tanto: $dx = dy = dz = 0$.

U 84- Calcular máximos y mínimos de $x = -\frac{1+t^2}{t(t-1)}$, $y = -\frac{1+t^2}{t-1}$.

Solución:



$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-t^2 + 2t + 1}{(t-1)^2} : \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2(t-1)^2} = t^2\frac{-t^2 + 2t + 1}{t^2 + 2t - 1} = 0$. De donde se tienen las soluciones: $t = 0$, $t = 1 \pm \sqrt{2}$. Para $t = 0$, $x \to \infty$. Para $t = 1 \pm \sqrt{2}$, se obtienen los puntos: $\left[-2, -2(1 \pm \sqrt{2})\right]$. Para $t = 1 + \sqrt{2}$, $y'' < 0$, luego: $\left[-2, -2(1 + \sqrt{2})\right]$ es máximo. Para $t = 1 - \sqrt{2}$, $y'' > 0$, luego: $\left[-2, -2(1 - \sqrt{2})\right]$ es mínimo.

U 85- Hallar la suma S de los segmentos tangente y subtangente en el punto (α, β) de la curva $e^{\frac{y}{a}} = x^2 - a^2$.

Solución: El segmento tangente está limitado por el punto de tangencia y el punto de corte de la tangente con el eje OX. El segmento subtangente corresponde a la proyección del segmento tangente sobre el eje OX. Siendo m la pendiente de la tangente en $(\alpha,\ \beta)$, su ecuación es: $y - \beta = m(x - \alpha)$, que corta a OX en $(\alpha - \frac{\beta}{m}, 0)$. El segmento tangente mide: $\frac{\beta}{m}\sqrt{1 + m^2}$ y el subtangente: $\frac{-\beta}{m}$. Su suma es: $S = \frac{\beta}{m}(\sqrt{1 + m^2} - 1)$. Derivando la función dada, $y' = m = \frac{2ax}{x^2 - a^2}$. Sustituyendo en S, se tiene: $S = \frac{a\beta}{\alpha}$.

U 86- Dada la función $u = z^3 + x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy + 4xz - 6yz - 3x + 3y - 6z + 1$, hallar los valores de x, y, z, que la extreman.

Solución: $u'_x = 2x - 3y + 4z - 3 = 0$, $u'_y = 6y - 3x - 6z + 3 = 0$, $u'_z = 3z^2 + 2z + 4x - 6y - 6 = 0$. Resolviendo el sistema, se tienen las siguientes soluciones: $(3,1,0)$ y $(-1,1,2)$. Hallando las derivadas segundas, se tiene: $u''_{x^2} = 2$, $u''_{y^2} = 6$, $u''_{z^2} = 6z + 2$, $u''_{xy} = -3$, $u''_{xz} = 4$, $u''_{yz} = -6$. Para $(3,\ 1,\ 0)$, el hessiano es: $H = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix}$, siendo: $\delta_1 = 2 > 0$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 3 > 0$,

$\delta_3 = H = -18 < 0$, luego es puerto. Para $(-1,\ 1,\ 2)$, el hessiano es: $H = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \\ 4 & -6 & 14 \end{vmatrix}$, siendo:

$\delta_1 = 2 > 0$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 3 > 0$, $\delta_3 = H = 18 > 0$, luego es mínimo.

U 87- Sabiendo que $y = f(x)$ verifica la ecuación diferencial $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x+y+1}}$ y que para $x = 0$, se tiene que $y = 1$, hallar los primeros términos de su desarrollo en serie.

Solución: $y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y'' = \dfrac{1+y'}{2(x+y+1)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{\sqrt{2}+1}{8}$,

$y''' = -\dfrac{2y''(x+y+1)^{\frac{3}{2}} - 3(1+y')^2(x+y+1)^{\frac{1}{2}}}{4(x+y+1)^3} = \dfrac{5\sqrt{2}+7}{32}$.

Por tanto: $y = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}+1}{16}x^2 + \dfrac{5\sqrt{2}+7}{192}x^3 + \ldots$

U 88- Hallar máximos y mínimos de z, siendo $f(x,y,z) = 2z^3 + 2(x+y)z + 2(x^2+y^2) - 1 = 0$.

Solución: $f'_x = 2z + 4x = 0$, $f'_y = 2z + 4y = 0$. Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones, se tiene el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$, para el que $z''_{x^2} = -1$, $z''_{y^2} = -1$, $z''_{xy} = 0$. Por tanto: $H = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, luego $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ es mínimo.

U 89- Dado el sistema $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{2x}{a} = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x}{a} = 0$, hallar las diferenciales primeras en el punto $(0,0,0)$.

Solución: Diferenciando el sistema, se tienen las siguientes ecuaciones: $\dfrac{2xdx}{a^2} + \dfrac{2ydy}{b^2} + \dfrac{2zdz}{c^2} - \dfrac{2dx}{a} = 0$, $\dfrac{2xdx}{a^2} + \dfrac{2ydy}{b^2} - \dfrac{dx}{a} = 0$. Resolviendo este sistema: $\dfrac{dx}{0} = \dfrac{dy}{b} = \dfrac{dz}{\pm c}$.

U 90- Dado el sistema $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, $x + y + z = 0$, hallar $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^2z}{dx^2}$.

Solución: Siendo: $f = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $g = x + y + z$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = -\frac{\begin{vmatrix} f'_x & f'_z \\ g'_x & g'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 3x^2-3yz & 3z^2-3xy \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3y^2-3xz & 3z^2-3xy \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z-x}{y-z},$$

$$\frac{dz}{dx} = z'_x = -\frac{\begin{vmatrix} f'_y & f'_x \\ g'_y & g'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 3y^2-3xz & 3x^2-3yz \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3y^2-3xz & 3z^2-3xy \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x-y}{y-z}.$$

A estos resultados se llega también derivando las dos ecuaciones respecto a x: $3x^2 + 3y^2y'_x + 3z^2z'_x - 3yz - 3xy'_xz - 3xyz'_z = 0$, $1 + y'_x + z'_x = 0$. Volviendo a derivar las dos ecuaciones: $6x + 6yy'^2_x + 3y^2y''_{x^2} + 6zz'^2_x + 3z^2z''_{x^2} - 6y'_xz - 6yz'_x - 6xy''_{x^2}z - 3xy'_xz'_x - 3xy'_xz'_x = 0$, $y''_{x^2} + z''_{x^2} = 0$. De donde se obtiene: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = y''_{x^2} = -2\dfrac{x + yy'^2_x + 2z'^2_x + zy'_x - yz'_x - xy'_xz'_x}{y^2 + xy - xz - z^2} =$

$= -2\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(y-z)^2(y^2+xy-xz-z^2)} = 0,\ \dfrac{d^2z}{dx^2} = z''_{x^2} = 0.$

U 91- Dados dos puntos luminosos $O_1,\ O_2$ de intensidades luminosas $I_1,\ I_2$ distantes entre sí a, hallar el punto P interior al segmento O_1O_2, en el que la suma S de las iluminaciones recibidas sea mínima. La iluminación recibida es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente luminosa.

Solución: Según el enunciado, se tiene: $S = \dfrac{kI_1}{d_1^2} + \dfrac{kI_2}{d_2^2}$, siendo: $d_1 + d_2 = a$. Por tanto: $S(d_1,d_2,\lambda) = \dfrac{kI_1}{d_1^2} + \dfrac{kI_2}{d_2^2} + \lambda(d_1+d_2-a)$. Luego: $S'_{d_1} = -\dfrac{2kI_1}{d_1^3} + \lambda = 0,\ S'_{d_2} = -\dfrac{2kI_2}{d_2^3} + \lambda = 0,$ $S'_\lambda = d_1 + d_2 - a = 0$. Resolviendo el sistema, se obtiene: $d_1 = \dfrac{aI_2^{\frac{1}{3}}}{I_1^{\frac{1}{3}} + I_2^{\frac{1}{3}}},\ d_2 = \dfrac{aI_1^{\frac{1}{3}}}{I_1^{\frac{1}{3}} + I_2^{\frac{1}{3}}}.$

U 92- Dadas las funciones $u = f(r),\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, hallar $u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2}$.

Solución: Derivando: $u'_x = f'_r r'_x = f'\dfrac{x}{r},\quad u''_{x^2} = f''\dfrac{x^2}{r^2} + f'\dfrac{r^2-x^2}{r^3},\quad u''_{y^2} = f''\dfrac{y^2}{r^2} + f'\dfrac{r^2-y^2}{r^3},$ $u''_{z^2} = f''\dfrac{z^2}{r^2} + f'\dfrac{r^2-z^2}{r^3},\ u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = f''\dfrac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + f'\dfrac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3} = f'' + \dfrac{2}{r}f'.$

U 93- Hallar las diferenciales totales enésimas d^nz_1 y d^nz_2, siendo $z_1 = \arctan\dfrac{y}{x}$, $z_2 = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, en función de $dS,\ \rho,\ \theta,\ \omega$, definidas por $dS = \sqrt{dx^2+dy^2},\ \rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\dfrac{dy}{dx},\ \omega = \arctan\dfrac{y}{x}$.

Solución $z = x+yi = \rho\cos\omega + i\rho\sin\omega = \rho e^{\omega i},\quad \ln z = \ln\rho + \omega i = z_2 + iz_1,\quad d(\ln z) = z^{-1}dz.$ Luego se tiene: $d^nz_1 + d^nz_2 = d^n(\ln z) = (-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n}dz^n = (-1)^{n-1}(n-1)!\rho^{-n}e^{-n\omega i}dz^ne^{n\theta i} =$ $= (-1)^{n-1}(n-1)!(\dfrac{dS}{\rho})^ne^{n(\theta-\omega)i}$. Por tanto, las diferenciales totales enésimas son las siguientes: $d^nz_2 = (-1)^{n-1}(n-1)!(\dfrac{dS}{\rho})^n\cos n(\theta-\omega),\ d^nz_1 = (-1)^{n-1}(n-1)!(\dfrac{dS}{\rho})^n\sin n(\theta-\omega).$

U 94- Dada la función $F = \dfrac{1}{x^2}(\dfrac{\delta z}{\delta x})^2 + \dfrac{1}{y^2}(\dfrac{\delta z}{\delta y})^2 - e^z = 0$, hacer el cambio $w = x^2+y^2$, $u = x^2-y^2,\ \ln(\dfrac{v}{2}) = z$, siendo w la nueva función.

Solución: $x = \sqrt{\dfrac{w+u}{2}},\quad x'_u = \dfrac{w'_u+1}{4x},\quad x'_v = \dfrac{w'_v}{4x},\quad y = \sqrt{\dfrac{w-u}{2}},\quad y'_u = \dfrac{w'_u-1}{4y},\quad y'_v = \dfrac{w'_v}{4y},$ $z = \ln(\dfrac{v}{2}),\quad z'u = 0,\quad z'_v = \dfrac{1}{v},\quad z'_u = z'_xx'_u + z'_yy'_u,\quad z'_v = z'_xx'_v + z'_yy'_v,\quad z'_x = \dfrac{[zy]}{[xy]},\quad z'_y = \dfrac{[xz]}{[xy]},$

$$[zy] = \begin{vmatrix} z'_u & y'_u \\ z'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{w'_u-1}{4y} \\ \dfrac{1}{v} & \dfrac{w'_v}{4y} \end{vmatrix} = -\frac{w'_u-1}{4yv},$$

$$[xz] = \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{w'_u+1}{4x} & 0 \\ \dfrac{w'_v}{4x} & \dfrac{1}{v} \end{vmatrix} = \frac{w'_u+1}{4xv},$$

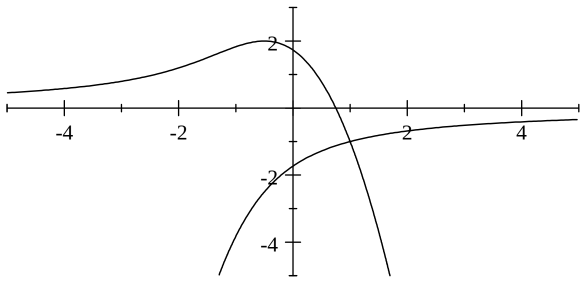
$$[xy] = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{w'_u+1}{4x} & \dfrac{w'_u-1}{4y} \\ \dfrac{w'_v}{4x} & \dfrac{w'_v}{4y} \end{vmatrix} = \frac{w'_v}{8xy},$$

$$z'_x = \frac{-\dfrac{w'_u-1}{4yv}}{\dfrac{w'_v}{8xy}} = \frac{-2x(w'_u-1)}{vw'_v},\ z'_y = \frac{\dfrac{w'_u+1}{4xv}}{\dfrac{w'_v}{8xy}} = \frac{2y(w'_u+1)}{vw'_v},$$

$$F = \frac{1}{x^2}\left(\frac{-2x(w'_u-1)}{vw'_v}\right)^2 + \frac{1}{y^2}\left(\frac{2y(w'_u+1)}{vw'_v}\right)^2 - \frac{v}{2} = \frac{8(w'^2_u+1)}{(vw'_v)^2} - \frac{v}{2} = 0,$$
La solución es: $16(w'^2_u+1) - v^3 w'_v{}^2 = 0$.

U 95- Hallar máximos y mínimos de $f(x,y) = y^2 + 2yx^2 + 4x - 3 = 0$.

Solución:



$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = 0$, $f'_x = 4yx + 4 = 0$, $y = -\frac{1}{x}$. Sustituido este valor en f y resolviendo la ecuación, se tienen las siguientes soluciones: $(-\frac{1}{2},2)$ y $(1,-1)$. Para el punto $(-\frac{1}{2},2)$, $y'' = -\frac{f''_{x^2}}{f'_y} = -\frac{4y}{2y+2x^2} < 0$, luego es un máximo. Para $(1,-1)$, $f'_y = 0$, luego es un punto singular cuyas tangentes vienen dadas por: $f''_{x^2} + 2f''_{xy}y' + f''_{y^2}y'^2 = 0$, es decir por: $y'^2 + 4xy + 2y = y'^2 + 4y' - 2 = 0$, luego: $y' = -2 \pm \sqrt{6}$.

U 96- Siendo $F = x^2\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + y^2\frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + z^2\frac{\delta^2 V}{\delta z^2} + yz\frac{\delta^2 V}{\delta yz} + xz\frac{\delta^2 V}{\delta xz} + xy\frac{\delta^2 V}{\delta xy} = 0$, hacer el cambio $x = \beta\gamma$, $y = \alpha\gamma$, $z = \alpha\beta$.

Solución: $\alpha = \sqrt{\frac{yz}{x}}$, $\alpha'_x = -\frac{\alpha}{2\beta\gamma}$, $\alpha'_y = \frac{1}{2\gamma}$, $\alpha'_z = \frac{1}{2\gamma}$; análogamente con β y γ y sus derivadas parciales. Luego: $V'_x = -\frac{\alpha}{2\beta\gamma}V'_\alpha + \frac{1}{2\gamma}V'_\beta + \frac{1}{2\beta}V'_\gamma$. De la misma forma se obtienen: V'_y y V'_z en función de α, β, γ. Volviendo a derivar y multiplicando por x^2, se tiene: $x^2V''_{x^2} = \frac{\alpha^2}{4}V''_{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{4}V''_{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{4}V''_{\gamma^2} - \frac{\alpha\beta}{2}V''_{\alpha\beta} - \frac{\alpha\gamma}{2}V''_{\alpha\gamma} + \frac{\beta\gamma}{2}V''_{\beta\gamma} + \frac{3\alpha}{4}V'_\alpha - \frac{\beta}{4}V''_\beta - \frac{\gamma}{4}V'_\gamma$. Igualmente se obtienen: $y^2V''_{y^2}$ y $z^2V''_{z^2}$, cuya suma es: $x^2V''_{x^2} + y^2V''_{y^2} + z^2V''_{z^2} =$
$= \frac{3\alpha^2}{4}V''_{\alpha^2} + \frac{3\beta^2}{4}V''_{\beta^2} + \frac{3\gamma^2}{4}V''_{\gamma^2} - \frac{\alpha\beta}{2}V''_{\alpha\beta} - \frac{\alpha\gamma}{2}V''_{\alpha\gamma} - \frac{\beta\gamma}{2}V''_{\beta\gamma} + \frac{\alpha}{4}V'_\alpha + \frac{\beta}{4}V''_\beta + \frac{\gamma}{4}V'_\gamma$.
Igualmente se obtiene: $xyV''_{xy} = -\frac{\alpha^2}{4}V''_{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4}V''_{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{4}V''_{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta}{2}V''_{\alpha\beta} - \frac{\alpha}{4}V'_\alpha - \frac{\beta}{4}V''_\beta + \frac{\gamma}{4}V'_\gamma$.
Análogamente se obtienen: $yzV''_{yz} + xzV''_{xz}$, cuya suma es: $xyV''_{xy} + yzV''_{yz} + xzV''_{xz} =$
$= -\frac{\alpha^2}{4}V''_{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4}V''_{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{4}V''_{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta}{2}V''_{\alpha\beta} + \frac{\alpha\gamma}{2}V''_{\alpha\gamma} + \frac{\beta\gamma}{2}V''_{\beta\gamma} - \frac{\alpha}{4}V'_\alpha - \frac{\beta}{4}V''_\beta - \frac{\gamma}{4}V'_\gamma$. Por tanto, sumando los valores calculados: $F = x^2V''_{x^2} + y^2V''_{y^2} + z^2V''_{z^2} + xyV''_{xy} + yzV''_{yz} + xzV''_{xz} =$
$= \frac{1}{2}\left(\alpha^2V''_{\alpha^2} + \beta^2V''_{\beta^2} + \gamma^2V''_{\gamma^2}\right) = 0$. Luego la solución es: $\alpha^2V''_{\alpha^2} + \beta^2V''_{\beta^2} + \gamma^2V''_{\gamma^2} = 0$.

U 97- La función $z(x,y)$ se define como función implícita eliminando θ y φ en el siguiente sistema de tres ecuaciones: $\omega = x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + z\cos\theta$, $\frac{d\omega}{d\theta} = x\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi - z\sin\theta$, $\frac{d\omega}{d\varphi} = -x\sin\theta\sin\varphi + y\sin\theta\cos\varphi$, en las que ω es función de θ y de φ. Hallar las derivadas parciales de z respecto a x, y, en función de θ y φ.

Solución: Se definen las tres funciones siguientes:
$f_1 = x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + z\cos\theta - \omega = 0$, $f_2 = x\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi - z\sin\theta - \frac{d\omega}{d\theta} = 0$
$f_3 = -x\sin\theta\sin\varphi + y\sin\theta\cos\varphi - \frac{d\omega}{d\varphi} = 0$. Se calculan los jacobianos: $\frac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(z,\theta,\varphi)}$, $\frac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(x,\theta,\varphi)}$ y

$\dfrac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(y,\theta,\varphi)}$, con lo que: $z'_x = -\dfrac{\dfrac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(x,\theta,\varphi)}}{\dfrac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(z,\theta,\varphi)}}$, $z'_y = -\dfrac{\dfrac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(y,\theta,\varphi)}}{\dfrac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(z,\theta,\varphi)}}$. Para ello se obtienen las derivadas parciales de dichas tres funciones. Para la función f_1, son: $\dfrac{\delta f_1}{\delta z} = \cos\theta$, $\dfrac{\delta f_1}{\delta x} = \sin\theta\cos\varphi$, $\dfrac{\delta f_1}{\delta y} = \sin\theta\sin\varphi$, $\dfrac{\delta f_1}{\delta\theta} = x\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi - z\sin\theta - \omega'_\theta = f_2 = 0$, $\dfrac{\delta f_1}{\delta\varphi} = -x\sin\theta\sin\varphi + y\sin\theta\cos\varphi - \omega'_\varphi = f_3 = 0$. Para la función f_2, son: $\dfrac{\delta f_2}{\delta z} = -\sin\theta$, $\dfrac{\delta f_2}{\delta x} = \cos\theta\cos\varphi$, $\dfrac{\delta f_2}{\delta y} = \cos\theta\sin\varphi$, $\dfrac{\delta f_2}{\delta\theta} = -x\sin\theta\cos\varphi - y\sin\theta\sin\varphi - z\cos\theta - \omega''_{\theta^2} = -f_1 - \omega - \omega''_{\theta^2} = -\omega - \omega''_{\theta^2}$, $\dfrac{\delta f_2}{\delta\varphi} = -x\cos\theta\sin\varphi + y\cos\theta\cos\varphi - \omega''_{\theta\varphi}$. Para la función f_3, son: $\dfrac{\delta f_3}{\delta z} = 0$, $\dfrac{\delta f_3}{\delta x} = -\sin\theta\sin\varphi$, $\dfrac{\delta f_3}{\delta y} = \sin\theta\cos\varphi$, $\dfrac{\delta f_3}{\delta\theta} = -x\cos\theta\sin\varphi + y\cos\theta\cos\varphi - \omega''_{\varphi\theta}$, $\dfrac{\delta f_3}{\delta\varphi} = -x\sin\theta\cos\varphi - y\sin\theta\sin\varphi - \omega''_{\varphi^2} = -f_1 + z\cos\theta - \omega - \omega''_{\varphi^2} = z\cos\theta - \omega - \omega''_{\varphi^2}$. Por tanto:

$$\frac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(x,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & 0 & 0 \\ \dfrac{\delta f_2}{\delta x} & \dfrac{\delta f_2}{\delta\theta} & \dfrac{\delta f_2}{\delta\varphi} \\ \dfrac{\delta f_3}{\delta x} & \dfrac{\delta f_3}{\delta\theta} & \dfrac{\delta f_3}{\delta\varphi} \end{vmatrix} = \sin\theta\cos\varphi \begin{vmatrix} \dfrac{\delta f_2}{\delta\theta} & \dfrac{\delta f_2}{\delta\varphi} \\ \dfrac{\delta f_3}{\delta\theta} & \dfrac{\delta f_3}{\delta\varphi} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(y,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & 0 & 0 \\ \dfrac{\delta f_2}{\delta y} & \dfrac{\delta f_2}{\delta\theta} & \dfrac{\delta f_2}{\delta\varphi} \\ \dfrac{\delta f_3}{\delta y} & \dfrac{\delta f_3}{\delta\theta} & \dfrac{\delta f_3}{\delta\varphi} \end{vmatrix} = \sin\theta\sin\varphi \begin{vmatrix} \dfrac{\delta f_2}{\delta\theta} & \dfrac{\delta f_2}{\delta\varphi} \\ \dfrac{\delta f_3}{\delta\theta} & \dfrac{\delta f_3}{\delta\varphi} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(z,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ \dfrac{\delta f_2}{\delta z} & \dfrac{\delta f_2}{\delta\theta} & \dfrac{\delta f_2}{\delta\varphi} \\ \dfrac{\delta f_3}{\delta z} & \dfrac{\delta f_3}{\delta\theta} & \dfrac{\delta f_3}{\delta\varphi} \end{vmatrix} = \cos\theta \begin{vmatrix} \dfrac{\delta f_2}{\delta\theta} & \dfrac{\delta f_2}{\delta\varphi} \\ \dfrac{\delta f_3}{\delta\theta} & \dfrac{\delta f_3}{\delta\varphi} \end{vmatrix}.$$ Las derivadas pedidas son:

$$z'_x = -\frac{\dfrac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(x,\theta,\varphi)}}{\dfrac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(z,\theta,\varphi)}} = \frac{-\sin\theta\cos\varphi}{\cos\theta} = -\tan\theta\cos\varphi,$$

$$z'_y = -\frac{\dfrac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(y,\theta,\varphi)}}{\dfrac{\delta(f_1,f_2,f_3)}{\delta(z,\theta,\varphi)}} = \frac{-\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta} = -\tan\theta\sin\varphi.$$

U 98- Dada la función $z = \dfrac{x^m y^n}{(m+n)(m+n-1)} + xf_1(\frac{x}{y}) + f_2(\frac{x}{y})$, eliminar las funciones f_1 y f_2.

Solución: Las diferenciales totales de $f_1(\frac{x}{y})$ y $f_2(\frac{x}{y})$ son nulas por ser f_1 y f_2 funciones homogéneas de grado cero. Por tanto: $dz = d\left[\dfrac{x^m y^n}{(m+n)(m+n-1)}\right] + d\left[xf_1(\frac{x}{y})\right] = d\left[\dfrac{x^m y^n}{(m+n)(m+n-1)}\right] + f_1(\frac{x}{y})$, $d^2z = d^2\left[\dfrac{x^m y^n}{(m+n)(m+n-1)}\right]$.

U 99- En la función $e^{\frac{\arcsin y}{m}} - e^{\frac{-\arg\sinh y}{m}} = 2x$, calcular las derivadas sucesivas de y para $x = 0$.

Solución: Como: $\sinh\theta = \dfrac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$, si se hace: $\theta = \dfrac{\arcsin y}{m}$, se tiene la igualdad:

$\sinh\left(\frac{\arcsin y}{m}\right) = \frac{e^{\frac{\arcsin y}{m}} - e^{-\frac{\arcsin y}{m}}}{2} = x$, es decir: $\frac{\arcsin y}{m} = \arg\sinh x$. Derivando esta ecuación, se tiene que: $\frac{y'}{\pm\sqrt{1-y^2}} = \frac{m}{\pm\sqrt{1+x^2}}$, es decir: $(1+x^2)y'^2 = m^2(1-y^2)$. Luego partiendo de la igualdad: $(1+x^2)y'^2 + m^2y^2 - m^2 = 0$, derivando sucesivamente, se tienen las siguientes expresiones: $(1+x^2)y'' + xy' + m^2y = 0$, $(1+x^2)y^{(3)} + 3xy'' + (m^2+1)y' = 0$, $(1+x^2)y^{(4)} + 5xy''' + (m^2+4)y'' = 0$, $(1+x^2)y^{(5)} + 7xy^{(4)} + (m^2+9)y^{(3)} = 0,\ldots$ Generalizando: $(1+x^2)y^{(n)} + (2n-3)xy^{(n-1)} + [m^2+(n-2)^2]y^{(n-2)} = 0$. Particularizando esta ecuación para $x = 0$, se tiene: $y^{(n)} + [m^2+(n-2)^2]y^{(n-2)} = 0$. Aplicando esta relación, y como $y(0) = 0$, todas las derivadas pares son nulas. Las derivadas impares, siendo $y' = \pm m$, vienen dadas por: $y^{(2n+1)} = \pm m(m^2+1)(m^2+9)\ldots[m^2+(2n-1)^2]$.

U 100- Determinar las derivadas parciales primeras y segundas de $z = x^2\arctan\frac{y}{x} - y^2\arctan\frac{x}{y}$. Calcularlas para $(0,0,0)$. Nota: ver teorema y ejemplo de Schwarz en Rey Pastor, Teoría de funciones, VII-41-2 (pág. 300). También en la misma obra, VII-37-2 y 3 (pág. 274), límites dobles, iterados y radiales.

Solución: Derivando: $z'_x = 2x\arctan\frac{y}{x} + x^2\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(\frac{-y}{x^2}) - y^2\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{y} = 2x\arctan\frac{y}{x} - y$, $z'_y = -2y\arctan\frac{x}{y} + x$, $z''_{x^2} = 2\arctan\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $z''_{y^2} = -2\arctan\frac{x}{y} + \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $z''_{xy} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Para $(0,0,0)$ se tiene: $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, $z''_{x^2} = 0$, $z''_{y^2} = 0$. Como $z''_{xy} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no es continua en $(0,0)$, se calculan directamente las derivadas, que son: $z''_{xy} = \lim\limits_{k\to 0}\frac{z'_x(0,k) - z'_x(0,0)}{k} = -1$; $z''_{yx} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{z'_y(h,0) - z'_y(0,0)}{h} = 1$.

U 101- Hallar máximos y mínimos de $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

Solución: Derivando: $z'_x = 3(x^2 - 3y) = 0$, $z'_y = 3(y^2 - 3x) = 0$. Las soluciones de estas ecuaciones son: $(0,0)$ y $(3,3)$. Siendo: $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{y^2} = 6y$, $z''_{xy} = -9$, el hessiano para $(0,0)$ es: $H = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix} < 0$, luego $(0,0,27)$ es puerto. Para $(3,3)$, $H = \begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} > 0$, y como z''_{x^2} y z''_{y^2} son > 0, $(3,3,0)$ es mínimo.

U 102- Hallar máximos y mínimos de $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Solución: $z'_x = 4(x^3 - x + y) = 0$, $z'_y = 4(y^3 + x - y) = 0$. Las soluciones de estas ecuaciones son: $(0,0)$ y $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$. Siendo: $z''_{x^2} = 12x^2 - 4$, $z''_{y^2} = 12y^2 - 4$, $z''_{xy} = 4$, el hessiano para $(0,0)$ es: $H = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$, luego para $(0,0,0)$ no hay máximo ni mínimo. Para $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$, $H = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} > 0$, y como z''_{x^2} y z''_{y^2} son > 0, los puntos $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}, -8)$ son mínimos.

U 103- Transformar la ecuación $xz'_x + hz'_y + z = 0$, tomando y como función de x y de z.

Solución: Siendo y función de x y de z, se tiene: $dy = pdx + qdz$. Luego: $dz = \frac{dy}{q} - \frac{pdx}{q}$, es decir: $z'_x = -\frac{p}{q}$, $z'_y = \frac{1}{q}$. Por tanto: $x(-\frac{p}{q}) + \frac{h}{q} + z = 0$, $qz - px + h = 0$, o bien: $zy'_z - xy'_x + h = 0$.

U 104- En la ecuación $F(x,\ y,\ z,\ z'_x,\ z'_y,\ z''_{x^2},\ z''_{y^2},\ z''_{xy}) = 0$, aplicar la transformación de Legendre $w = px + qy - z$, en la que p, q son las nuevas variables y w la nueva función.

Solución: $dw = xdp + +ydq + pdx + qdy - dz$, $dz = pdx + qdy$ (es decir: $z'_x = p$, $z'_y = q$), $dw = xdp + ydq$, $w'_p = x$, $w'_q = y$, $z = pw'_p + qw'_q - w$. Haciendo: $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, (es decir: $r = p'_x = z''_{x^2}$, $s = p'_y = q'_x = z''_{xy}$, $t = q'_y = z''_{y2}$). Resolviendo el sistema, se tiene: $dx = \frac{t}{rt-s^2}dp - \frac{s}{rt-s^2}dq$, $dy = \frac{-s}{rt-s^2}dp + \frac{r}{rt-s^2}dq$. Luego: $x'_p = \frac{t}{rt-s^2}$, $x'_q = y'_p = \frac{-s}{rt-s^2}$, $y'_q = \frac{r}{rt-s^2}$. Por tanto: $x'_p = w''_{p^2} = \frac{t}{rt-s^2}$, $x'_q = w''_{pq} = y'_p = \frac{-s}{rt-s^2}$, $y'_q = w''_{q^2} = \frac{r}{rt-s^2}$. Operando, se tiene: $w''_{p^2} \cdot w''_{q^2} - (w''_{pq})^2 = \frac{1}{rt-s^2}$. Luego: $\frac{t}{w''_{p^2}} = \frac{-s}{w''_{pq}} = \frac{r}{w''_{q^2}} = rt - s^2 = \frac{1}{w''_{p^2} \cdot w''_{q^2} - (w''_{pq})^2}$. De donde se obtiene: $r = z''_{x^2} = \frac{w''_{q^2}}{w''_{p^2} \cdot w''_{q^2} - (w''_{pq})^2}$, $s = z''_{xy} = \frac{-w''_{pq}}{w''_{p^2} \cdot w''_{q^2} - (w''_{pq})^2}$, $t = z''_{y^2} = \frac{w''_{p^2}}{w''_{p^2} \cdot w''_{q^2} - (w''_{pq})^2}$.
Resumiendo: $x = w'_p$, $y = w'_q$, $z = pw'_p + qw'_q - w$, $z'_x = p$, $z'_y = q$, $z''_{x^2} = \frac{w''_{q^2}}{w''_{p^2} \cdot w''_{q^2} - (w''_{pq})^2}$, $z''_{xy} = \frac{-w''_{pq}}{w''_{p^2} \cdot w''_{q^2} - (w''_{pq})^2}$, $z''_{y^2} = \frac{w''_{p^2}}{w''_{p^2} \cdot w''_{q^2} - (w''_{pq})^2}$.

U 105- Por un punto O, se trazan tres rectas no contenidas en un plano, conociéndose los ángulos que forman entre sí. A partir de O, se toman sobre cada recta un punto cuyas distancias a O, son respectivamente, x, y, z. Calcular el valor de estas variables para que el tetraedro formado tenga volumen máximo, siendo constante e igual a $3k^2$, la suma de las áreas de las caras que concurren en O.

Solución: Siendo α, β, γ los ángulos conocidos,.la suma de las áreas de las tres caras concurrentes es: $\frac{1}{2}xy\sin\alpha + \frac{1}{2}xz\sin\beta + \frac{1}{2}yz\sin\gamma = 3k^2$. El volumen del tetraedro es proporcional a xyz, luego: $V = xyzk$. El máximo del volumen corresponde al máximo del producto xyz, cumpliéndose la condición: $xy\sin\alpha + xz\sin\beta + yz\sin\gamma - 6k^2 = 0$. Haciendo: $F = xyz + \lambda(xy\sin\alpha + xz\sin\beta + yz\sin\gamma - 6k^2) = 0$, se tiene: $F'_x = yz + \lambda(y\sin\alpha + z\sin\beta) = 0$, $F'_y = xz + \lambda(x\sin\alpha + z\sin\gamma) = 0$, $F'_z = xy + \lambda(x\sin\beta + y\sin\gamma) = 0$. Resolviendo el sistema formado por estas tres ecuaciones más la de la condición, se tiene: $\frac{z}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin\beta} = \frac{x}{\sin\gamma} = \rho$. Luego se obtiene que: $3\rho^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 6k^2$. es decir: $\rho = \sqrt{\frac{2k^2}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}$. Por tanto: $x = \sqrt{\frac{2k^2\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}}$, $y = \sqrt{\frac{2k^2\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}}$, $z = \sqrt{\frac{2k^2\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\beta}}$.

U 106- Un espejo rectangular $OABC$ de lados $OA = a$, $OB = b$, ha sufrido una rotura en el contorno del vértice O, según una curva cuya ecuación es $y = x(x-\alpha) + \beta(1 - \frac{x}{\alpha})$, siendo $\alpha < a$ y $\beta < b$. Se quiere tallar el espejo roto de manera que $O'A'B'C$ tenga superficie máxima. Hallar las nuevas dimensiones.

Solución: Las coordenadas de O' son: $\left[x, x(x-\alpha) + \beta(1 - \frac{x}{\alpha})\right]$. La superficie del rectángulo $O'A'B'C$ viene dada por la ecuación: $S = (a - x)\left[b - x(x-\alpha) - \beta(1 - \frac{x}{\alpha})\right]$. Operando, se tiene: $S = x^3 - (a + \alpha + \frac{\beta}{\alpha})x^2 + (a\alpha + \frac{a\beta}{\alpha} - b + \beta)x + ab - a\beta$. Derivando e igualando a cero: $S' = 3x^2 - 2(a + \alpha + \frac{\beta}{\alpha})x + a\alpha + \frac{a\beta}{\alpha} - b + \beta = 0$. Las raíces de esta ecuación son: $x = \frac{a + \alpha + \frac{\beta}{\alpha} \pm \sqrt{\left(a + \alpha + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 3\left(a\alpha + \frac{a\beta}{\alpha} - b + \beta\right)}}{3}$. De las dos soluciones, la que tiene el signo negativo corresponde a la superficie máxima. Es decir:

$$O'A' = a - \frac{a + \alpha + \frac{\beta}{\alpha} - \sqrt{\left(a + \alpha + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 3\left(a\alpha + \frac{a\beta}{\alpha} - b + \beta\right)}}{3},$$

$O'B' = b - x(x-\alpha) - \beta(1 - \frac{x}{\alpha}) = b - M \cdot N - P$, siendo:

$$M = \frac{1}{3}\left[a + \alpha + \frac{\beta}{\alpha} - \sqrt{\left(a + \alpha + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 3\left(a\alpha + \frac{a\beta}{\alpha} - b + \beta\right)}\ \right],$$
$$N = \frac{1}{3}\left[a - 2\alpha + \frac{\beta}{\alpha} - \sqrt{\left(a + \alpha + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 3\left(a\alpha + \frac{a\beta}{\alpha} - b + \beta\right)}\ \right],$$
$$P = \frac{\beta}{3\alpha}\left[-a + 2\alpha - \frac{\beta}{\alpha} + \sqrt{\left(a + \alpha + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 3\left(a\alpha + \frac{a\beta}{\alpha} - b + \beta\right)}\ \right].$$

U 107- . Calcular los máximos y mínimos de la función $V = \dfrac{xyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+b)}$.

Solución: Derivando se tiene: $V'_x = V\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{2x+y+a}{(a+x)(x+y)}\right] = V\dfrac{ay-x^2}{x(a+x)(x+y)} = 0$, $V'_y = V\dfrac{-y^2+zx}{y(y+z)(x+y)} = 0$, $V'_z = V\dfrac{-z^2+by}{z(y+z)(z+b)} = 0$. Resolviendo el sistema formado por: $ay - x^2 = 0$, $-y^2 + zx = 0$, $-z^2 + by = 0$, (abandonando la solución trivial $V = 0$), se tiene: $x = \pm(a^3b)^{\frac{1}{4}}$, $y = \pm(a^2b^2)^{\frac{1}{4}}$, $z = \pm(ab^3)^{\frac{1}{4}}$. Para los tres valores positivos de x, y, z, se tiene: $V = \dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)^4}$. Las segundas derivadas de la función V, son:
$V''_{x^2} = \dfrac{-2V}{(a+x)(x+y)} = \dfrac{-2}{a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6}$, $V''_{xy} = \dfrac{1}{ab^{\frac{2}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6}$, $V''_{xz} = 0$,
$V''_{y^2} = \dfrac{-2}{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6}$, $V''_{yz} = \dfrac{1}{a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{4}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6}$, $V''_{z^2} = \dfrac{-2}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6}$.

Por tanto el hessiano es:

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{-2}{a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6} & \dfrac{1}{ab^{\frac{2}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6} & 0 \\ \dfrac{1}{ab^{\frac{2}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6} & \dfrac{-2}{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6} & \dfrac{1}{a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{4}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6} \\ 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{4}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6} & \dfrac{-2}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6} \end{vmatrix} =$$

$= \dfrac{-4}{a^{\frac{9}{4}}b^{\frac{9}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^{18}}$. El menor H_1 es:

$$H_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{-2}{a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6} & \dfrac{1}{ab^{\frac{2}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6} \\ \dfrac{1}{ab^{\frac{2}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6} & \dfrac{-2}{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6} \end{vmatrix} = \frac{3}{a^{\frac{8}{4}}b^{\frac{4}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^{12}}.$$

El elemento A (a_{11} del hessiano) es: $A = \dfrac{-2}{a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^6}$. Luego siendo a, b positivos, los signos son: $H < 0$, $H_1 > 0$, $A < 0$, por lo que se trata de un máximo, siendo el signo de la forma definido negativo. Teniendo en cuenta los valores negativos que pueden tomar a, b, x, y, z, se tiene el siguiente cuadro:

a	b	x	y	z	V	H	H_1	A	Signo de la forma	Extremo
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\frac{1}{(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})^4}$	<0	>0	<0	Definido negativo	Máximo
$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$\frac{1}{(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})^4}$	<0	>0	<0	Definido negativo	Máximo
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\frac{-1}{(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})^4}$	>0	>0	>0	Definido positivo	Mínimo
$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$\frac{-1}{(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})^4}$	>0	>0	>0	Definido positivo	Mínimo

U 108- La ecuación $z = F(x,\ y)$ define a x como función implícita de $y,\ z$. Expresar las derivadas parciales de 1º y 2º orden de la función implícita $x = f(y,z)$ en función de las derivadas parciales $p,\ q,\ r,\ s,\ t$ de z respecto a $x,\ y$.

Solución: Se tiene la diferencial primera: $dz = pdx + qdy$, de donde: $dx = -\frac{q}{p}dy + \frac{1}{p}dz$, obteniéndose las derivadas parciales primeras: $x'_y = f'_y = -\frac{q}{p}$, $x'_z = f'_z = \frac{1}{p}$. La diferencial segunda es: $d^2z = r(dx)^2 + 2sdxdy + t(dy)^2 + pd^2x + qd^2y$, de donde operando, se obtiene: $r(dx)^2 + 2sdxdy + t(dy)^2 + pd^2x = 0$. Es decir, despejando la diferencial segunda de x, se tiene: $d^2x = -\frac{r}{p}(dx)^2 - \frac{2s}{p}dxdy - \frac{t}{p}(dy)^2 =$
$= -\frac{r}{p}\left(-\frac{q}{p}dy + \frac{1}{p}dz\right)^2 - \frac{2s}{p}\left(-\frac{q}{p}dy + \frac{1}{p}dz\right)dy - \frac{t}{p}(dy)^2 =$
$= \left(-\frac{rq^2}{p^3} + \frac{2sq}{p^2} - \frac{t}{p}\right)(dy)^2 + \left(\frac{2rq}{p^3} - \frac{2s}{p^2}\right)dydz - \frac{r}{p^3}(dz)^2$. Las derivadas parciales segundas son: $x''_{y^2} = f''_{y^2} = -\frac{rq^2}{p^3} + \frac{2sq}{p^2} - \frac{t}{p}$, $x''_{yz} = f''_{yz} = \frac{2rq}{p^3} - \frac{2s}{p^2}$, $x''_{z^2} = f''_{z^2} = -\frac{r}{p^3}$.

U 109- Entre todos los triángulos de perímetro dado $2p$, encontrar el que engendra un volumen máximo al girar alrededor de uno de sus lados.

Solución: Sea a el lado sobre el que gira, y h la altura trazada sobre dicho lado desde el vértice opuesto. Por el teorema de Pappus-Guldin, el volumen engendrado al girar una figura plana sobre un eje coplanario que no corta a la figura, es: $V = S2\pi g$, siendo S la superficie de la figura, y g la distancia al eje, del centro de gravedad de la figura: $S = \frac{1}{2}ah$, $g = \frac{h}{3}$, puesto que el centro de gravedad del triángulo se encuentra a $\frac{1}{3}$ de la mediana de a, es decir a una distancia $\frac{h}{3}$ de a. La altura sobre el lado a, es: $h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, siendo $b,\ c$ los otros lados del triángulo, por lo que: $a + b + c = 2p$. Luego: $V = \frac{\pi}{3}ah^2 = \frac{4\pi}{3a}p(p-a)(p-b)(p-c)$. Se trata de calcular el máximo de V, con la condición de que se cumpla: $a + b + c = 2p$. Por tanto: $V = \frac{4\pi}{3a}p(p-a)(p-b)(p-c) + \lambda(a + b + c - 2p) = 0$. Derivando e igualando a cero se tienen las cuatro ecuaciones: $V'_a = -\frac{4}{3}\pi\frac{p^2}{a^2}(p-b)(p-c) + \lambda = 0$, $V'_b = -\frac{4}{3}\pi\frac{p}{a}(p-a)(p-c) + \lambda = 0$, $V'_c = -\frac{4}{3}\pi\frac{p}{a}(p-a)(p-b) + \lambda = 0$, $V'_\lambda = a + b + c - 2p = 0$, cuya solución es: $a = \frac{p}{2}$, $b = c = \frac{3p}{4}$. Luego el triángulo ha de ser isósceles y el lado sobre el que gira ha de valer $\frac{p}{2}$.

U 110- Transformar en coordenadas polares la laplaciana $L = z''_{x^2} + z''_{y^2}$.

Solución: Siendo: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, las derivadas son: $\rho'_x = \frac{x}{\rho}$, $\rho'_y = \frac{y}{\rho}$, $\rho''_{x^2} = \frac{y^2}{\rho^3}$, $\rho''_{y^2} = \frac{x^2}{\rho^3}$, $\rho''_{xy} = \frac{-xy}{\rho^3}$, $\theta'_x = -\frac{y}{\rho^2}$, $\theta'_y = \frac{x}{\rho^2}$, $\theta''_{x^2} = \frac{2xy}{\rho^4}$, $\theta''_{y^2} = \frac{-2xy}{\rho^4}$, $\theta''_{xy} = \frac{y^2 - x^2}{\rho^4}$. Siendo la laplaciana: $L = z''_{x^2} + z''_{y^2} = r + t$, se obtienen los valores de r y de t: $r = R(\rho'_x)^2 + 2S\rho'_x\theta'_x + T(\theta'_x)^2 + P\rho''_{x^2} + Q\theta''_{x^2} = (\frac{x}{\rho})^2R - 2\frac{xy}{\rho^3}S + (\frac{y}{\rho^2})^2T + \frac{y^2}{\rho^3}P + \frac{2xy}{\rho^4}Q;$

$t = (\frac{y}{\rho})^2 R + 2\frac{xy}{\rho^3}S + (\frac{x}{\rho^2})^2 T + \frac{x^2}{\rho^3}P - \frac{2xy}{\rho^4}Q.$ Sustituyendo estos valores en la expresión de la laplaciana, se tiene: $L = R + \frac{1}{\rho^2}T + \frac{1}{\rho}P = z''_{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}z''_{\theta^2} + \frac{1}{\rho}z'_{\rho}.$

U 111- Estando θ definida por la ecuación $f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h),$ hallar los tres primeros términos del desarrollo de θ según potencias de h.

Solución: Derivando la ecuación dada respecto a la variable $h,$ se tiene:
$f'(a+h) = f'(a+\theta h) + hf''(a+\theta h)(\theta' h + \theta).$ Volviendo a derivar:
$f''(a+h) = 2f''(a+\theta h)(\theta' h+\theta) + hf'''(a+\theta h)(\theta' h+\theta)^2 + hf''(a+\theta h)(\theta'' h + 2\theta').$
Para $h = 0,$ se tiene: $f''(a) = f''(a)\cdot\theta(0),$ luego: $\theta(0) = \frac{1}{2}.$ Volviendo a derivar:
$f'''(a+h) = 3f'''(a+\theta h)(\theta' h+\theta)^2 + 3f''(a+\theta h)(\theta'' h+2\theta') + hf^{(4}(a+\theta h)(\theta' h+\theta)^3 +$
$+3hf'''(a+\theta h)(\theta' h+\theta)(\theta'' h+2\theta') + hf''(a+\theta h)(\theta''' h+3\theta'').$
Para $h = 0,$ se tiene: $\theta'(0) = \frac{f'''(a)}{24f''(a)}.$ Volviendo a derivar, y para $h = 0,$ se tiene:
$\theta''(0) = \frac{1}{24}\left(\frac{f^{(4}(a)}{f''(a)} - \left(\frac{f'''(a)}{f''(a)}\right)^2\right).$
Por tanto: $\theta = \frac{1}{2} + \frac{f'''(a)}{24f''(a)}h + \frac{1}{48}\left(\frac{f^{(4}(a)}{f''(a)} - \left(\frac{f'''(a)}{f''(a)}\right)^2\right)h^2 + \ldots$

U 112- Aplicar las expresiones $V_1 = (z'_x)^2 + (z'_y)^2,$ $V_2 = z''_{x^2} + z''_{y^2}$ al cambio de variables dado por las fórmulas de transformación $u = ax+by,$ $v = cx+dy,$ en las que $a,$ $b,$ $c,$ d son tales que se verifica la relación: $x^2+y^2 = u^2+v^2.$

Solución: Como: $u^2+v^2 = (ax+by)^2 + (cx+dy)^2 = x^2(a^2+c^2) + y^2(b^2+d^2) + 2xy(ab+cd),$ $a^2+c^2 = 1,$ $b^2+d^2 = 1,$ $ab+cd = 0.$ De donde: $a = \cos\theta,$ $c = \sin\theta,$ $b = -\sin\theta,$ $d = \cos\theta.$ Por tanto: $u = x\cos\theta - y\sin\theta,$ $v = x\sin\theta + y\cos\theta.$ Derivando: $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u\cos\theta + z'_v\sin\theta,$ $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = -z'_u\sin\theta + z'_v\cos\theta.$ Luego: $V_1 = (z'_u\cos\theta + z'_v\sin\theta)^2 + (-z'_u\sin\theta + z'_v\cos\theta)^2 =$ $= (z'_u)^2 + (z'_v)^2.$ Volviendo a derivar se tiene: $z''_{x^2} = z''_{u^2}\cos^2\theta + z''_{v^2}\sin^2\theta + 2z''_{uv}\sin\theta\cos\theta,$ $z''_{y^2} = z''_{u^2}\sin^2\theta + z''_{v^2}\cos^2\theta - 2z''_{uv}\sin\theta\cos\theta.$ Luego: $V_2 = z''_{x^2} + z''_{y^2} = z''_{u^2} + z''_{v^2}.$

U 113- Demostrar que no verifican el teorema de Schwarz las derivadas segundas de la función $f(x,y)$ definida por: $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$ para x e y no nulas, y por $f(0,0) = 0,$ para $x = y = 0.$ Enunciar dicho teorema.

Solución: Teorema de Schwarz: Si una función $f(x,y)$ está definida en un cierto entorno del punto $(x_0,y_0),$ y existen en dicho entorno las derivadas f'_x y $f''_{xy},$ y ésta es continua en $(x_0,y_0),$ y además existe f'_y para aquellos valores del entorno en que y posee el valor $y_0,$ puede afirmarse que en (x_0,y_0) existe también f''_{yx} y que es igual a $f''_{xy}.$ Con relación a la función dada, derivando se tiene:
$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0,$ $f'_x(x,y) = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2},$ $f'_x(0,y) = -y,$ $f''_{xy} = -1,$
$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = 0,$ $f'_y(x,y) = x\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2},$ $f'_y(x,0) = x,$ $f''_{yx} = +1.$
No se verifica el citado teorema en la función dada, pues: $f''_{xy} \neq f''_{yx}.$

U 114- Dada la función $V = \frac{1}{\cos x}w'_x + (1+2y)w'_y,$ efectuar el cambio: $\sin^2 x + y = u + t,$ $\cos^2 x + y = u - t.$

Solución: $y = \frac{2u-1}{2},$ $1+2y = 2u,$ $y'_u = 1,$ $y'_t = 0,$ $x = \arccos\sqrt{\frac{1-2t}{2}},$ $\cos x = \sqrt{\frac{1-2t}{2}},$ $x'_t = \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}},$ $x'_u = 0,$ $u = \frac{2y+1}{2},$ $u'_x = 0,$ $u'_y = 1,$ $t = \frac{1}{2} - \cos^2 x,$ $t'_x = \sqrt{1-t^2},$ $t'_y = 0,$ $w'_t = w'_x\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}},$ $w'_u = w'_y.$ Luego: $V = \sqrt{2(1+2t)}\,w'_t + 2uw'_u.$

U 115- Transformar la ecuación $y'y''' - 3(y'')^2 = 0,$ tomando y como variable independiente.

Solución: $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{dx}{dy} = x' = \frac{1}{y'}$. Se obtienen las sucesivas derivadas: $y' = \frac{1}{x'}$, $y'' = (\frac{1}{x'})' = -\frac{x''}{(x')^3}$, $y''' = (-\frac{x''}{(x')^2})' = \frac{-x'''x' + 3(x'')^2}{(x')^5}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación dada, se tiene: $\frac{1}{x'}\frac{-x'''x' + 3(x'')^2}{(x')^5} - 3(-\frac{x''}{(x')^3})^2 = \frac{x'''}{(x')^5} = 0$. De donde: $x''' = 0$.

U 116- Transformar la ecuación $(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0$, aplicando el cambio $x = \cos\theta$.

Solución: Derivando en $\theta = \arccos x$, se tiene: $\theta'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sin\theta}$, $\theta''_{x^2} = \frac{-\cos\theta}{\sin^3\theta}$. Luego: $y'_x = y'_\theta\frac{-1}{\sin\theta}$, $y''_{x^2} = \frac{y''_{\theta^2}}{\sin^2\theta}\frac{y'\cos\theta}{\sin^3\theta}$. Sustituyendo en la ecuación dada, se tiene: $y'' + a^2y = 0$.

U 117- Dado el sistema

$$\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +\ldots & +x_n & = y_1 \\ & x_2 & +x_3 & +\ldots & +x_n & = y_1\, y_2 \\ & & x_3 & +\ldots & +x_n & = y_1\, y_2\, y_3 \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & x_n & = y_1\, y_2 \ldots y_n \end{array}$$

, calcular el jacobiano de las x respecto de las y.

Solución: Restando cada dos ecuaciones consecutivas, se tiene: $x_1 = y_1(1-y_2)$, $x_2 = y_1y_2(1-y_3)$, $x_{n-1} = y_1\ldots y_{n-1}(1-y_n)$, $x_n = y_1\ldots y_n$. Derivando $x_1, x_2,\ldots, x_n$, respecto de $y_1, y_2,\ldots, y_n$, se tiene: $(x_1)'_{y_1} = 1-y_2$, $(x_1)'_{y_2} = -y_1,\ldots$, $(x_{n-1})'_{y_1} = y_2\ldots y_{n-1}$, $(x_n)'_{y_1} = y_2\ldots y_n,\ldots$, $(x_n)'_{y_n} = y_1\ldots y_{n-1}$. Por tanto, el jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} 1-y_2 & -y_1 & 0 & \ldots & 0 \\ y_2(1-y_3) & y_1(1-y_3) & -y_1\, y_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_2\, y_3\ldots(1-y_n) & y_1\, y_3\ldots(1-y_n) & y_1\, y_2\, y_4\ldots(1-y_n) & \ldots & -y_1\, y_2\ldots y_{n-1} \\ y_2\, y_3\ldots y_n & y_1\, y_3\ldots y_n & y_1\, y_2\, y_4\ldots y_n & \ldots & y_1\, y_2\ldots y_{n-1} \end{vmatrix}$$

Multiplicando la primera columna por y_1, la segunda por $y_2,\ldots$, la última por y_n , se tiene:

$$J = \frac{1}{y_1\, y_2\ldots y_n}\begin{vmatrix} y_1(1-y_2) & -y_1\, y_2 & 0 & \ldots & 0 \\ y_1\, y_2(1-y_3) & y_1\, y_2(1-y_3) & -y_1\, y_2\, y_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1\, y_2\, y_3\ldots(1-y_n) & y_1\, y_2\, y_3\ldots(1-y_n) & y_1\, y_2\, y_3\, y_4\ldots(1-y_n) & \ldots & -y_1\, y_2\ldots y_{n-1}\, y_n \\ y_1\, y_2\, y_3\ldots y_n & y_1\, y_2\, y_3\ldots y_n & y_1\, y_2\, y_3\, y_4\ldots y_n & \ldots & y_1\, y_2\ldots y_{n-1}\, y_n \end{vmatrix}$$

Restando entre sí cada dos columnas contiguas (la 1ª menos la 2ª,..., la $n-1$ menos la n), se tiene:

$$J = \frac{1}{y_1\, y_2\ldots y_n}\begin{vmatrix} y_1 & -y_1\, y_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & y_1\, y_2 & -y_1\, y_2\, y_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -y_1\, y_2\ldots y_{n-1}\, y_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & y_1\, y_2\ldots y_{n-1}\, y_n \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{y_1\, y_2\ldots y_n}y_1y_1y_2\ldots y_1y_2\ldots y_{n-1}y_n = y_1^{n-1}y_2^{n-2}\ldots y_{n-2}^2y_{n-1}.$$

U 118- Sabiendo que $f(x,y)$, $f(y,z)$, $f(z,x)$ son tres funciones ligadas por una cierta relación funcional, se pide el valor totalmente simplificado de la primera derivada de $f(x,x)$ respecto a x.

Solución: El jacobiano de las tres funciones dadas respecto a las tres variables x, y, z, ha de ser nulo al estar aquéllas ligadas por una relación funcional. Por tanto, se tiene que:

$$J = \begin{vmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) & f'_z(x,y)=0 \\ f'_x(y,z)=0 & f'_y(y,z) & f'_z(y,z) \\ f'_x(z,x) & f'_y(z,x)=0 & f'_z(z,x) \end{vmatrix} = f'_x(x,y)f'_y(y,z)f'_z(z,x)+f'_y(x,y)f'_z(y,z)f'_x(z,x) = 0.$$

Para obtener $f(x,x)$, se aplican en la ecuación anterior las igualdades: $x=y=z$, es decir: $f'_x(x,y)f'_y(y,z)f'_z(z,x)+f'_y(x,y)f'_z(y,z)f'_x(z,x) = 2[f'_x(x,x)]^3 = 0$. Luego: $f'(x,x)=0$.

U 119- Probar si es diferenciable la función $z = y\sin\frac{1}{x}$, para $x \neq 0$, y $z=0$ para $x=0$.

Solución: Para $y\sin\frac{1}{x}=0$, o bien $y=0$, o bien $\sin\frac{1}{x}=0$. Para $y=0$, $\sin\frac{1}{x}=\lambda$, $\frac{1}{x}=\arcsin\lambda$, $x=\frac{1}{\arcsin\lambda}=\theta$; por tanto se tiene el conjunto de valores: $x=\theta$, $y=0$, $z=0$; luego z es diferenciable para cualquier valor. Para $\sin\frac{1}{x}=0$, $y=\mu$, $z=0$, se tiene: $\frac{1}{x}=k\pi$, $x=\frac{1}{k\pi}$. Por tanto es diferenciable para cualquier valor de x del tipo $\frac{1}{k\pi}$. En $x=0$, no es diferenciable.

U 120- Probar si es diferenciable la función $z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, para $x^2+y^2\neq 0$, y $z=0$ para $x=y=0$.

Solución: Para $xy=0$, o bien $x=0$, o bien $y=0$, correspondiendo a los ejes YY' y XX' respectivamente; por tanto son continuas, pero no tienen tangente, por lo que no es derivable, ni por tanto diferenciable. Para $x=y=z=0$, es un punto, no tiene tangente, no es derivable ni diferenciable.

U 121- Hallar en el interior de un triángulo un punto tal que la suma de sus distancias a los tres vértices, sea mínima.

Solución: Sean A,B,C los tres vértices, y sea P el punto buscado, de forma que $PA+PB+PC$ sea mínimo. Si se deja PC constante, el mínimo será para $PA+PB$. Para este valor mínimo, P está sobre una elipse que corta a la circunferencia de centro C y radio PC, en dos puntos. Entre estos dos puntos está el mínimo pedido. Aplicando el teorema de Rolle del valor medio, el punto buscado corresponderá al de tangencia entre la elipse y la circunferencia. Al ser tangentes en P, PC es la bisectriz del ángulo $\widehat{APB}$. De la misma forma, PB es la bisectriz del ángulo $\widehat{APC}$, y PA la del ángulo $\widehat{BPC}$. Por tanto, P es el punto de intersección de los arcos capaces de 120º levantados sobre AB, BC, CA.

U 122- Hallar máximos y mínimos de la función $w=xy^2z^3(a-x-y-z)$.

Solución: Derivando la función w respecto a las tres variables, se tienen las tres siguientes derivadas parciales: $w'_x=y^2z^3(a-x-y-z)-xy^2z^3=0$, $w'_y=2xyz^3(a-x-y-z)-xy^2z^3=0$, $w'_z=3xy^2z^2(a-x-y-z)-xy^2z^3=0$. Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se tienen las siguientes seis soluciones:

Solución	x	y	z	w
A	α	0	γ	0
B	α	β	0	0
C	0	0	γ	0
D	0	β	0	0
E	0	β	$a-\beta$	0
F	$\frac{a}{7}$	$\frac{2a}{7}$	$\frac{3a}{7}$	$\frac{108a^6}{7^7}$

Las derivadas segundas de la función w son: $w''_{x^2}=-2y^2z^3$, $w''_{y^2}=xz^3(2a-2x-6y-2z)$, $w''_{z^2}=xy^2z(6a-6x-6y-12z)$, $w''_{xy}=yz^3(2a-4x-3y-2z)$, $w''_{xz}=y^2z^2(3a-6x-3y-4z)$, $w''_{yz}=xyz^2(6a-6x-9y-8z)$. Estas derivadas segundas toman los siguientes valores para las soluciones A a F :

Solución	w''_{x^2}	w''_{y^2}	w''_{z^2}	w''_{xy}	w''_{xz}	w''_{yz}
A	0	$2\alpha\gamma^3(a-\alpha-\gamma)$	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0
E	$-2\beta^2(a-\beta)^3$	0	0	$\beta(a-\beta)^3(-2a+\beta)$	$\beta^2(a-\beta)^2(-a+\beta)$	0
F	$\frac{-216a^5}{7^5}$	$\frac{-162a^5}{7^5}$	$\frac{-144a^5}{7^5}$	$\frac{-108a^5}{7^5}$	$\frac{-108a^5}{7^5}$	$\frac{-108a^5}{7^5}$

Se obtiene para cada solución los valores de $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3$ (= Hessiano), definidos según el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c|ccc|}
\delta_1 & w''_{x^2} & w''_{xy} & w''_{xz} \\
\delta_2 & w''_{xy} & w''_{y^2} & w''_{yz} \\
\delta_3 & w''_{xz} & w''_{yz} & w''_{z^2}
\end{array}$$

Solución	δ_1	δ_2	δ_3
A,B,C,D	0	0	0
E	$-2\beta^2(a-\beta)^3$	$-\beta^2(a-\beta)^6(\beta-2a)^2$	0
F	$-\frac{216a^5}{7^5}$	$-\frac{23.328a^{10}}{7^{10}}$	$-\frac{1.469.664a^{15}}{7^{15}}$

De donde se deduce que la función w para las soluciones $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ y para F con $a=0,$ no está definida en signo, es decir que no le corresponde ni máximo ni mínimo. Para la solución F y $a<0,$ se obtiene que: $\delta_1>0,\ \delta_2<0,\ \delta_3>0,$ por lo que w es definida negativa en el punto $\left(\frac{-|a|}{7},\frac{-2|a|}{7},\frac{-3|a|}{7}\right)$, alcanzando el valor: $w=\frac{108a^6}{7^7}$, correspondiendo a un máximo. Para la solución F y $a>0,$ se obtiene que: $\delta_1<0,\ \delta_2<0,\ \delta_3<0,$ por lo que w es indefinida en signo, tratándose de un puerto.

U 123- Transformar $W=(x^3z'''_{x^3}+3x^2z''_{x^2}+xz'_x)^2-(y^3z'''_{y^3}+3y^2z''_{y^2}+yz'_y)^2$, mediante el siguiente cambio: $x=e^{u+v},\ y=e^{u-v}$.

Solución: $u=\frac{1}{2}(\ln x+\ln y)$, $u'_x=\frac{1}{2x}$, $u'_y=\frac{1}{2y}$, $v=\frac{1}{2}(\ln x-\ln y)$, $v'_x=\frac{1}{2x}$, $v'_y=\frac{-1}{2y}$,

$z'_x=z'_u\frac{1}{2x}+z'_v\frac{1}{2x}=\frac{1}{2x}(z'_u+z'_v)$, $z''_{x^2}=-\frac{1}{2x^2}(z'_u+z'_v)+\frac{1}{4x^2}(z'_u+z'_v)^{(2}$,

$z'''_{x^3}=\frac{1}{8x^3}(z'_u+z'_v)^{(3}-\frac{3}{4x^3}(z'_u+z'_v)^{(2}+\frac{1}{x^3}(z'_u+z'_v)$.

Análogamente: $z'_y=\frac{1}{2y}(z'_u-z'_v)$, $z''_{y^2}=-\frac{1}{2y^2}(z'_u-z'_v)+\frac{1}{4y^2}(z'_u-z'_v)^{(2)}$,

$z'''_{y^3}=\frac{1}{8y^3}(z'_u-z'_v)^{(3)}-\frac{3}{4y^3}(z'_u-z'_v)^{(2)}+\frac{1}{y^3}(z'_u-z'_v)$.

Por tanto: $x^3z'''_{x^3}+3x^2z''_{x^2}+xz'_x=x^3\left[\frac{1}{8x^3}(z'_u+z'_v)^{(3)}-\frac{3}{4x^3}(z'_u+z'_v)^{(2)}+\frac{1}{x^3}(z'_u+z'_v)\right]+$

$+3x^2\left[-\frac{1}{2x^2}(z'_u+z'_v)+\frac{1}{4x^2}(z'_u+z'_v)^{(2)}\right]+x\frac{1}{2x}(z'_u+z'_v)=\frac{1}{8}(z'_u+z'_v)^{(3)}$.

De la misma forma: $y^3z'''_{y^3}+3y^2z''_{y^2}+yz'_y=\frac{1}{8}(z'_u-z'_v)^{(3)}$.

Luego: $W=\left[\frac{1}{8}(z'_u+z'_v)^{(3}\right]^2-\left[\frac{1}{8}(z'_u-z'_v)^{(3}\right]^2=$

$=\frac{1}{64}[(z'_u+z'_v)^{(3)}+(z'_u-z'_v)^{(3}][(z'_u+z'_v)^{(3)}-(z'_u-z'_v)^{(3)}]=$

$=\frac{1}{64}(z'''_{u^3}+3z'''_{u^2v}+3z'''_{uv^2}+z'''_{v^3}+z'''_{u^3}-3z'''_{u^2v}+3z'''_{uv^2}-z'''_{v^3})\ \bullet$

$\bullet(z'''_{u^3}+3z'''_{u^2v}+3z'''_{uv^2}+z'''_{v^3}-z'''_{u^3}+3z'''_{u^2v}-3z'''_{uv^2}+z'''_{v^3})=\frac{1}{16}(z'''_{u^3}+3z'''_{uv^2})(3z'''_{u^2v}+z'''_{v^3})$.

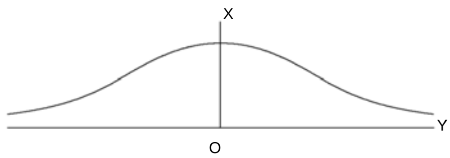
U 124- Sean x,y,z las coordenadas cartesianas ortogonales de un punto dado; sean X,Y,Z las de su inverso en una inversión en el espacio cuyo polo es el origen de coordenadas, siendo su potencia la unidad. Hallar el jacobiano de la transformación.

Solución: De acuerdo con la potencia de la inversión definida, se tiene: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=1$. Como en la inversión los puntos homólogos están alineados, se tiene: $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}=k$. Operando: $k=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, $X=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $Y=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}$, $Z=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$. Las respectivas derivadas son: $X'_x=\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $X'_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $X'_z=\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $Y'_x=\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $Y'_y=\frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $Y'_z=\frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $Z'_x=\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $Z'_y=\frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $Z'_z=\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$. Luego el jacobiano es:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\\ \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\end{vmatrix}=\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

U 125- Hallar los puntos de inflexión y las pendientes de sus tangentes, de la curva $x^3+xy^2-a^3=0$.

Solución:



$$y'=\frac{-f'_x}{f'_y}=\frac{-3x^2-y^2}{2xy},$$

$$y''=\frac{\begin{vmatrix}f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x\\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f'_y\\ f'_x & f'_y & 0\end{vmatrix}}{(f'_y)^3}=\frac{\begin{vmatrix}6x & 2y & 3x^2+y^2\\ 2y & 2x & 2xy\\ 3x^2+y^2 & 2xy & 0\end{vmatrix}}{(2xy)^3}=\frac{3x^4+2x^2y^2-y^4}{8x^2y^3}=0,$$ Resolviendo el sistema formado por $3x^4+2x^2y^2-y^4=0$ y la ecuación dada, se tiene: $x=\frac{a}{\sqrt[3]{4}}$, $y=\pm\frac{\sqrt{3}\,a}{\sqrt[3]{4}}$. Para estos dos puntos de inflexión, las pendientes de las tangentes son: $y'=\pm\sqrt{3}$.

Nota: En la gráfica se ha girado 90º la figura.

U 126- Suponiendo una transformación cualquiera de coordenadas definida por las ecuaciones: $x=X(u,v,w)$, $y=Y(u,v,w)$, $z=Z(u,v,w)$, existiendo las derivadas parciales, que son continuas, y que el jacobiano de x,y,z respecto a u,v,w, es distinto de cero, calcular $(ds)^2$ en las nuevas coordenadas. Aplicar el resultado obtenido, al caso en que las superficies coordenadas formen un sistema triple ortogonal.

Solución: $z'_u=z'_xx'_u+z'_yy'_u$, $z'_v=z'_xx'_v+z'_yy'_v$. Luego: $z'_x=\frac{\begin{vmatrix}z'_u & y'_u\\ z'_v & y'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}}$, $z'_y=\frac{\begin{vmatrix}x'_u & z'_u\\ x'_v & z'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}}$.

Abreviadamente, $z'_x=\frac{[z,y]}{[x,y]}$, $z'_y=\frac{[x,z]}{[x,y]}$.

Por tanto: $(ds)^2 = 1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 1 + \frac{\left[z,\ y\right]^2}{\left[x,\ y\right]^2} + \frac{\left[x,\ z\right]^2}{\left[x,\ y\right]^2} = \frac{\left[x,\ y\right]^2 + \left[x,\ z\right]^2 + \left[z,\ y\right]^2}{\left[x,\ y\right]^2}$.

En el sistema triple ortogonal se verifica que: $\left[x,\ y\right]^2 + \left[x,\ z\right]^2 + \left[z,\ y\right]^2 = 1$. Luego en este caso: $(ds)^2 = \frac{1}{\left[x,\ y\right]^2} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2$.

U 127- Hallar la ecuación entre derivadas parciales de todas las superficies de la forma $F[(x+y+z),(x^2+y^2+z^2)] = 0$, siendo F el símbolo de una función arbitraria.

Solución: Se tiene que: $x^2+y^2+z^2 = f(x+y+z)$. Derivando: $2x + 2zz'_x = (1+z'_x)f'$, $2y + 2zz'_y = (1+z'_y)f'$. Luego eliminando f', se tiene:

$\frac{x+z\,z'_x}{y+z\,z'_y} = \frac{1+z'_x}{1+z'_y}$, $z'_x(z-y) + z'_y(x-z) = y-x$. O bien: $J = \begin{vmatrix} x+z\,z'_x & y+z\,z'_y \\ 1+z'_x & 1+z'_y \end{vmatrix} = 0$.

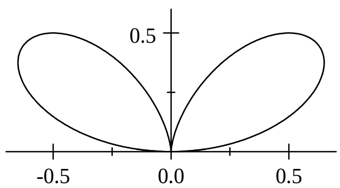
U 128- Siendo $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$, pasar a polares la expresión w''_{z^2} (es decir, $\frac{\delta^2 w}{\delta z^2}$).

Solución: $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$, $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$, $\theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$. Derivando: $\rho'_z = \frac{z}{\rho} = \cos\theta$, $\rho''_{z^2} = \frac{\sin^2\theta}{\rho}$, $\theta'_z = \frac{-\sin\theta}{\rho}$, $\theta''_{z^2} = \frac{\sin 2\theta}{\rho^2}$, $\varphi'_z = 0$. Desarrollando, la derivada primera de w respecto a z es: $w'_z = w'_\rho\rho'_z + w'_\theta\theta'_z + w'_\varphi\varphi'_z = w'_\rho\rho'_z + w'_\theta\theta'_z$, y la derivada segunda pedida es: $w''_{z^2} = w''_{\rho^2}(\rho'_z)^2 + w''_{\rho\theta}\rho'_z\theta'_z + w'_\rho\rho''_{z^2} + w''_{\theta^2}(\theta'_z)^2 + w''_{\theta\rho}\rho'_z\theta'_z + w'_\theta\theta''_{z^2} =$

$= w''_{\rho^2}\cos^2\theta + w''_{\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{\rho^2} - w''_{\rho\theta}\frac{\sin 2\theta}{\rho} + w'_\rho\frac{\sin^2\theta}{\rho} + w'_\theta\frac{\sin 2\theta}{\rho^2}$.

U 129- Hallar máximos y mínimos de la función implícita y, definida por la ecuación $(x^2+y^2)^2 - 2x^2y = 0$.

Solución:



Derivando: $f'_x = 4x(x^2+y^2) - 4xy = 0$, de donde: $x = 0$, $x^2+y^2 = 2y$. Sustituyendo estos valores en la ecuación dada, se tienen los puntos: (0.0), $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Como $f'_y = 4y(x^2+y^2) - 2x^2$, particularizando para $(0,0)$, $f'_y = 0$, luego es un punto singular. Volviendo a derivar: $y'' = \frac{-6x^2-2y^2+2y}{2y^3+2x^2y-x^2}$, particularizando para $\left(\frac{\pm 1}{2},\frac{1}{2}\right)$, se tiene: $y'' = -4 < 0$, luego ambos puntos son máximos.

U 130- Dada la función $y = f(x,u^2,v)$, siendo $u = \ln x$, $v = \sin x$, hallar y' e y''.

Solución: Para facilitar la presentación, se hace: $u^2 = w = (\ln x)^2$, con lo que: $w' = \frac{2\ln x}{x}$, $w'' = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$; además: $v' = \cos x$, $v'' = -\sin x$. Con ello: $y = f(x,w,v)$. Por tanto: $y' = f'_x + f'_w w' + f'_v v' = f'_x + \frac{2\ln x}{x}f'_w + \cos x f'_v$.

$y'' = f''_{x^2} + f''_{xw}w' + f''_{xv}v' + (f''_{wx} + f''_{w^2}w' + f''_{wv}v')w' + f'_w w'' + (f''_{vx} + f''_{vw}w' + f''_{v^2}v')v' + f'_v v'' =$

$= f''_{x^2} + f''_{xw}\frac{2\ln x}{x} + f''_{xv}\cos x + (f''_{wx} + f''_{w^2}\frac{2\ln x}{x} + f''_{wv}\cos x)\frac{2\ln x}{x} + f'_w\frac{2(1-\ln x)}{x^2} +$

$+(f''_{vx} + f''_{vw}\frac{2\ln x}{x} + f''_{v^2}\cos x)\cos x - f'_v\sin x =$

$$= f''_{x^2} + \frac{4(\ln x)^2}{x^2} f''_{w^2} + \cos^2 x f''_{v^2} + \frac{4\ln x}{x} f''_{xw} + 2\cos x f''_{xv} + \frac{4\cos x \ln x}{x} f''_{wv} + \frac{2(1-\ln x)}{x^2} f'_w - \sin x f'_v.$$

Problemas de Cálculo Integral

SECCIÓN V - INTEGRALES

V 1- Calcular la integral $I = \int (\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x^5})\, dx.$

Solución: $I = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - 3\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2x^4} + C.$

V 2- Calcular la integral $I = \int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$

Solución: $I = a^2 x - \frac{9}{5}\sqrt[3]{a^4 x^5} + \frac{9}{7}\sqrt[3]{a^2 x^7} - \frac{1}{3}x^3 + C.$

V 3- Calcular la integral $I = \int (a^2 - y^2)^3 \sqrt{y}\; dy.$

Solución: $I = \frac{2}{5}a^6\sqrt{y^3} - \frac{6}{7}a^4\sqrt{y^7} + \frac{6}{11}a^2\sqrt{y^{11}} - \frac{2}{15}\sqrt{y^{15}} + C.$

V 4- Calcular la integral $I = \int (\sqrt{a} - \sqrt{t}\,)^3\, dt.$

Solución: $I = \sqrt{a^3}\, t - 2a\sqrt{t^3} + \frac{3}{2}\sqrt{a}\, t^2 - \frac{2}{5}\sqrt{t^5} + C.$

V 5- Calcular la integral $I = \int \frac{c}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx.$

Solución: $I = \frac{3}{2}c\sqrt[3]{x^2} + C.$

V 6- Calcular la integral $I = \int n^{\frac{1-n}{n}} x^{\frac{1-n}{n}}\, dx.$

Solución: $I = \sqrt[n]{nx} + C.$

V 7- Calcular la integral $I = \int y^{-m-1}\, dy.$

Solución: $I = \frac{-1}{my^m} + C.$

V 8- Calcular la integral $I = \int \frac{2a}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx - \int bx^{-2}\, dx + \int 3cx^{\frac{2}{3}}\, dx.$

Solución: $I = 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9}{5}c\sqrt[3]{x^5} + C.$

V 9- Calcular la integral $I = \int (1 + e^x)^{\frac{1}{2}} e^x\, dx.$

Solución: $I = \frac{2}{3}(1 + e^x)^{\frac{3}{2}} + C.$

V 10- Calcular la integral $I = \int \frac{\sin \ln(1 - x)}{1 - x}\, dx.$

Solución: $I = \cos \ln(1 - x) + C.$

V 11- Calcular la integral $I = \int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x}}\, dx.$

Solución: $I = 2(1+e^x)^{\frac{1}{2}} + C.$

V 12- Calcular la integral $I = \int \sin^2 x \cos x \, dx.$

Solución: $I = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

V 13- Calcular la integral $I = \int \frac{a^x - b^x}{a^x b^x}\, dx.$

Solución: $I = \frac{a^{-x}}{\ln a} - \frac{b^{-x}}{\ln b} + C.$

V 14- Encontrar la ley recurrente que cumplen las integrales $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ en función de I_{n-1}. Aplicando la ley, hallar I_2, I_3.

Solución: $I_n = \int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^n}\, dt = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} - \int \frac{t^2\, dt}{(t^2+1)^n} = I_{n-1} - \int \frac{t^2\, dt}{(t^2+1)^n} =$

$= I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} - \int \frac{dt}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} = I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$

Luego la ley recurrente es: $I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}$. Como: $I_1 = \arctan t + C$, $I_2 = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C$, $I_3 = \frac{3}{8}\arctan t + \frac{3t}{8(t^2+1)} + \frac{t}{4(t^2+1)^2} + C.$

V 15- Calcular la integral $I = \int (a^2 + b^2 x)^{\frac{1}{2}}\, dx.$

Solución: $I = \frac{2}{3b^2}(a^2+b^2x)^{\frac{3}{2}} + C.$

V 16- Calcular la integral $I = \int x(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx.$

Solución: $I = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$

V 17- Calcular la integral $I = \int (ax + 2bx^2)(3ax^2 + 4bx^3)^{\frac{4}{3}}\, dx.$

Solución: $I = \frac{1}{14}(3ax^2+4bx^3)^{\frac{7}{3}} + C.$

V 18- Calcular la integral $I = \int (x^2-2)^3 x^3 dx.$

Solución: $I = \frac{x^{10}}{10} - \frac{3x^8}{4} + 2x^6 - 2x^4 + C.$

V 19- Calcular la integral $I = \int \frac{2x+1}{2x+3}\, dx.$

Solución: $I = \int dx - \int \frac{2dx}{2x+3} = x - \ln(2x+3) + C.$

V 20- Calcular la integral $I = \int \frac{p^2+1}{p-1}\, dp.$

Solución: $I = \int p\, dp + \int dp + 2\int \frac{dp}{p-1} = \frac{p^2}{2} + p + 2\ln(p-1) + C.$

V 21- Calcular la integral $I = \int \frac{e^s-1}{e^s+1}\, ds.$

Solución: $I = -\int ds + 2\int \frac{e^s}{1+e^s}\, ds = -s + 2\ln(1+e^s) + C.$

V 22- Calcular la integral $I = \int \frac{x^2-1}{(x+2)^3}\, dx.$

Solución: $I = 3\int \frac{dx}{(x+2)^3} - 4\int \frac{dx}{(x+2)^2} + \int \frac{dx}{x+2} = \frac{-3}{2(x+2)^2} + \frac{4}{x+2} + \ln(x+2) + C.$

V 23- Calcular la integral $I = \int \frac{x^3}{x+1}\, dx.$

Solución: $I = \int x^2\, dx - \int x\, dx + \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) + C.$

V 24- Calcular la integral $I = \int \frac{2x+1}{2x^2+3}\, dx.$

Solución: $I = \int \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + \frac{3}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \frac{3}{2}) + \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \sqrt{\frac{2}{3}}\, x + C.$

V 25- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}.$

Solución: Haciendo el cambio: $\sqrt{x^2-9} = x - t,\ x = \frac{t^2+9}{2t},\ dx = \frac{t^2-9}{2t^2}\, dt,$ y sustituyendo estos valores, se tiene que: $I = \int \frac{-dt}{t} = -\ln t = -\ln\left(x - \sqrt{x^2-9}\right) + C.$

V 26- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}.$

Solución: Las raíces de $4x^2+3x-2=0$, son: $-\frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{41}}{8}$. Luego: $(x+\frac{3}{8})^2 - \frac{41}{64} = 0.$ Haciendo el cambio: $t = \frac{8}{\sqrt{41}}(x+\frac{3}{8})$, se tiene: $dt = \frac{8}{\sqrt{41}}dx$. Por tanto, sustituyendo: $I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{64} - (x+\frac{3}{8})^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + C = \frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{8}{\sqrt{41}}\left(x+\frac{3}{8}\right)\right] + C.$

V 27- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{9x^2-4}.$

Solución: $I = \frac{1}{2}\ln \frac{x - \frac{2}{3}}{x + \frac{2}{3}} + C$

V 28- Calcular la integral $I = \int \frac{ax}{x^4+e^4}\, dx.$

Solución: Haciendo el cambio: $x^2 = y$, se tiene que: $2x\, dx = dy$. Sustituyendo estos valores en la integral dada, se obtiene: $I = \int \frac{\frac{a}{2}}{y^2+e^4}\, dy = \frac{a}{2e^2}\arctan\frac{y}{e^2} + C = \frac{a}{2e^2}\arctan\frac{x^2}{e^2} + C.$

V 29- Calcular la integral $I = \int \frac{\cos t}{a^2+\sin^2 t}\, dt.$

Solución: Haciendo el cambio: $x = \sin t$, se tiene que: $dx = \cos t\, dt$, Sustituyendo estos valores en la integral dada, se obtiene: $I = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{\sin t}{a} + C.$

V 30- Calcular la integral $I = \int \frac{c}{a^2-b^2y^2}\, dy.$

Solución: $I = \frac{c}{2a^2}\ln \frac{\frac{a}{b}+y}{\frac{a}{b}-y} + C.$

V 31- Calcular la integral $I = \int x^3 e^{2x}\, dx.$

Solución: $I = \frac{1}{2}e^{2x}x^3 - \frac{3}{2}\int e^{2x}x^2\, dx = \frac{1}{2}e^{2x}x^3 - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \int e^{2x}x\, dx\right] =$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}x^3 - \frac{3}{4}e^{2x}x^2 + \frac{3}{2}\int e^{2x}x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}x^3 - \frac{3}{4}e^{2x}x^2 + \frac{3}{4}e^{2x}x + \int e^{2x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right) + C.$$

V 32- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

Solución: Haciendo el cambio: $y = \ln x$, se tiene que: $\frac{dx}{x} = dy$. Sustituyendo estos valores en la integral dada, se obtiene: $I = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y + C = \arcsin \ln x + C$.

V 33- Calcular la integral $I = \int \frac{dy}{y^2+3y+1}$.

Solución: Como las raíces de $y^2+3y+1=0$ son: $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, se tiene que la integral es:
$$I = \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{y+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}dy + \int \frac{\frac{-\sqrt{5}}{5}}{y+\frac{3+\sqrt{5}}{2}}dy = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\ln\left(y+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - \ln\left(y+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right] + C =$$
$$= \ln\left(\frac{y+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{y+\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{5}}} + C.$$

V 34- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Solución: $I = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$.

V 35- Calcular la integral $I = \int \frac{(x-1)}{(x^3+6x^2+5x)^2}\,dx$.

Solución: Las raíces de $x^3+6x^2+5x=0$, son: 0, –1, –5. Por tanto la integral dada es:
$$I = \int \frac{(x-1)\,dx}{x^2(x+1)^2(x+5)^2} = -\frac{1}{25}\int x^{-2}dx + \frac{17}{125}\int x^{-1}dx - \frac{1}{8}\int (x+1)^{-2}dx - \frac{1}{8}\int (x+1)^{-1}dx -$$
$$-\frac{3}{200}\int (x+5)^{-2}dx - \frac{11}{1000}\int (x+5)^{-1}dx =$$
$$= \frac{1}{25}x^{-1} + \frac{17}{125}\ln x + \frac{1}{8}(x+1)^{-1} - \frac{1}{8}\ln(x+1) + \frac{3}{200}(x+5)^{-1} - \frac{11}{1000}\ln(x+5) + C.$$

V 36- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{4x^2+9}$.

Solución: $I = \frac{1}{6}\arctan\frac{2x}{3} + C$.

V 37- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$.

Solución: $I = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4} + C$.

V 38- Calcular la integral $I = \int \frac{5x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

Solución: Haciendo el cambio: $x^2 = y$, se tiene: $2x\ dx = dy$. Sustituyendo estos valores en la integral dada, se obtiene: $I = \frac{5}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{5}{2}\arcsin y + C = \frac{5}{2}\arcsin x^2 + C$.

V 39- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$.

Solución: $I = \frac{1}{3} \arccos \frac{3}{2x} + C.$

V 40- Hallar las seis fórmulas de reducción de $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$, siendo m, n enteros.

Solución:

Valor de m	Valor de n	Fórmula
< 0	> 0	$I_{m,n} = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,n-2}$
> 0	< 0	$I_{m,n} = \frac{-1}{n+1} \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n+2}$
< 0	cualquiera	$I_{m,n} = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x \cos^{n+1} x + \frac{m+n+2}{m+1} I_{m+2,n}$
> 0	cualquiera	$I_{m,n} = \frac{-1}{m+n} \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$
cualquiera	> 0	$I_{m,n} = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$
cualquiera	< 0	$I_{m,n} = \frac{-1}{n+1} \sin^{m+1} x \cos^{n+1} x + \frac{m+n+2}{n+1} I_{m,n+2}$

V 41- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{\sin^6 x \cos^2 x}$.

Solución: Haciendo el cambio: $\tan x = y$, se tiene: $dx = \frac{dy}{1+y^2}$. Sustituyendo estos valores en la integral, se tiene: $I = \int \frac{(y^2+1)^7}{y^6} dy = \int \frac{y^{14} + 7y^{12} + 21y^{10} + 35y^8 + 35y^6 + 21y^4 + 7y^2 + 1}{y^6} dy =$
$= \frac{1}{9} \tan^9 x + \tan^7 x + \frac{21}{5} \tan^5 x + \frac{35}{3} \tan^3 x + 35 \tan x - 21 \tan^{-1} x - \frac{7}{3} \tan^{-3} x - \frac{1}{5} \tan^{-5} x + C.$

V 42- Calcular la integral $I = \int x\, e^{2x} \cos 3x \, dx.$

Solución: Como: $\cos 3x = \frac{1}{2}(e^{3ix} + e^{-3ix})$, se tiene que: $I = \frac{1}{2} \int (xe^{(2+3i)x} + xe^{(2-3i)x}) dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[xe^{2x}\left(\frac{e^{3ix}}{2+3i} + \frac{e^{-3ix}}{2-3i} \right) - e^{2x}\left(\frac{e^{3ix}}{(2+3i)^2} + \frac{e^{-3ix}}{(2-3i)^2} \right) \right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[xe^{2x}\left(\frac{\cos 3x + i \sin 3x}{2+3i} + \frac{\cos 3x - i \sin 3x}{2-3i} \right) - e^{2x}\left(\frac{\cos 3x + i \sin 3x}{(2+3i)^2} + \frac{\cos 3x - i \sin 3x}{(2-3i)^2} \right) \right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[xe^{2x}\left(\frac{4\cos 3x + 6 \sin 3x}{13} \right) - e^{2x}\left(\frac{-10 \cos 3x + 24 \sin 3x}{169} \right) \right] =$$
$$= xe^{2x}\left(\frac{2\cos 3x + 3 \sin 3x}{13} \right) - e^{2x}\left(\frac{-5 \cos 3x + 12 \sin 3x}{169} \right) + C.$$

V 43- Calcular la integral $I = \int x^3 (a + x^2)^{\frac{1}{3}} dx.$

Solución: Haciendo el cambio: $a + x^2 = y$, $x = \sqrt{y-a}$, $dx = \frac{1}{2}(y-a)^{\frac{-1}{2}} dy$, se tiene que: $I = \frac{1}{2} \int (y-a) y^{\frac{1}{3}} dy = \frac{3}{14} y^{\frac{7}{3}} - \frac{3a}{4} y^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{2}(a+x^2)^{\frac{4}{3}} (\frac{a}{2} + x^2) + C.$

V 44- Dada $Y = \int x^m (ax^n + b)^p dx$, transformarla en $I_{p,q} = \int (1-t)^p t^q dt$. Hallar las seis fórmulas de reducción de esta última integral.

Solución: Haciendo el cambio: $x^m = -\frac{b}{a} t$, $x = (-\frac{b}{a} t)^{\frac{1}{m}}$, $dx = (-\frac{b}{a})^{\frac{1}{m}} \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$, se tiene que: $Y = \frac{1}{n} (-\frac{b}{a})^{\frac{m+1}{n}} b^p \int t^{\frac{m+1}{n}-1} (1-t)^p dt$. En el cuadro se recogen las fórmulas de reducción:

Valor de q	Valor de p	Fórmula
< 0	> 0	$I_{q,p} = \frac{p}{q+1} I_{q+1,p-1} + \frac{1}{q+1} t^{q+1}(1-t)^{p}$
> 0	< 0	$I_{q,p} = \frac{q}{p+1} I_{q-1,p+1} - \frac{1}{p+1} t^{q}(1-t)^{p+1}$
< 0	cualquiera	$I_{q,p} = \frac{p+q+2}{q+1} I_{q+1,p} + \frac{1}{q+1} t^{q+1}(1-t)^{p+1}$
> 0	cualquiera	$I_{q,p} = \frac{q}{p+q+1} I_{q-1,p} - \frac{1}{p+q+1} t^{q}(1-t)^{p+1}$
cualquiera	> 0	$I_{q,p} = \frac{p}{q+p+1} I_{q,p-1} + \frac{1}{q+p+1} t^{q+1}(1-t)^{p-2}$
cualquiera	< 0	$I_{q,p} = \frac{q+p+2}{p+1} I_{q,p+1} - \frac{1}{p+1} t^{q+1}(1-t)^{p-1}$

V 45- Calcular la integral $I = \int x \arctan \frac{x^2+9}{9}\, dx$.

Solución: Haciendo el cambio: $u = \frac{x^2+9}{9}$, $x^2 = 9u - 9$, $x\, dx = \frac{9}{2}\, du$, $I = \frac{9}{2} \int \arctan u\, du =$ $= \frac{9}{2}\left[u \arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2)\right] + C = \frac{9}{2}\left[\frac{x^2+9}{9} \arctan \frac{x^2+9}{9} - \frac{1}{2} \ln\left(1 + (\frac{x^2+9}{9})^2\right)\right] + C.$

V 46- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$.

Solución: Haciendo el cambio: $\tan \frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2\, dt}{1+t^2}$, se tiene: $I = \int \frac{2}{2t+2}\, dt = \ln(t+1) + C = \ln\left(\tan \frac{x}{2} + 1\right) + C.$

V 47- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}}$.

Solución: Haciendo el cambio: $1 - x^{-1} = t$, $x = (1-t)^{-1}$, $dx = (1-t)^{-2} dt$, y sustituyendo estos valores, se tiene: $I = \int t^{\frac{-2}{3}}\, dt = 3t^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{1 - x^{-1}} + C.$

V 48- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{a + b\cos x}$ en forma real, considerando los tres casos $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Solución: Haciendo el cambio: $\tan \frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2\, dt}{1+t^2}$, se tiene que: $I = 2\int \frac{dt}{t^2(a-b) + (a+b)}$. Considerando las siguientes integrales: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$, $\int \frac{dx}{1-x^2} = \arg\tanh x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, se obtienen las siguientes soluciones:

$a > b$	$a + b > 0$	$I = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2}\right) + C$
$a > b$	$a + b < 0$	$I = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arg\tanh\left(\sqrt{\frac{b-a}{a+b}} \tan \frac{x}{2}\right) + C$
$a < b$	$a + b > 0$	$I = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arg\tanh\left(\sqrt{\frac{b-a}{a+b}} \tan \frac{x}{2}\right) + C$
$a < b$	$a + b < 0$	$I = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2}\right) + C$
$a = b$		$I = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{2} + C$

V 49- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + b^2x^n}}$.

Solución: Haciendo el cambio: $\sqrt{a^2 + b^2x^n} = bx^{\frac{n}{2}} + t$, $x^{\frac{n}{2}} = \frac{a^2 - t^2}{2bt}$, $\frac{dx}{x} = 2\frac{t^2 + a^2}{nt(t^2 - a^2)}\,dt$, se tiene que: $I = \frac{4}{n}\int \frac{dt}{(t+a)(t-a)} = \frac{2}{na}\ln\frac{t-a}{t+a} + C = \frac{2}{na}\ln\frac{\sqrt{a^2 + b^2x^n} - bx^{\frac{n}{2}} - a}{\sqrt{a^2 + b^2x^n} - bx^{\frac{n}{2}} + a} + C.$

V 50- Calcular la integral $I = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(2x^4 + 1)^2}}$.

Solución: Haciendo el cambio: $t = 2x^4 + 1$, $x = \left(\frac{t-1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}(t-1)^{-1}dt$, se tiene que: $I = \frac{1}{4}\int (t-1)^{-1}t^{\frac{-2}{3}}\,dt$. Y haciendo el nuevo cambio: $t^{\frac{1}{3}} = z$, $dt = 3z^2dz$, se obtiene: $I = \frac{3}{4}\int \frac{dz}{z^3 - 1} = \frac{3}{4}\left[\int \frac{dz}{3(z-1)} - \int \frac{z+2}{3(z^2 + z + 1)}\,dz\right] =$
$= \frac{1}{4}\left[\ln(z-1) - \frac{1}{2}\ln(z^2 + z + 1) - \sqrt{3}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right] + C =$
$= \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt[3]{2x^4 + 1} - 1\right) - \frac{1}{8}\ln\left[(2x^4 + 1)^{\frac{2}{3}} + (2x^4 + 1)^{\frac{1}{3}} + 1\right] - \frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\frac{2\sqrt[3]{2x^4 + 1} + 1}{\sqrt{3}} + C$

V 51- Se consideran las dos integrales $I_m = \int \frac{x^m e^{a - \arctan x}}{\sqrt{1 + x^2}}dx$, $K_m = \int \frac{x^m e^{a - \arctan x}}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}dx$, siendo m entero mayor que cero. Encontrar la ley de recurrencia para calcularlas.

Solución: Integrando por partes, se obtiene: $mI_m = I_{m-1} - (m-1)I_{m-2} + \sqrt{1 + x^2}\,x^{m-1}e^{a - \arctan x}$, $mK_m = K_{m-1} - (m-1)K_{m-2} + \frac{x^{m-1}}{\sqrt{1 + x^2}}e^{a - \arctan x}$.

V 52- Demostrar que $I = \int \frac{(b-x)}{(b+x)\sqrt{x(x+a)(x+c)}}\,dx$, se puede expresar como integral elíptica cuando se tiene que $b^2 = ac$.

Solución: Haciendo el cambio: $\frac{(b-x)}{(b+x)} = t$, $x = \frac{1-t}{1+t}$, $dx = \frac{-2b}{(1+t)^2}\,dt$, y tras hacer las sustituciones: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2}{a-c}$ y $\frac{c+b}{c-b} = \frac{-(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2}{a-c}$, se tiene que la integral es: $I = \int \frac{-2\sqrt{b}\,t}{\sqrt{\sqrt{ac}\,(\sqrt{a} - \sqrt{c})^2(t^2 - 1)(t^2 - \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^4}{(a-c)^2})}}\,dt$. Luego el integrando es del tipo: $\frac{Ct}{\sqrt{t^4 + mt^2 + p}}$, es decir que la integral dada es elíptica en el caso considerado.
(Ver Puig Adam, Cálculo integral, lección 9ª).

V 53- Calcular la integral $I = \int \frac{2x^2 - x - 2}{(x-3)(x^2 + x + 1)}\,dx$.

Solución: Descomponiendo el integrando en suma de fracciones sencillas, se tiene que: $I = \int\left(\frac{1}{x-3} + \frac{x+1}{x^2 + x + 1}\right)dx = \ln(x-3) + \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{1+2x}{\sqrt{3}} + C.$

V 54- Calcular la integral $I = \int \frac{6x^4 - 9x^2 + 5}{(x-1)^2(x+2)(x+1)^2}\,dx$.

Solución: La integral dada es igual a: $I = \frac{Ax + B}{(x-1)(x+1)} + \int\left(\frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{x+2}\right)dx.$

Calculando los coeficientes, se tiene: $I = \dfrac{-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}{(x-1)(x+1)} + \displaystyle\int \left(\dfrac{\frac{5}{18}}{x-1} - \dfrac{\frac{3}{2}}{x+1} + \dfrac{\frac{65}{9}}{x+2} \right) dx =$

$= \dfrac{-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}{(x-1)(x+1)} + \dfrac{5}{18}\ln(x-1) - \dfrac{3}{2}\ln(x+1) + \dfrac{65}{9}\ln(x+2) + C.$

V 55- Calcular la integral $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$

Solución: Haciendo el cambio: $t = \tan x,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2},\ I = \displaystyle\int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln \tan x + C.$

V 56- Calcular la integral $I = \displaystyle\int \frac{x}{a^4 + x^4}\, dx.$

Solución: Haciendo el cambio: $x = a\sqrt{t},\ dx = \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\, dt,$ y sustituyendo estos valores, se tiene: $I = \dfrac{1}{2a^2}\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2a^2}\arctan t = \frac{1}{2a^2}\arctan\frac{x^2}{a^2} + C.$

V 57- Calcular la integral $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$

Solución: Haciendo el cambio: $t = \tan x,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2},$ y sustituyendo estos valores, se tiene: $I = \displaystyle\int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}) + C.$

V 58- Calcular la integral $I = \displaystyle\int e^{ax}\cos x\, dx.$

Solución: Integrando por partes, se tiene: $I = e^{ax}\sin x - a\displaystyle\int e^{ax}\sin x\, dx$. Por otra parte se tiene que: $\displaystyle\int e^{ax}\sin x\, dx = -e^{ax}\cos x + a\int e^{ax}\cos x\, dx.$ Luego: $I = \dfrac{1}{1+a^2}e^{ax}(a\cos x + \sin x) + C.$

V 59- Calcular la integral $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\, dx.$

Solución: Haciendo el cambio: $x = \sin t,\ dx = \cos t\, dt,$ y sustituyendo estos valores en la integral dada, se tiene: $I = \displaystyle\int t\sin t\, dt = -t\cos t + \sin t = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C.$

V 60- Calcular la integral $I = \displaystyle\int x\tan^2 x\, dx.$

Solución: Integrando por partes: $I = x\tan x - \ln\cos x - \dfrac{x^2}{2} + C.$

V 61- Calcular la integral $I = \displaystyle\int \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}\, dx.$

Solución: Haciendo el cambio: $x = \tan t,\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t},$ y sustituyendo estos valores, se tiene: $I = \displaystyle\int t\tan^2 t\, dt = t\tan t - \ln\cos t - \frac{t^2}{2} + C = x\arctan x - \ln(\cos\arctan x) - \frac{(\arctan x)^2}{2} + C.$

V 62- Siendo n natural, se definen las integrales: $I_n = \displaystyle\int \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\, dx,\ K_n = \int \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\, dx.$ Demostrar que: $n(I_{n+1} - I_n) = \sin 2nx$, y que: $K_{n+1} - K_n = I_{n+1},$ y hallar el valor de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\, dx.$

Solución: Diferenciando $n(I_{n+1} - I_n),$ se tiene la expresión: $n\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x} - n\dfrac{\sin(2n-1)x}{\sin x} =$

$= \dfrac{n}{\sin x}\left[2\cos\dfrac{(2n+1)x + (2n-1)x}{2}\ \sin\dfrac{(2n+1)x - (2n-1)x}{2}\right] = \dfrac{2n}{\sin x}\cos 2nx \sin x =$

$= 2n\cos 2nx = (\sin 2nx)'$. Luego: $n(I_{n+1} - I_n) = \sin 2nx.$

$K_{n+1} - K_n = \displaystyle\int \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x}dx - \int \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx}{\sin^2 x}dx =$

$= \int \frac{[\sin(n+1)x + \sin nx][\sin(n+1)x - \sin nx]}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = I_{n+1}.$

En el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ se tiene que: $|n(I_{n+1} - I_n)|_0^{\frac{\pi}{2}} = |\sin 2nx|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$. Por lo tanto: $I_{n+1} = I_n = \ldots = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x} dx = |x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$. Además se tiene: $|K_2|_0^{\frac{\pi}{2}} = |K_1|_0^{\frac{\pi}{2}} + |I_2|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{\pi}{2}$, $|K_3|_0^{\frac{\pi}{2}} = |K_2|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} = 3\frac{\pi}{2}$, y así sucesivamente. Luego: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx = |K_n|_0^{\frac{\pi}{2}} = n\frac{\pi}{2}$.

V 63- Calcular la integral $I = \int \frac{5x-2}{x^3+2x^2-4x-8} dx$.

Solución: Siendo: $x^3+2x^2-4x-8 = (x+2)^2(x-2)$, se tiene que la integral dada es: $I = \int \frac{5x-2}{(x+2)^2(x-2)} dx = \int \left(\frac{3}{(x+2)^2} + \frac{\frac{-1}{2}}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} \right) dx =$
$= \frac{-3}{x+2} - \frac{1}{2}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(x-2) + C.$

V 64- Calcular la integral $I = \int \frac{5x^2-7x}{x^4-3x^3+x^2+3x-2} dx$.

Solución: $I = \int \frac{5x^2-7x}{(x-1)^2(x+1)(x-2)} dx = -\frac{1}{x-1} + \int \frac{4x-2}{(x-1)(x+1)(x-2)} dx =$
$= \frac{1}{1-x} + \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-2} \right) dx = \frac{1}{1-x} + \ln \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-1)} + C.$

V 65- Siendo m, n enteros indicar el cambio de variables para calcular la integral $I = \int X\left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{m}{n}} dx$, en la que X es una función racional de x y de $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$. Aplicarlo a la resolución de $J = \int \frac{\left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{m}{n}}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$.

Solución: Haciendo el cambio: $x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = y^n$, se tiene que: $x = \frac{y^{2n}-1}{2y^n}$, $dx = \frac{n(y^{2n}+1)}{2y^{n+1}} dy$, $(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{y^{2n}+1}{2y^n}$. Sustituyendo estos valores en la integral dada: $I = \int X\left[y^m \frac{n(y^{2n}+1)}{2y^{n+1}} \right] dy$, siendo X una función racional de $\frac{y^{2n}+1}{2y^n}$ y de $\frac{y^{2n}-1}{2y^n}$. Aplicando el cambio a la integral J, se tiene que: $J = \int \frac{y^m n(y^{2n}+1)2y^n}{(y^{2n}+1)2y^{n+1}} dy = \int n y^{m-1} dy = \frac{n}{m} y^m + C =$
$= \frac{n}{m}\left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{m}{n}} + C.$

V 66- Calcular la integral $I = \int x \arcsin\left(\frac{2a-x}{4a} \right)^{\frac{1}{2}} dx$.

Solución: Integrando por partes, se tiene: $I = \frac{x^2}{2} \arcsin\left(\frac{2a-x}{4a} \right)^{\frac{1}{2}} + \int \frac{x^2 dx}{4\sqrt{4a^2-x^2}}$. Haciendo el cambio: $x = 2a\sin t$, $dx = 2a\cos t dt$, y sustituyendo estos valores en la integral dada, se tiene: $I = \frac{x^2}{2} \arcsin\left(\frac{2a-x}{4a} \right)^{\frac{1}{2}} + a^2 \int \sin^2 t dt = \frac{x^2}{2} \arcsin\left(\frac{2a-x}{4a} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2}{2}(t - \sin t \cos t) =$
$= \frac{x^2}{2} \arcsin\left(\frac{2a-x}{4a} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{2a} - \frac{x}{8}\sqrt{4a^2-x^2} + C.$

V 67- Calcular la integral $I = \int \frac{(ax^4+2bx^2+a)}{(1-x^4)(1+x^4)^{\frac{1}{2}}} dx$.

Solución: Operando: $I=\int\frac{a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2b}{\left(\frac{1}{x^2}-x^2\right)x\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)^{\frac12}}dx$. Haciendo el cambio: $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2$, $dx=\frac{y}{\left(x+\frac1x\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}dy$, se tiene que: $I=-\int\frac{(ay^2+2b)}{x^4+\frac{1}{x^4}-2}dy=-\int\frac{(ay^2+2b)}{y^4-4}dy=$
$=-\int\frac{(ay^2+2b)}{(y^2+2)(y+2)(y-2)}dy=\frac{a+b}{4\sqrt2}\int\frac{dy}{y+\sqrt2}-\frac{a+b}{4\sqrt2}\int\frac{dy}{y-\sqrt2}-\frac{a-b}{2}\int\frac{dy}{y^2+2}=$
$=\frac{a+b}{4\sqrt2}\ln\frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt2}{\sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}}-\sqrt2}-\frac{a-b}{2\sqrt2}\arctan\frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt2}=$
$=\frac{a+b}{4\sqrt2}\ln\frac{\sqrt{x^4+1}+\sqrt2\,x}{\sqrt{x^4-1}-\sqrt2\,x}-\frac{a-b}{2\sqrt2}\arctan\frac{\sqrt{x^4+1}}{\sqrt2\,x}+C.$

V 68- Calcular la integral $I=\int\frac{\sin^5x}{\sqrt{\cos x}}dx$.

Solución: Haciendo el cambio: $y=\cos x$, $dy=-\sin x dx$, y sustituyendo estos valores en la integral dada, se tiene que: $I=-\int\frac{(1-y^2)^2dy}{\sqrt y}=-\int\frac{dy}{\sqrt y}+2\int\frac{y^2dy}{\sqrt y}-\int\frac{y^4dy}{\sqrt y}=$
$=-2\sqrt{\cos x}+\frac45\cos^2x\sqrt{\cos x}-\frac29\cos^4x\sqrt{\cos x}+C=2\sqrt{\cos x}\left(-1+\frac25\cos^2x-\frac19\cos^4x\right)+C.$

V 69- Calcular las integrales $S=\int e^{mx}\sin nx dx$, $C=\int e^{mx}\cos nx dx$.

Solución: $C+iS=\int e^{x(m+ni)}dx=\frac{e^{x(m+ni)}}{m+ni}+K$. De donde, separando parte real e imaginaria, se tiene que: $S=\frac{e^{mx}}{m^2+n^2}(m\sin nx-n\cos nx)+K$, $C=\frac{e^{mx}}{m^2+n^2}(m\cos nx+n\sin nx)+K$.

V 70- Calcular la integral $I=\int\frac{dx}{x^n(a+bx)^{\frac12}}$. Aplicar la solución al caso $n=3$.

Solución: Haciendo el cambio: $x=-\frac abt$, $dx=-\frac ab\,dt$, $I=(-1)^{n+1}\frac{b^{n-1}}{a^{n-\frac12}}\int t^{-n}(1-t)^{\frac{-1}{2}}dt$. Se trata de una integral binómica del tipo: $Y_{q,p}=\int t^q(1-t)^pdt$, siendo $q<0$. Por tanto, se aplica la ecuación de reducción (ver problema V 44): $Y_{q,p}=\frac{p+q+2}{q+1}Y_{q+1,p}+\frac{1}{q+1}t^{q+1}(1-t)^{p+1}$, siendo: $Y_{1,p}=2\operatorname{arg\,sech}\sqrt t+C$. Aplicando esta solución al caso planteado de $n=3$, se obtiene: $I=\int\frac{dx}{x^3(a+bx)^{\frac12}}=\frac{3b\sqrt{a+bx}}{4a^2x}-\frac{\sqrt{a+bx}}{2ax^2}+\frac{3b^2}{4a^{\frac52}}\operatorname{arg\,sech}\sqrt{-\frac{bx}{a}}+C=$
$=\frac{3b\sqrt{a+bx}}{4a^2x}-\frac{\sqrt{a+bx}}{2ax^2}+\frac{3b^2}{4a^{\frac52}}\ln\frac{\sqrt a\pm\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-bx}}+C.$

V 71- Calcular la integral $I_n=\int\frac{dx}{(a-b\cos x)^n}$. Aplicar la solución al caso $n=2$.

Solución: Se tiene: $I_{n-2}=\int\frac{dx}{(a-b\cos x)^{n-2}}=\int\frac{(a-b\cos x)dx}{(a-b\cos x)^{n-1}}=aI_{n-1}-b\int\frac{d(\sin x)}{(a-b\cos x)^{n-1}}=$
$=aI_{n-1}-\frac{b\sin x}{(a-b\cos x)^{n-1}}-b\int\frac{\sin x dx(n-1)((a-b\cos x)^{n-2}b\sin x}{(a-b\cos x)^{2n-2}}=$
$=aI_{n-1}-\frac{b\sin x}{(a-b\cos x)^{n-1}}-(n-1)b^2\int\frac{\sin^2xdx}{(a-b\cos x)^n}$. Sustituyendo en esta integral el valor de $b^2\sin^2x$ por la siguiente expresión equivalente: $(a^2-b^2)+2a(a-bcox)-(a-b\cos x)^2$, se tiene: $I_{n-2}=aI_{n-1}-\frac{b\sin x}{(a-b\cos x)^{n-1}}-$
$-(n-1)\left[-\int\frac{(a^2-b^2)dx}{(a-b\cos x)^n}+\int\frac{2adx}{(a-b\cos x)^{n-1}}-\int\frac{dx}{(a-b\cos x)^{n-2}}\right]=$

$= aI_{n-1} - \dfrac{b\sin x}{(a-b\cos x)^{n-1}} - (n-1)[-(a^2-b^2)I_n + 2aI_{n-1} - I_{n-2}]$. De donde se obtiene que: $I_n = I_{n-1}\dfrac{a(2n-3)}{(n-1)(a^2-b^2)} - I_{n-2}\dfrac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)} + \dfrac{b\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a-b\cos x)^{n-1}}$, ecuación de recurrencia que resuelve la integral dada. Para calcular $I_1 = \int \dfrac{dx}{a-b\cos x}$, se hace el cambio: $\tan\dfrac{x}{2} = t$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$. Sustituyendo estos valores en I_1, se tiene: $I_1 = \int \dfrac{2}{(1+t^2)(a-b\frac{1-t^2}{1+t^2})}dt = \dfrac{2}{a-b}\int \dfrac{dt}{1+\frac{a+b}{a-b}t^2} = \dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\,t\right) =$

$= \dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$. Aplicando la ley de recurrencia calculada más arriba, se tiene: $I_2 = I_1\dfrac{a}{a^2-b^2} + \dfrac{b\sin x}{(a^2-b^2)(a-b\cos x)}$. Sustituyendo el valor encontrado para I_1, se obtiene: $I_2 = \dfrac{2a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\tan\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{b\sin x}{(a^2-b^2)(a-b\cos x)}$.

V 72- Calcular la integral $I = \int \dfrac{(2a^2-x^2)x^3dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Solución: Haciendo el cambio: $x = a\sin t$, $dx = a\cos t dt$, y sustituyendo estos valores, se tiene: $I = a^3\int\dfrac{(2-\sin^2 t)\sin^3 t}{\cos^2 t}dt = a^3\left(\dfrac{1}{\cos t} + \dfrac{\cos^3 t}{3}\right) + C = a^3\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} + \dfrac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}\right) + C.$

V 73- Calcular la integral $I = \int \tan^3 x dx$.

Solución: $I = \int\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin x dx = \int\left(\dfrac{\sin x}{\cos^3 x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}\right)dx = \dfrac{1}{2\cos^2 x} + \ln\cos x + C.$

V 74- Sabiendo que un polinomio $f(x)$ de 4º grado es tal que $f'(x)$ y $f'''(x)$ se anulan para $x = a$, calcular la integral $\int\dfrac{dx}{f(x)}$.

Solución: Haciendo el cambio: $y = x - a$, en el desarrollo del polinomio dado, se tiene: $f(y) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}y + \dfrac{f''(a)}{2!}y^2 + \dfrac{f'''(a)}{3!}y^3 + \dfrac{f^{4)}(a)}{4!}y^4 = f(a) + \dfrac{f''(a)}{2!}y^2 + \dfrac{f^{4)}(a)}{4!}y^4$. Por tanto al ser bicuadrada esta expresión: $f(y) = (y-\alpha)^2(y-\beta)^2$, $f(x) = (x-a-\alpha)^2(x-a-\beta)^2$. Luego: $\int\dfrac{dx}{f(x)} = \int\dfrac{dx}{(x-a-\alpha)^2(x-b-\beta)^2} = \dfrac{1}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\ln\dfrac{x-a-\alpha}{x-a+\alpha} + \dfrac{1}{2\beta(\beta^2-\alpha^2)}\ln\dfrac{x-a-\beta}{x-a+\beta}$.

Sección W - INTEGRALES DEFINIDAS

W 1- Demostrar que si $f(x,y)$, no varía cuando se cambia y por x, y x por y, se tiene que: $I = \int_0^\infty \frac{dx}{xf(x,\frac{1}{x})} = 2\int_0^1 \frac{dx}{xf(x,\frac{1}{x})}$.

Solución: Haciendo el cambio: $x = \frac{1}{x}$, $dx = -\frac{dx}{x^2}$, y sustituyendo estos valores en $\int_0^1 \frac{dx}{xf(x,\frac{1}{x})}$, se tiene que: $\int_0^1 \frac{dx}{xf(x,\frac{1}{x})} = \int_\infty^1 \frac{-dx}{xf(x,\frac{1}{x})} = \int_1^\infty \frac{dx}{xf(x,\frac{1}{x})}$. Luego aplicando esto a la integral dada, se obtiene: $I = \int_0^\infty \frac{dx}{xf(x,\frac{1}{x})} = \int_0^1 \frac{dx}{xf(x,\frac{1}{x})} + \int_1^\infty \frac{dx}{xf(x,\frac{1}{x})} = 2\int_0^1 \frac{dx}{xf(x,\frac{1}{x})}$.

W 2- Demostrar que: $\int_0^a dx \int_0^{\varphi(x)} f(y)\,dy = a\int_0^{\varphi(a)} f(y)\,dy - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(a)} f(y)\psi(y)\,dy$, siendo $\psi[\varphi(x)] = x$.

Solución: Cambiando el orden de integración del primer término de la igualdad planteada, y siendo $x = \gamma(y)$ la función recíproca de $y = \varphi(x)$, se tiene que: $\int_0^a dx \int_0^{\varphi(x)} f(y)dy = \int_0^{\varphi(a)} dy \int_{x=\gamma(y)}^a f(y)dy =$ $= \int_0^{\varphi(a)} dy|f(y)x|_{x=\gamma(y)}^a = \int_0^{\varphi(a)} f(y)[a-\gamma(y)]dy$. Por tanto, de acuerdo con la citada igualdad: $\int_0^{\varphi(a)} f(y)[a-\gamma(y)]dy = a\int_0^{\varphi(a)} f(y)dy - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(a)} f(y)\psi(y)dy$. Derivando respecto a y, ambos términos de esta igualdad, se tiene: $|f(y)[a-\gamma(y)]|_0^{\varphi(a)} = a|f(y)|_0^{\varphi(a)} - |f(y)\psi(y)|_{\varphi(0)}^{\varphi(a)}$. Llevando a cabo las sustituciones correspondientes a la aplicación de los límites indicados, se tiene: $f(\varphi(a))[a-\gamma[\varphi(a)]] - f(0)[a-\gamma(0)] = a[f[\varphi(a)] - f(0)] - f[\varphi(a)]\psi[\varphi(a)] + f[\varphi(0)]\psi[\varphi(0)]$. Como se tiene que: $\gamma[\varphi(a)] = a$, $\gamma(0) = 0$, $\psi[\varphi(a)] = a$, $\psi[\varphi(0)] = 0$, aplicando estos valores: $f(\varphi(a))[a-a] - f(0)[a-0] = a[f[\varphi(a)] - f(0)] - f[\varphi(a)]a + f[\varphi(0)] \cdot 0$. Simplificando, se obtiene que: $-f(0)a = -af(0)$, con lo que queda demostrada la igualdad del enunciado.

W 3- Demostrar que si $g(x)$ es una función no creciente para $x > 0$, se cumple para cualquier valor de $k > 0$, que: $k^2\int_k^\infty g(x)dx \leq \frac{4}{9}\int_0^\infty x^2 g(x)dx$.

Solución: Aplicando el teorema de la media: $m\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M\int_a^b \varphi(x)dx$. Haciendo: $\varphi(x) = x^2 \geq 0$, $f(x) = g(x)$, tal que: $m \leq g(x) \leq M$, por ser $g(x)$ función no creciente, se tiene: $m\int_a^b x^2dx \leq \int_a^b g(x)x^2dx \leq M\int_a^b x^2dx$. Luego: $\frac{4}{9}m\int_a^b x^2dx \leq \frac{4}{9}\int_a^b g(x)x^2dx \leq \frac{4}{9}M\int_a^b x^2dx$. Ahora bien: $\frac{4}{9}\int_a^b g(x)x^2dx \geq \frac{4}{9}m\int_a^b x^2dx \geq \frac{4}{27}mt^3$, cuando $t \to \infty$. Por otra parte: $\int_k^\infty g(x)dx \leq (t-k)M$, cuando $t \to \infty$. Luego: $k^2\int_k^\infty g(x)dx \leq k^2M(t-k)$, cuando $t \to \infty$. Pero como: $\frac{4}{27}mt^3 \geq k^2M(t-k)$, cuando $t \to \infty$, resulta que: $k^2 \int_k^{\infty} g(x)dx \leq k^2 M(t-k) \leq \frac{4}{27} mt^3 \leq \frac{4}{9} \int_0^{\infty} x^2 g(x)dx$ cuando $t \to \infty$.

Luego: $k^2 \int_k^{\infty} g(x)dx \leq \frac{4}{9} \int_0^{\infty} x^2 g(x)dx$.

W 4- Determinar para qué valores de λ es convergente la integral $\int_2^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}} - 1}{(\ln x)^{\lambda}} dx$.

Solución: Por el criterio integral de Cauchy, la integral es convergente si lo es: $\sum \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{(\ln n)^{\lambda}}$. Para n suficientemente grande, $n^{\frac{1}{n}}$ es equivalente a $n^{\epsilon} - 1$, equivalente a $\frac{\ln n}{n}$. Luego: $\frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{(\ln n)^{\lambda}}$ es equivalente a: $\frac{\frac{1}{n}\ln n}{(\ln)^{\lambda}} = \frac{1}{n(\ln n)^{\lambda-1}}$. Para $\lambda = 1$, la serie es la armónica, luego es divergente. Para $\lambda \geq 2$, la serie es convergente; por ejemplo, para $\lambda = 2$, la serie es $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$. Por tanto, la integral es convergente para $\lambda \geq 2$.

W 5- Calcular la integral definida $I = \int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{(x^2+1)}{x\sqrt{x^4+7x^2+1}} dx$.

Solución: Haciendo el cambio: $x^2 = y$, $2xdx = dy$, y teniendo en cuenta los nuevos límites (para $x = 1$, $y = 1$, para $x = 2+\sqrt{5}$, $y = 9+4\sqrt{5}$), se tiene que: $I = \int_1^{9+4\sqrt{5}} \frac{(y+1)}{2y\sqrt{y^2+7y+1}} dy$. Haciendo el cambio: $\sqrt{y^2+7y+1} = y+t$, $y = \frac{t^2-1}{7-2t}$, $dy = \frac{2(-t^2+7t-1)}{(7-2t)^2} dt$, los nuevos límites son: para $y = 1$, $t = 2$, para $y = 9+4\sqrt{5}$, $t = 1+\sqrt{5}$. Por tanto, se tiene:

$$I = \int_2^{1+\sqrt{5}} \frac{t^2-2t+6}{(t^2-1)(7-2t)} dt = \int_2^{1+\sqrt{5}} \left(\frac{\frac{-1}{2}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{1}{7-2t} \right) dt = \left| \ln \sqrt{\frac{t-1}{(t+1)(t-\frac{7}{2})}} \right|_2^{1+\sqrt{5}} =$$

$$= \ln \sqrt{\frac{9}{(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}} = \ln 3.$$

W 6- Calcular la integral definida $I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$.

Solución: $I = |-\ln(1+\cos x)|_0^{2\pi} = 0$.

W 7- Calcular la integral definida $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x \, dx$.

Solución: $I = |-\ln \cos x|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln \frac{2}{\sqrt{3}}$.

W 8- Calcular la integral definida $I = \int_0^1 xe^{-x^2} dx$.

Solución: $I = \left| -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

W 9- Calcular la integral definida $I = \int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$.

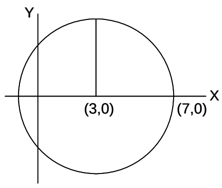
Solución: $\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \left|\ln \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|_3^8 = \ln\frac{2}{4} - \ln\frac{1}{3} = \ln\frac{3}{2}$.

W 10- Calcular la integral definida $I = \int_0^a \frac{dx}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$.

Solución: Haciendo el cambio: $x = a\sin y,\ dx = a\cos y dy,$ y teniendo en cuenta los nuevos límites (para $x = 0,\ \ y = 0;$ para $x = a,\ \ y = \frac{\pi}{2}$), se tiene: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos y dy}{a+a\cos y} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y dy}{1+\cos y} =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1+\cos y}\right)dy = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1+\cos y} = \frac{\pi}{2} - \left|\tan\frac{y}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$

W 11- Calcular la integral definida $I = \int_7^3 \sqrt{7+6x-x^2}\, dx,$ sin hallar la función primitiva.

Solución:



Haciendo: $y^2 = 7+6x-x^2,$ se tiene: $x^2+y^2-6x-7 = 0$. Esta ecuación corresponde a un círculo de centro $(3,0)$ y radio 4. Luego la integral pedida corresponde al área del primer cuadrante, es decir: $\frac{1}{4}\pi \cdot 16 = 4\pi$.

W 12- Calcular las integrales definidas $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\, dx,\ I_2 = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\, dx.$

Solución: Haciendo el cambio: $y = 1-x$, se tiene: $I_1 = \int_1^0 -\frac{\ln(1-y)}{y}dy$. Aplicando el desarrollo en potencias de y: $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y}dy = -\int_0^1\left(1+\frac{y}{2}+\frac{y^2}{3}+\ldots\right)dy = -\left|y+\frac{y^2}{2^2}+\frac{y^3}{2^3}+\ldots\right|_0^1 =$
$= -\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\ldots\right) = -\frac{\pi^2}{6}$. Sumando: $I_1+I_2 = \int_0^1\left(\frac{\ln x}{1-x}+\frac{\ln x}{1+x}\right)dx = 2\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx =$
$= 2\left(|\ln x \operatorname{arg\,tanh} x|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{arg\,tanh} x}{x}dx\right)$. Como: $\operatorname{arg\,tanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots,$ su integral es: $\int_0^1 \frac{\operatorname{arg\,tanh} x}{x}dx = \int_0^1\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\ldots\right)dx = \left|x+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}+\ldots\right|_0^1 =$
$= 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{8}$. Por otra parte: $|\ln x \operatorname{arg\,tanh} x|_0^1 = 0$ $(*)$. Luego: $I_1+I_2 = 2(-\frac{\pi^2}{8}) =$
$= -\frac{\pi^2}{4}$. Por tanto: $I_2 = -\frac{\pi^2}{4} - (-\frac{\pi^2}{6}) = -\frac{\pi^2}{12}$.

$(*)$ $|\ln x \operatorname{arg\,tanh} x|_0^1 = \lim_{x\to1} \ln\frac{1+x}{1-x}\ln x - \lim_{x\to0} \ln\frac{1+x}{1-x}\ln x$. Pero, $\lim_{x\to1} \ln\frac{1+x}{1-x}\ln x = 0,$ y

$\lim_{x\to 0} \ln \frac{1+x}{1-x} \ln x = 0.$

W 13- Calcular las integrales definidas $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx,\ I_2 = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\, dx.$

Solución: Por simetría: $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin x) + \ln(\cos x)] dx =$ $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{\sin 2x}{2}) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin 2x - \ln 2) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx - \left| \frac{1}{2} x \ln 2 \right|_0^{\frac{\pi}{2}}$. Haciendo el cambio: $2x = y$, se tiene que: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin y) dy$. Por tanto: $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin y) dy - \left| \frac{1}{2} x \ln 2 \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx - \frac{\pi}{4}\ln 2$. Luego se tiene: $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$. Para calcular I_2, se hace el cambio: $x = \sin t$, con lo que: $I_2 = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$.

W 14- Calcular la integral definida $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$

Solución: Haciendo el cambio: $x = \pi - y$, se tiene: $I = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - y)\sin y}{1+\cos^2 y} dy = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{1+\cos^2 y} dy - I.$ De donde se obtiene: $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{1+\cos^2 y} dy$. Haciendo el cambio: $\cos y = t$, se tiene que: $I = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} |\arctan t|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{4}.$

W 15- Calcular la integral definida $I = \int_0^{\frac{1}{2}} 4\frac{\sin \pi t}{\pi t}\, dt$, mediante el desarrollo en serie de la función $\sin x$.

Solución: Haciendo el cambio: $\pi t = x$, $I = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots}{x} dx =$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots) dx = \frac{4}{\pi}\left| x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots \right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(\frac{\pi}{2})^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(\frac{\pi}{2})^7}{7 \cdot 7!} + \ldots \right] = 1,745286312$. El error cometido es menor que el primer sumando no considerado, es decir: $e < \frac{4}{\pi}\frac{(\frac{\pi}{2})^9}{9 \cdot 9!} = 2,27 \cdot 10^{-5}$.

W 16- Calcular la integral definida $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}}$.

Solución: Haciendo el cambio: $x = \frac{t^3}{1+t^3}$, $dx = \frac{3t^2}{(1+t^3)^2}dt$, $I = \int_0^\infty \frac{3}{1+2t^3}dt$. Haciendo el cambio: $2t^3 = y^3$, $I = \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}\int_0^\infty \frac{dy}{y^3+1} = \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}A$, siendo A la integral: $\int_0^\infty \frac{dy}{y^3+1} =$
$= \int_0^\infty \left[\frac{\frac{1}{3}}{y+1} - \frac{\frac{1}{3}y-1+1}{y^2-y+1} + \frac{\frac{2}{3}}{y^2-y+1}\right]dy = \int_0^\infty \left[\frac{\frac{1}{3}}{y+1} - \frac{1}{6}\frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{\frac{1}{2}}{y^2-y+1}\right]dy =$
$= \left|\frac{1}{3}\ln(y+1)\right|_0^\infty - \left|\frac{1}{6}\ln(y^2-y+1)\right|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{y^2-y+1}$. Llamando B a esta última integral:
$B = \int_0^\infty \frac{dy}{y^2-y+1} = \int_0^\infty \frac{dy}{(y-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$, y haciendo el cambio: $y - \frac{1}{2} = w$, se tiene que:
$B = \int_{-\frac{1}{2}}^\infty \frac{dw}{w^2+\frac{3}{4}} = \left|\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2w}{\sqrt{3}}\right|_{\frac{-1}{2}}^\infty = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. Por tanto, se obtiene el valor:
$A = \left|\frac{1}{3}\ln(y+1)\right|_0^\infty - \left|\frac{1}{6}\ln(y^2-y+1)\right|_0^\infty + \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = \left|\frac{1}{6}\ln\frac{(y+1)^2}{y^2-y+1}\right|_0^\infty + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
Luego: $I = \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\pi$.

W 17- Calcular la integral definida $I = \int_0^1 \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$.

Solución: Haciendo el cambio: $x = \sin y$, se tiene que la integral dada es:
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \ln(\sin y)dy = -|\cos y\ln(\sin y)|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sin y} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin y dy = -A+B+C$. Estos tres sumandos se obtienen de la siguiente forma: $A = |\cos y\ln(\sin y)|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\lim_{y=0} \cos y\ln(\sin y)$,
$B = \left|\ln(\tan\frac{y}{2})\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\lim_{y\to 0}\ln(\tan\frac{y}{2})$, $C = |\cos y|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$. De donde se obtiene que:
$I = \lim_{y=0}\cos y\ln(\sin y) - \lim_{y\to 0}\ln(\tan\frac{y}{2}) - 1 = \lim_{y=0}\ln\frac{\sin y}{\tan\frac{y}{2}} - 1 = \lim_{y=0}\ln\frac{2\sin\frac{y}{2}}{\tan\frac{y}{2}} - 1 = \ln 2 - 1$.

W 18- Calcular la integral definida $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+m\sin^2 x)}{\sin^2 x}dx$.

Solución: Derivando respecto a m bajo el signo integral: $I'_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+m\sin^2 x}$. Haciendo el cambio: $\tan x = y$, $\sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}$, $dx = \frac{dy}{1+y^2}$, sustituyendo estos valores se tiene que:
$I'_m = \frac{1}{1+m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{y^2+\frac{1}{1+m}} = \frac{1}{1+m}\left|\sqrt{1+m}\arctan\sqrt{1+m}\,y\right|_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{1+m}}$. Por tanto, el

valor de I es: $I = \int \frac{\pi}{2\sqrt{1+m}} = \pi\sqrt{1+m} + C$. Para $m = 0$, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln 1}{\sin^2 x} dx = 0$, $\pi + C = 0$, $C = -\pi$, $I = \pi\sqrt{1+m} - \pi = \pi(\sqrt{1+m} - 1)$.

W 19- Calcular la integral definida $I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

Solución: $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x} dx$, $I_1{}'_a = \int_0^{\infty} -e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$, $I_1 = \int \frac{da}{a} = \ln(k_1 a)$. Procediendo de forma análoga: $I_2 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-bx}}{x} dx = \ln(k_2 b)$. $I = I_1 - I_2 = \ln(\frac{k_1}{k_2}\frac{a}{b}) = \ln(k\frac{a}{b})$. Para $a = b$, se tiene: $I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-ax}}{x} dx = 0 = \ln(k\frac{a}{a})$, luego: $k = 1$. Por tanto: $I = \ln(\frac{a}{b})$.

W 20- Calcular la integral definida $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^n}$, suponiendo conocida I_{n-1}. Aplicar al caso $n = 2$.

Solución: Las derivadas de I_n respecto a a y b, son: $\frac{dI_n}{da} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2an\cos^2 x}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{n+1}} dx$, $\frac{dI_n}{db} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2bn\sin^2 x}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{n+1}} dx$. Por tanto, se deduce que: $\frac{-1}{2an}\frac{dI_n}{da} + \frac{-1}{2bn}\frac{dI_n}{db} =$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{n+1}} = I_{n+1}$, con lo que: $I_n = -\left(\frac{1}{2a(n-1)}\frac{dI_{n-1}}{da} + \frac{1}{2b(n-1)}\frac{dI_{n-1}}{db}\right)$. $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$. Haciendo el cambio: $\tan x = y$, se obtiene el valor de $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dy}{a^2 + b^2y^2} = \left|\frac{1}{ab}\arctan\frac{b}{a}y\right|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2ab}$. Luego, aplicando para $n = 2$ la solución obtenida: $I_2 = -\left(\frac{1}{2a}\frac{dI_1}{da} + \frac{1}{2b}\frac{dI_1}{db}\right) = -\left(\frac{1}{2a}\frac{-\pi}{2a^2b} + \frac{1}{2b}\frac{-\pi}{2ab^2}\right) = \frac{\pi}{4a^3b3}(a^2 + b^2)$.

W 21- Calcular la integral definida $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(ax^2 + 2bx + c)^n}$.

Solución: Siendo la derivada de $\frac{1}{ax^2 + 2bx + c}$ respecto de c, igual a: $\frac{d}{dc}\left(\frac{1}{ax^2 + 2bx + c}\right) = \frac{-1}{(ax^2 + 2bx + c)^2}$, sus sucesivas derivadas vienen dadas por: $\frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}}\left(\frac{1}{ax^2 + 2bx + c}\right) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(ax^2 + 2bx + c)^n}$. Por tanto, se obtiene que: $I_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}} I_1$. Para $n = 1$, I_1 es: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)} =$ $= \frac{1}{a}\left|\frac{2a}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\arctan\frac{2a(x + \frac{b}{2a})}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{-2\pi}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$. Sustituyendo este valor en la ecuación que relaciona I_n con I_1, se obtiene que I_n viene dada por la siguiente expresión:

$$I_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}}\left(\frac{-2\pi}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) = (-1)^n\frac{\pi(2n-1)!!2^{n+1}a^n}{(n-1)!(b^2-4ac)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

W 22- Calcular la integral definida $I = \int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\,dx.$ Aplicar la solución para $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$

Solución: Derivando I respecto al parámetro a, se tiene: $I'_a = \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2} + \int_0^a \frac{xdx}{(1+ax)(1+x^2)} =$ $= \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2} - \int_0^a \frac{adx}{(1+a^2)(1+ax)} + \frac{1}{1+a^2}\int_0^a \frac{adx}{1+x^2} + \frac{a}{1+a^2}\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} =$ $= \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2} - \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2} + \frac{\ln(1+a^2)}{2(1+a^2)} + \frac{a\arctan a}{1+a^2} = \frac{\ln(1+a^2)}{2(1+a^2)} + \frac{a\arctan a}{1+a^2}.$ Integrando esta expresión respecto al citado parámetro: $I = \int \frac{\ln(1+a^2)}{2(1+a^2)}da + \int \frac{a\arctan a}{1+a^2}da =$ $= \frac{1}{2}\arctan a \cdot \ln(1+a^2) - \int \frac{a\arctan a}{1+a^2}da + \int \frac{a\arctan a}{1+a^2}da + k = \frac{1}{2}\arctan a \cdot \ln(1+a^2) + k.$ Para $a = 0,\ I = 0,$ luego el valor de k es: $k = 0.$ Por tanto la solución es: $I = \frac{1}{2}\arctan a \cdot \ln(1+a^2).$ Para calcular: $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)dx}{1+x^2},$ se hace $a = 1,$ luego: $J = \frac{1}{2}\arctan 1 \cdot \ln 2 = \frac{\pi\ln 2}{8}.$

W 23- Calcular la integral definida $I = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+h)^{a+b}}\,dx,$ utilizando las expresiones eulerianas.

Solución: Haciendo el cambio: $\frac{x}{x+h} = \frac{y}{1+h},\quad \frac{dx}{(x+h)^2} = \frac{dy}{h(h+1)},$ se tiene que: $I = \frac{1}{h^b(1+h)^a}\int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy = \frac{1}{h^b(1+h)^a}B(a,b) = \frac{1}{h^b(1+h)^a}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$

Nota: La expresión euleriana de segunda especie es: $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx,\ \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1,$ $\Gamma(p) = (p-1)! = (p-1)\Gamma(p-1),\ \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$ La expresión euleriana de primera especie es: $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = B(q,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}x\cos^{2q-1}x dx.$ Se tiene que: $B(p,1) = \frac{1}{p},\ B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi,\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$

W 24- Calcular las integrales de Fresnel: $I = \int_0^\infty \cos x^2\,dx,\ J = \int_0^\infty \sin x^2\,dx$

Solución: $H = I + iJ = \int_0^\infty e^{x^2 i}dx.$ Haciendo el cambio: $x^2 i = -y,\ dx = \frac{\sqrt{i}}{2}y^{\frac{-1}{2}}dy,$ se tiene: $H = \frac{\sqrt{i}}{2}\int_0^\infty e^{-y}y^{\frac{-1}{2}}dy = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2}\sqrt{\pi}.$ Como: $e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ H = \sqrt{\frac{\pi}{8}}(1+i).$ Luego: $I = J = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$

W 25- Calcular la integral definida $I = \int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx.$

Solución: $I = \int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{x^2}}dx - \int_0^\infty e^{-\frac{b^2}{x^2}}dx = I_1 - I_2$. Haciendo el cambio: $\frac{a^2}{x^2} = y$, $x = ay^{-\frac{1}{2}}$, $dx = -\frac{a}{2}y^{-\frac{3}{2}}dy$, se tiene: $I_1 = \frac{a}{2}\int_0^\infty y^{-\frac{3}{2}}e^{-y}dy = \frac{a}{2}\Gamma(-\frac{1}{2}) = -\frac{a\pi}{2\Gamma(\frac{3}{2})} = -\frac{a\pi}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -a\sqrt{\pi}$, $I_2 = -b\sqrt{\pi}$. Por tanto: $I = \sqrt{\pi}\,(b-a)$.

W 26- Calcular la integral definida $I = \int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx$.

Solución: Haciendo el cambio: $x^2 = y$, $dx = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy$, se tiene que la integral dada es: $I = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^{n-\frac{1}{2}}e^{-y}dy = \frac{1}{2}\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$.

W 27- Calcular la integral definida $I = \int_a^b \frac{x}{(x-a)^{\frac{1}{3}}(b-x)^{\frac{2}{3}}}dx$.

Solución: Haciendo el cambio: $x - a = (b-a)y$, se tiene que la integral planteada es: $I = \int_0^1 [a+(b-a)y]y^{-\frac{1}{3}}(1-y)^{-\frac{2}{3}}dy$. De donde se tiene que: $I = aB(\frac{2}{3},\frac{1}{3}) + (b-a)B(\frac{5}{3},\frac{1}{3}) =$ $= a\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\,\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(1)} + (b-a)\frac{\Gamma(\frac{5}{3})\,\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(2)} = \frac{2(a+2b)\sqrt{3}\,\pi}{9}$.

W 28- Calcular la integral definida $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^6 x\,dx$.

Solución: $I = \frac{1}{2}B(\frac{5}{2},\frac{7}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{2\Gamma(6)} = \frac{3\pi}{512}$.

W 29- Calcular la integral definida $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos^3 x\,dx$.

Solución: $I = \frac{1}{2}B(3,\ 2) = \frac{\Gamma(3)\,\Gamma(2)}{2\Gamma(5)} = \frac{1}{24}$.

W 30- Calcular la integral definida $I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[n]{x}\,\ln x}{1+x^2}dx$.

Solución: Haciendo $m = \frac{1}{n}$, se tiene: $I = \int_0^\infty \frac{x^m \ln x}{1+x^2}dx$. Integrando respecto al parámetro m: $J = \int Idm = \int_0^\infty \frac{x^m}{1+x^2}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi mi}}\sum Residuos =$

$$= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi mi}}\left[\underset{i}{Residuo}\ \frac{z^m}{1+x^2} + \underset{-i}{Residuo}\ \frac{z^m}{1+x^2}\right] =$$

$$= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi mi}}\left[\lim_{z\to i}\frac{z^m(z-i)}{z^2+1} + \lim_{z\to -i}\frac{z^m(z+i)}{z^2+1}\right] = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi mi}}\left[\frac{i^m}{2i} + \frac{(-i)^m}{-2i}\right] =$$

$= \frac{\pi}{1-e^{2\pi mi}}\left[e^{\frac{m\pi i}{2}} - e^{\frac{3m\pi i}{2}}\right] = \frac{\pi}{2\cos\frac{m\pi}{2}}$. Por tanto, derivando este valor respecto a m, se tiene:

$$I = \frac{d}{dm}\left(\frac{\pi}{2\cos\frac{m\pi}{2}}\right) = \frac{\pi^2}{4}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{\cos^2\frac{m\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}\tan\frac{m\pi}{2}\sec\frac{m\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}\tan\frac{\pi}{2n}\sec\frac{\pi}{2n}.$$

W 31- Calcular la integral definida $I = \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx.$

Solución: Integrando respecto a a, se tiene: $\int Ida = -\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}dx = -C$. Siendo: $S = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{1+x^2}dx$, se tiene que: $C+iS = \int_0^\infty \frac{e^{axi}}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{axi}}{1+x^2}dx = = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{azi}}{1+z^2}dz = \pi i\sum Residuos$. En el semiplano superior hay un polo: $z = i$, por lo que: $\sum R = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{azi}}{1+z^2} = \frac{e^{-a}}{2i}$. Por tanto: $C+iS = \pi i\frac{e^{-a}}{2i} = \frac{\pi}{2}e^{-a}$. Luego: $C = \frac{\pi}{2}e^{-a}$, $\int Ida = -C = -\frac{\pi}{2}e^{-a}$, $I = \frac{\pi}{2}e^{-a}$.

W 32- Desarrollar en serie de Fourier la función periódica $f(x) = \cos ax$, en el intervalo $-\pi < x < \pi$.

Solución: Como $\cos ax$ es función par: $b_n = 0$, $\pi a_0 = 2\int_0^\pi \cos ax dx = \frac{2\sin\pi a}{a}$, $a_0 = \frac{2\sin\pi a}{\pi a}$, $\pi a_n = 2\int_0^\pi \cos ax\cos nx dx = \frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} + \frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}$. Para n impar: $a_n = \frac{-\sin a\pi}{\pi}\frac{2a}{a^2-n^2}$. Para n par: $a_n = \frac{\sin a\pi}{\pi}\frac{2a}{a^2-n^2}$. Por tanto: $\cos ax = \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2} + \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-a^2}\right]$.

W 33- Desarrollar en serie de Fourier la función $y = x$, en el intervalo $0 < x < 2\pi$.

Solución: $\pi a_0 = \int_0^{2\pi} xdx = 2\pi^2$, $a_0 = 2\pi$. Por ser $y = x$ función impar, se tiene: $a_n = 0$. Como: $\pi b_n = \int_0^{2\pi} x\sin nx dx = \left|-\frac{x\cos nx}{n}\right|_0^{2\pi} + \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|_0^{2\pi} = \frac{-2\pi}{n}$, $b_n = \frac{-2}{n}$. Por tanto, el desarrollo pedido es: $y = \pi - 2\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$.

W 34- Desarrollar en serie de Fourier la función $y = e^x$, en el intervalo $0 < x < 2\pi$.

Solución: $\pi a_0 = \int_0^{2\pi} e^x dx = e^{2\pi}-1$, $a_0 = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}$, $\pi a_n = \int_0^{2\pi} e^x\cos nx dx$, $\pi b_n = \int_0^{2\pi} e^x \sin nx dx$. Luego: $\pi(a_n+ib_n) = \int_0^{2\pi} e^{(1+ni)x}dx = \left|\frac{e^{(1+ni)x}}{1+ni}\right|_0^{2\pi} = \frac{1-ni}{\pi(n^2+1)}(e^{2\pi}-1)$. De donde se obtiene que: $a_n = \frac{1}{\pi(n^2+1)}(e^{2\pi}-1)$, $b_n = \frac{-n}{\pi(n^2+1)}(e^{2\pi}-1)$. Por tanto, el desarrollo de la función $y = e^x$ es el siguiente: $y = \frac{e^{2\pi-1}}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n^2+1} - \sum_1^\infty \frac{n\sin nx}{n^2+1}\right]$.

W 35- Hallar el valor de $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}$, mediante el desarrollo en serie de Fourier, de la función $y = |x|$.

Solución: Los coeficientes del desarrollo pedido vienen dados por: $\pi a_0 = \int_0^\pi xdx = \frac{\pi^2}{2}$, $a_0 = \frac{\pi}{2}$,

$$\pi a_n = 2\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \left|\frac{2x\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} + \left|\frac{2\cos nx}{n^2}\right|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2}[(-1)^n - 1] = \frac{2}{n^2}(-2) = \frac{-4}{(2k+1)^2}.$$

Luego: $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. Para $x = 0$, se tiene: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

W 36- Desarrollar en serie de Fourier $y = -x - \pi$, en el intervalo $0, 2\pi$.

Solución: Los coeficientes son: $\pi a_0 = \int_0^{2\pi}(-x-\pi)dx = \left|-\frac{x^2}{2} - \pi x\right|_0^{2\pi} = -4\pi^2$, $a_0 = -4\pi$, $\pi a_n = \int_0^{2\pi}(-x-\pi)\cos nx dx = 0$, $a_n = 0$, $\pi b_n = \int_0^{2\pi}(-x-\pi)\sin nx dx = \frac{2\pi}{n}$, $b_n = \frac{2}{n}$. Luego el desarrollo pedido es: $y = -2\pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

W 37- Desarrollar en serie de Fourier $y = x^2$, en el intervalo $-2\pi, 0$.

Solución: $\pi a_0 = \int_{-2\pi}^{0} x^2 dx = \frac{8\pi^3}{3}$, $a_0 = \frac{8\pi^2}{3}$, $\pi a_n = \int_{-2\pi}^{0} x^2\cos nx dx = \frac{4\pi}{n^2}$, $a_n = \frac{4}{n^2}$, $b_n = 0$, por ser $y = x^2$ función par. El desarrollo pedido es: $y = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos nx}{n^2}$.

W 38- Dada $\varphi(a,b) = \int_b^{\infty}\frac{dx}{(x+b)\sqrt{x^2+a^2-b^2}}$, hallar con error $\varepsilon < 0,001$, por el método de Newton, la raíz de la ecuación $f(x) = x\varphi(x,1) - \frac{x}{2} = 0$.

Solución: Haciendo el cambio: $x + b = \frac{1}{z}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$, $\varphi(a,b) = \int_{\frac{1}{2b}}^{0}\frac{-dz}{\sqrt{z^2(a^2-b^2)+(1-bz)^2}} =$
$= \int_0^{\frac{1}{2b}}\frac{dz}{\sqrt{a^2z^2 - 2bz + 1}} = \frac{1}{a}\left[\ln\left(z - \frac{b}{a^2} + \sqrt{z^2 - \frac{2bz}{a^2} + \frac{1}{a^2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{2b}} = \frac{1}{a}\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)$. Luego: $\varphi(x,1) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$, $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{2} = 0$. Para $x = 2$, $f(x) > 0$. Para $x = 3$, $f(3) < 0$. Luego: $2 < x < 3$. Derivando: $f' = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}$, $f'' = \frac{-1}{(1+x)^2}$. Como el signo de f'' es negativo, como también el de $f(3)$, se aplica Newton a partir de $x = 3$. Por tanto, se tiene que: $\alpha = -\frac{f(3)}{f'(3)} = -\frac{-0,11371}{-0,25} = -0,45482$, $x = 3 - 0,45482 = 2,54518$. Aplicando la regla de Newton a este valor, se obtiene que: $\beta = -\frac{f(2,54518)}{f'(2,54518)} = -\frac{-0,007001}{-0,217923} = -0,03213$, siendo: $x = 2,54518 - 0,03213 = 2,51305$. El error cometido al tomar $x = 2,513$, es menor que: $\frac{h^2[f'']}{2f'} = 0,0002 < 0,001$.

X 1- Calcular la integral $I = \iint x^2 y \sqrt[3]{1-x^3-y^3}\ dx\ dy$, extendida al área limitada por el contorno $x \geqq 0,\ y > 0,\ x^3+y^3 \leq 1$.

Solución: Realizando el cambio: $x^3 = \alpha,\ dx = \frac{1}{3}\alpha^{\frac{-2}{3}}d\alpha,\ y^3 = \beta,\ dy = \frac{1}{3}\beta^{\frac{-2}{3}}d\beta$, siendo el contorno: $\alpha \geqq 0,\quad \beta > 0,\quad \alpha+\beta \leq 1$. Por tanto, la integral doble queda: $I = \iint \alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}(1-\alpha-\beta)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}\alpha^{\frac{-2}{3}}\beta^{\frac{-2}{3}}d\alpha d\beta = \frac{1}{9}\iint \beta^{\frac{-1}{3}}(1-\alpha-\beta)^{\frac{1}{3}}d\alpha d\beta$. Haciendo un nuevo cambio: $\alpha = (1-\beta)\theta,\ d\alpha = (1-\beta)d\theta,\ I = \frac{1}{9}\iint \beta^{\frac{-1}{3}}(1-\theta)^{\frac{1}{3}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}(1-\beta)d\theta d\beta =$ $= \frac{1}{9}\iint \beta^{\frac{-1}{3}}(1-\theta)^{\frac{1}{3}}(1-\beta)^{\frac{4}{3}}d\theta d\beta = \frac{1}{9}\int_0^1 \beta^{\frac{-1}{3}}(1-\beta)^{\frac{4}{3}}d\beta\int_0^1(1-\theta)^{\frac{1}{3}}d\theta$. Aplicando Dirichlet:

$$I = \frac{1}{9}\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{7}{3})}{\Gamma(3)}\frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{7}{3})} = \frac{\frac{1}{3}\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{2} = \frac{\pi}{54\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{27\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{81}.$$

X 2- Calcular $I = \iiint x^2y^2z\ dx\ dy\ dz$ extendida a la porción de cono $x^2+y^2 = xz$, comprendida entre los planos $z = 0,\ z = C$.

Solución: Para pasar a coordenadas cilíndricas se hace el siguiente cambio: $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega,\ \rho^2 = \rho z\cos\omega,\ \rho = z\cos\omega,\ dxdy = \rho d\rho d\omega$, quedando la integral triple como sigue:

$$I = \iiint \rho^2\cos^2\omega\rho^2\sin^2\omega z\rho d\rho d\omega dz = 2\int_0^C zdz\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\omega\cos^2\omega d\omega\int_0^{z\cos\omega}\rho^5 d\rho =$$

$$= \frac{2}{6}\int_0^C zdz\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\omega\cos^2\omega z^6\cos^6\omega d\omega = \frac{1}{3}\int_0^C z^7dz\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\omega\cos^8\omega d\omega = \frac{1}{3}\int_0^C z^7dz\frac{1}{2}B\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right) =$$

$= \frac{1}{3}\frac{C^8}{8}\frac{1}{2}B\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$. Por tanto: $I = \frac{C^8}{3\cdot 2^4}\frac{\Gamma(\frac{9}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(6)} = \frac{7C^8\pi}{3\cdot 2^{12}} = \frac{7C^8\pi}{12.288}$.

X 3- Determinar la función $\varphi(x)$ de manera que $\varphi(0) = 1$, y que la integral de superficie $I = \iint_S (x^2+1)\varphi(x)dydz + 2xy\varphi(x)dzdx - 3xdxdy$, extendida a una porción de superficie S limitada por una curva C, dependa de C y no de S. Dar la expresión de I en forma de integral curvilínea, tanteando las funciones correspondientes.

Solución: Aplicando Gauss-Ostrogradski: $I = \oint\left[2x\,\varphi(x) + (1+x^2)\varphi'(x) + 2x\varphi(x)\right]dxdydz$. Igualando a cero el integrando, se tiene: $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{-4x}{1+x^2}$. Luego: $\ln\varphi(x) = -2\ln(x^2+1)+C$, $\varphi(x) = \frac{C}{(1+x^2)^2}$. Para $\varphi(0) = 1,\ C = 1$. Por tanto, la integral del enunciado queda: $I = \iint_S \frac{1}{x^2+1}dydz + \frac{2xy}{(x^2+1)^2}dzdx - 3xdxdy$. Aplicando Stokes, se tiene la siguiente expresión: $\oint Pdx+Qdy+Rdz = \iint(\frac{\delta R}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta z})dydz + (\frac{\delta P}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta x})dzdx + (\frac{\delta Q}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta y})dxdy$. Igualando los coeficientes se tiene que: $\frac{\delta R}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta z} = \frac{1}{x^2+1},\ \frac{\delta P}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta x} = \frac{2xy}{(x^2+1)^2},\ \frac{\delta Q}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta y} = -3x$. Haciendo: $P = f(x)$, se tiene: $\frac{\delta P}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta x} = 0-\frac{\delta R}{\delta x} = \frac{2xy}{(x^2+1)^2}$. Luego: $R = \frac{y}{x^2+1}+\chi(y,z)$. De la misma manera: $\frac{\delta Q}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}-0 = -3x$. Luego: $Q = -\frac{3}{2}x^2+\psi(y,z)$. Como: $\frac{\delta R}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta z} = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}+\chi'_y(y,z)-\psi'_z(y,z)$, se tiene que: $\chi'_y(y,z) = \psi'_z(y,z)$. Por tanto:

$I = \oint f(x)dx + \left[-\frac{3}{2}x^2 + \psi(y,z)\right]dy + \left[\frac{y}{x^2+1} + \chi(y,z)\right]dz$, sabiendo que: $\chi'_y(y,z) = \psi'_z(y,z)$. En particular, para $\chi(y,z) = \psi(y,z) = 0$, se tiene que: $I = \oint f(x)dx - \frac{3}{2}x^2dy + \frac{y}{x^2+1}dz$.

X 4- Se considera la integral $I = \iint_S (1+x^2)\varphi(x)dydz + 2xy\varphi(x)dzdx - 3zdxdy$, extendida a una porción de superficie limitada por una curva cerrada C. Determinar $\varphi(x)$, nula para $x = 0$, de forma que I no dependa más que del contorno C. Demostrar que en este caso I es igual a $J = \oint \frac{2x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}yzdx - \frac{x(x^2+3)}{x^2+1}zdy$, a lo largo de C. Calcular el valor de I, cuando C es la circunferencia $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$.

Solución: Aplicando Gauss-Ostrogradski: $I = \oint\left[2x\,\varphi(x) + (1+x^2)\varphi'(x) + 2x\varphi(x) - 3\right]dxdydz$. Igualando a cero el integrando, se tiene la ecuación diferencial lineal: $(1+x^2)\varphi'(x) + 4x\varphi(x) - 3 = 0$, cuya solución es: $\varphi(x) = \frac{x^3+3x+A}{(1+x^2)^2}$. Para $\varphi(0) = 0$, $A = 0$. Por tanto se tiene: $\varphi(x) = \frac{x^3+3x}{(1+x^2)^2}$. Luego: $I = \iint_S \frac{x^3+3x}{x^2+1}dydz + \frac{2xy(x^3+3x)}{(x^2+1)^2}dzdx - 3zdxdy$. Aplicando Stokes a J, se tiene que: $P = \frac{2x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}yz$, $Q = -\frac{x(x^2+3)}{x^2+1}z$, $R = 0$. Igualando coeficientes, se tienen las ecuaciones: $\frac{\delta R}{\delta y} - \frac{\delta Q}{\delta z} = \frac{x(x^2+3)}{x^2+1}$, $\frac{\delta P}{\delta z} - \frac{\delta R}{\delta x} = \frac{2x^2(x^2+3)y}{(x^2+1)^2}$, $\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} = \frac{-3(x^2+1)^2 + 2x^2(x^2+3) - 2x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}z = -3z$. Por tanto se tiene que: $J = \iint \frac{x(x^2+3)}{x^2+1}dydz + \frac{2xy(x^3+3x)}{(x^2+1)^2}dzdx - 3zdxdy = I$. Haciendo el cambio: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, siendo por tanto, $dz = 0$, se tiene: $I = \iint -3zdxdy = -3\iint dxdy = -3\iint \rho d\rho d\omega =$ $= -3\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^1 \rho d\rho = -3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = -3\pi$.

X 5- Calcular la integral $I = \iint_T (x-y)dxdy$, siendo T la porción del plano del primer cuadrante comprendido entre la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y la circunferencia $x^2+y^2 = R^2$, siendo $R < b < a$.

Solución: Siendo OAB la porción del plano del primer cuadrante limitada por la elipse, se tiene:

$$I_{OAB} = \iint_{OAB}(x-y)dxdy = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} (x-y)dy = \int_0^a dx \left| xy - \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \int_0^a \left[x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{b^2}{2a^2}(a^2-x^2)\right]dx = \int_0^a \frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\,dx - \int_0^a \frac{b^2}{2a^2}(a^2-x^2)dx =$$

$= \left|\frac{-b}{3a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^a - \left|\frac{b^2}{2a^2}\left(a^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\right|_0^a = \frac{ab((a-b)}{3}$. Siendo OMN la porción del plano del primer cuadrante limitada por la circunferencia definida en el enunciado, se tiene:

$$I_{OMN} = \iint_{OMN}(x-y)dxdy = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (x-y)dy = \int_0^R \left| xy - \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} dx =$$

$= \int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\,dx - \int_0^R \frac{1}{2}(R^2-x^2)dx = 0$. Por tanto: $I = \iint_{OAB} - \iint_{OMN} = \frac{ab((a-b)}{3}$.

X 6- Por un punto M exterior a un círculo C de centro O y radio R, se trazan las dos tangentes al círculo que se cortan formando un ángulo θ. Calcular la integral $I = \iint(\theta - \sin\theta)\,dx\,dy$, extendida a la región exterior a C.

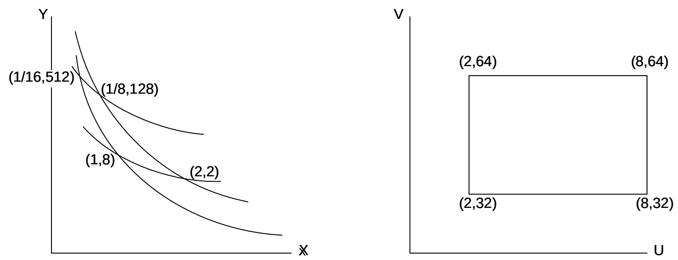
Solución: Siendo: $\rho = OM$, se tienen las siguientes relaciones: $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{R}{\rho}$, $\theta = 2\arcsin\dfrac{R}{\rho}$, $\sin\theta = 2\dfrac{R}{\rho}\sqrt{1-\dfrac{R^2}{\rho^2}} = \dfrac{2R}{\rho^2}\sqrt{\rho^2-R^2}$. Por tanto, siendo: $dxdy = \rho d\rho d\omega$, se tiene que:

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_R^{\infty}\left(2\arcsin\frac{R}{\rho} - \frac{2R}{\rho^2}\sqrt{\rho^2-R^2}\right)\rho d\rho d\omega = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\int_R^{\infty}\left(\arcsin\frac{R}{\rho} - \frac{R}{\rho^2}\sqrt{\rho^2-R^2}\right)\rho d\rho =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\rho^2}{2}\arcsin\frac{R}{\rho} + \frac{R}{2}\sqrt{\rho^2-R^2} - R\sqrt{\rho^2-R^2} + R^2\operatorname{arcsec}\frac{R}{\rho}\right|_R^{\infty} d\omega = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2\pi}{4}d\omega = \pi^2R^2.$$

X 7- Calcular la integral $I = \iint y\ dx\ dy$, extendida al cuadrilátero determinado por las curvas cuyas ecuaciones son: $x^2y = 2$, $x^2y = 8$, $x^3y^2 = 32$, $x^3y^2 = 64$.

Solución:



Haciendo el cambio: $x^2y = u$, $x^3y^2 = v$, se tiene: $x = \dfrac{u^2}{v}$, $y = \dfrac{v^2}{u^3}$, siendo el jacobiano de la transformación: $J = \begin{vmatrix} \dfrac{2u}{v} & -\dfrac{u^2}{v^2} \\ \dfrac{-3v^2}{u^4} & \dfrac{2v}{u^3} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{u^2}$. Por tanto la integral pedida, en función de u y v, es: $I = \iint \dfrac{v^2}{u^3}\dfrac{1}{u^2}dudv = \displaystyle\int_{32}^{64} v^2dv\int_2^8 u^{-5}du = \int_{32}^{64} v^2\left|-\frac{1}{4}u^{-4}\right|_2^8 dv = \left|\frac{1}{3}v^3\right|_{32}^{64}\cdot\left|-\frac{1}{4}u^{-4}\right|_2^8 = 1.190.$

Nota: Las gráficas representan las correspondientes curvas sin mantener ninguna escala.

X 8- Calcular la siguiente integral curvilínea, transformándola previamente en integral doble, $I = \oint(e^x\cos y + xy^2)dx - (e^x\sin y + x^2y)dy$, tomada en el sentido positivo a lo largo de la lemniscata $\rho^2 = \cos 2\theta$, comprendida en el ángulo positivo de los ejes.

Solución: La integral dada se descompone en suma de dos integrales curvilíneas: $I = \oint e^x\cos ydx - e^x\sin ydy + \oint xy^2dx - x^2ydy = I_1 + I_2$. El integrando de la integral curvilínea I_1 corresponde a la diferencial total de $u = e^x\cos y$. Por lo tanto se tiene que: $I_1 = u(1) - u(0) = u(1,0) - u(0.0) = e - 1$. Pasando a polares la integral curvilínea I_2, se tiene:

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\left[-\rho^3\sin^2\theta\cos\theta\left(\rho\sin\theta + \frac{\sin 2\theta\cos\theta}{\rho}\right) - \rho^3\sin\theta\cos^2\theta\left(\rho\cos\theta - \frac{\sin\theta\sin 2\theta}{\rho}\right)\right]d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} -\rho^4\sin\theta\cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\sin 2\theta d\theta = \frac{1}{12}\left|-\cos^3 2\theta\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{12}.$$

Por tanto: $I = I_1 + I_2 = e - 1 + \dfrac{1}{12} = e - \dfrac{11}{12}$.

X 9- Calcular la integral $I = \iiiint dx\ dy\ dz\ du$, extendida al dominio limitado por las dos superficies $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2$, siendo $a > b$.

Solución: Calculando primero la integral relacionada con: $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2 + (\frac{z}{a})^2 + (\frac{u}{a})^2 = 1$, haciendo el cambio: $\frac{x}{a} = \alpha^{\frac{1}{2}}$, etc., se tiene: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$, $dx = \frac{a}{2}\alpha^{\frac{-1}{2}}d\alpha, \ldots$ Luego: $I_1 = \iiiint dxdydzdu$, extendida al dominio limitado por la superficie: $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2$, es igual a: $2^4 \iiiint \frac{a^4}{16}\alpha^{-\frac{1}{2}}\beta^{-\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{2}}\delta^{-\frac{1}{2}}d\alpha d\beta d\gamma d\delta$, extendida al dominio limitado por la superficie: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$. Luego: $I_1 = \frac{2^4 a^4}{16} \frac{\Gamma^4(\frac{1}{2})}{\Gamma(4 \cdot \frac{1}{2} + 1)} = \frac{a^4\pi^2}{2}$. Procediendo análogamente con $I_2 = \iiiint dxdydzdu$, extendida al dominio limitado por la superficie: $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2$, se tiene: $I_2 = 2^4 \iiiint \frac{b^4}{16}\alpha^{-\frac{1}{2}}\beta^{-\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{2}}\delta^{-\frac{1}{2}}d\alpha d\beta d\gamma d\delta$, extendida al dominio limitado por la superficie: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$. Luego: $I_2 = \frac{2^4 b^4}{16} \frac{\Gamma^4(\frac{1}{2})}{\Gamma(4 \cdot \frac{1}{2} + 1)} = \frac{b^4\pi^2}{2}$. Por tanto la integral pedida es: $I = I_1 - I_2 = \frac{\pi^2(a^4 - b^4)}{2}$.

X 10- Calcular la integral $I = \iiint (ax + by + cz)^2 dxdydz$, extendida al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Solución: Haciendo el cambio: $\frac{x}{a} = \alpha$, $\frac{y}{b} = \beta$, $\frac{z}{c} = \gamma$, la integral triple dada queda: $I = 8abc \iiint_T (a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma)^2 d\alpha d\beta d\gamma$, extendida al primer octante de la esfera: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Como la distancia del punto (α, β, γ) al plano $a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0$, viene dada por la fórmula: $d = \frac{|a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma|}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4}}$, resulta que: $(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma)^2 = d^2(a^4 + b^4 + c^4)$. Luego: $I = 8abc(a^4 + b^4 + c^4) \iiint_T d^2 d\alpha d\beta d\gamma$. Tratándose de una esfera con centro el origen, y fijando a estos efectos que, por ejemplo, $d^2 = \gamma^2$, el correspondiente valor de I viene dado por: $I = 8abc(a^4 + b^4 + c^4) \iiint_T \gamma^2 d\alpha d\beta d\gamma = 8abc(a^4 + b^4 + c^4)\frac{1}{8}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} =$
$= \frac{4\pi}{15}abc(a^4 + b^4 + c^4)$.

X 11- Calcular la integral $I = \oint (y - z)\ dx + (z - x)\ dy + (x - y)\ dz$, a lo largo de los lados de un triángulo ABC cuyos vértices están cada uno de ellos, sobre uno de los ejes coordenados.

Solución: Sean los vértices: $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$. Descomponiendo I en tres integrales curvilíneas $(I = I_1 + I_2 + I_3)$, se tiene:

$$I_1 = \oint (y - z)\ dx = \int_0^a b(1 - \frac{x}{a})\ dx - \int_a^0 c(1 - \frac{x}{a})\ dx = (b + c)\frac{a}{2},$$

$$I_2 = \oint (z - x)\ dy = -\int_b^0 a(1 - \frac{y}{b})\ dy + \int_0^b c(1 - \frac{y}{b})\ dy = (a + c)\frac{b}{2},$$

$$I_3 = \oint (x - y)\ dz = \int_0^c a(1 - \frac{z}{c})\ dz - \int_c^0 b(1 - \frac{z}{c})\ dz = (b + a)\frac{c}{2}.$$

Luego: $I = I_1 + I_2 + I_3 = ab + ac + bc$.

X 12- Calcular la integral curvilínea $I = \oint y^2\ dx - x^2\ dy$, extendida a lo largo de $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante.

Solución: Haciendo el cambio: $x = \cos t$, $y = \sin t$, se tiene:

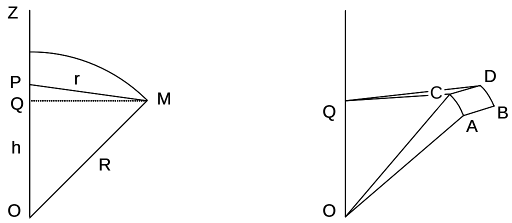
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 t \sin t\, dt) - (\cos^2 t \cos t)\, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t)\, dt = -\frac{2 \cdot 2!!}{3!!} = -\frac{4}{3}.$$

X 13- Calcular la integral curvilínea $I = \oint y^2 \; dx - x^2 \; dy,$ extendida a lo largo de la cuerda determinada en el primer cuadrante, por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y los ejes coordenados.

Solución: En el sentido del reloj, la cuerda va desde el punto $(0,1)$ al punto $(1,0)$. Haciendo el cambio: $x = 1 - t,\ y = t,$ la cuerda va desde $t = 1$ a $t = 0$. Por tanto, el valor de la integral dada es: $I = \int_1^0 [-t^2 dt] - \left[(1-t)^2 dt\right] = -\int_1^0 (2t^2 - 2t + 1) dt = -\left| \frac{2}{3} t^3 - t^2 + t \right|_1^0 = \frac{2}{3}.$

X 14- Dada la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ y un punto P sobre el eje OZ a una distancia $h < 1$ del centro $O,$ se designa por r la distancia de un punto cualquiera de la esfera a P. Calcular la integral $I = \iint \frac{d\sigma}{r^4},$ extendida a toda la superficie esférica, siendo $d\sigma$ el elemento de área de la esfera.

Solución:



Sea M un punto de la superficie esférica de radio $R = 1,$ y sea θ el ángulo POM. La distancia $PM = r,$ viene dada por: $r^2 = h^2 + R^2 + 2h\cos\theta = h^2 + 1 + 2h\cos\theta$. El elemento $d\sigma = ABCD,$ de área de la esfera, tiene por base $AB = R\sin\theta d\varphi$ y por altura $AC = Rd\theta,$ siendo $d\theta$ el ángulo $AOC,$ y $d\varphi$ el ángulo CQD (Q es la proyección de M sobre OZ). Es decir: $d\sigma = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \sin\theta d\theta d\varphi$. La superficie de un elemento de rodaja de la zona esférica corresponde a $\varphi = 2\pi,$ es decir: $\sin\theta d\theta 2\pi$. Por tanto, el valor pedido es:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{2\pi \sin\theta \, d\theta}{(h^2 + 1 + 2h\cos\theta)^2} = \left| \frac{2\pi}{2h(h^2 + 1 + 2h\cos\theta)} \right|_0^{\pi} = \frac{4\pi}{(1 - h^2)^2}.$$

X 15- Dada la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ y un punto P sobre el eje OZ a una distancia $h < 1$ del centro $O,$ se designa por r la distancia de un punto cualquiera de la esfera a P. Calcular la integral $I = \iint \frac{d\sigma}{r^4},$ extendida a la porción de superficie esférica interior al cilindro $x^2 + y^2 - x = 0,$ siendo $d\sigma$ el elemento de área de la esfera.

Solución: Sea M un punto de la superficie esférica y θ el ángulo POM. La distancia $PM = r,$ viene dada por: $r^2 = h^2 + 1 + 2h\cos\theta$. El cilindro es perpendicular al plano $z = 0,$ siendo su sección por este plano una circunferencia que pasa por el origen y es tangente interior a la circunferencia sección de la esfera por dicho plano. Por tanto, la integral doble pedida es:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\varphi} \frac{2\sin\theta d\theta}{(h^2 + 1 + 2h\cos\theta)^2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}+\varphi}^{\pi} \frac{2\sin\theta d\theta}{(h^2 + 1 + 2h\cos\theta)^2} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{2}{h(h^2 + 1 + 2h\cos\theta)} \right|_0^{\varphi} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{2}{h(h^2 + 1 + 2h\cos\theta)} \right|_{\frac{\pi}{2}+\varphi}^{\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{2}{h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{h^2 + 1 + 2h\cos\theta} - \frac{1}{(h+1)^2} \right] d\varphi + \frac{2}{h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{(h-1)^2} - \frac{1}{h^2 + 1 - 2h\sin\theta} \right] d\varphi =$$

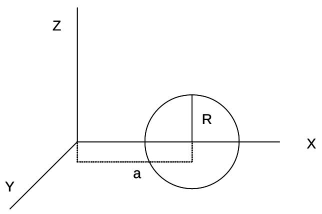
$$= \frac{2}{1 - h^2} \left(\frac{\pi}{1 - h^2} - \frac{2}{h} \arctan h \right).$$

X 16- Se dan las siguientes dos integrales definidas: $A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\cos x^2 dx,\ B = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\sin x^2 dx,$ (a es una constante positiva no nula), demostrar que: $A^2 - B^2 = I = \iint e^{-a(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy,$ $2AB = J = \iint e^{-a(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$ (ambas integrales dobles extendidas a todo el plano). Calcular dichas integrales dobles y hallar el valor de A y B.

Solución: $A + Bi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{ix^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{(-a+i)x^2}dx = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{a-i}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a-i}}$. Luego se tiene que: $(A+Bi)^2 = A^2 - B^2 + 2ABi = \dfrac{\pi}{a-i} = \dfrac{\pi(a+i)}{a^2+1}$. Por tanto: $A^2 - B^2 = \dfrac{\pi a}{a^2+1},\ 2AB = \dfrac{\pi}{a^2+1}$. Para calcular I y J se hace el cambio: $x^2+y^2 = \rho^2 = t,$ con lo que se tiene que: $I = \iint e^{-a(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-a\rho^2}\cos(\rho^2)\rho d\rho d\varphi = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-at}\cos t\dfrac{1}{2}dtd\varphi = \dfrac{\pi a}{a^2+1} =$ $= A^2 - B^2$. Procediendo de la misma manera con la integral J, se tiene: $J = \iint e^{-a(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-a\rho^2}\sin(\rho^2)\rho d\rho d\varphi = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-at}\sin t\dfrac{1}{2}dtd\varphi = \dfrac{\pi}{a^2+1} =$ $= 2AB$. Resolviendo el sistema: $A^2 - B^2 = \dfrac{\pi a}{a^2+1},\ 2AB = \dfrac{\pi}{a^2+1},$ se tienen los valores pedidos: $A = \sqrt{\dfrac{\pi\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)}{2(a^2+1)}}$, $B = \sqrt{\dfrac{\pi\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)}{2(a^2+1)}}$.

X 17- Pasar a coordenadas cilíndricas, y resolver la integral $I = \iiint(x^2+y^2)\ dx\ dy\ dz,$ que representa el momento de inercia de un toro circular respecto al eje OZ. Se supone que el plano XOY pasa por el centro del círculo generador, siendo a la distancia del origen a su centro y R el radio.

Solución:



La ecuación del círculo generador es: $(x-a)^2 + z^2 = R^2$. Las ecuaciones del paso a cilíndricas son: $x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta,\quad z = z.$ Luego: $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$ Por tanto: $I = 8\iiint \rho^3\ d\rho d\theta dz = 8\int_0^R dz\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{a-\sqrt{R^2-z^2}}^{a+\sqrt{R^2-z^2}} \rho^3 d\rho = \dfrac{\pi^2 aR^2}{2}(4a^2+3R^2).$

X 18- Calcular la integral $I = \iint x\ dx\ dy,$ extendida a la parte del círculo $x^2+y^2 \leq R^2,$ situada a la derecha del eje OY.

Solución: Haciendo el cambio: $(\frac{x}{R})^2 = \alpha,\ x = R\alpha^{\frac{1}{2}},\ dx = \dfrac{R}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}d\alpha,\ (\frac{y}{R})^2 = \beta,\ y = R\beta^{\frac{1}{2}},$ $dy = \dfrac{R}{2}\beta^{-\frac{1}{2}}d\beta,\ \alpha+\beta \leq 1,$ se tiene: $I = \iint \dfrac{R^3}{4}\beta^{-\frac{1}{2}}d\alpha d\beta = \dfrac{R^3}{4}\dfrac{\Gamma(1)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \dfrac{2R^3}{3}.$

X 19- Calcular la integral $I = \iiint(x^2+y^2+z^2)\ dx\ dy\ dz,$ extendida al primer octante y limitada por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Solución: Haciendo el cambio: $\frac{x}{a} = \alpha,\ \frac{y}{b} = \beta,\ \frac{z}{c} = \gamma,$ se tiene que la integral pedida es: $I = abc\iiint(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)d\alpha d\beta d\gamma,$ con: $\alpha+\beta+\gamma = 1.$ El valor de esta integral es: $I = abc\left[a^2\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4)} + b^2\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4)} + c^2\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4)}\right] = \frac{abc}{3}(a^2+b^2+c^2).$

X 20- Calcular la integral $I = \int_0^\infty \frac{vx^{a-1}}{x^2+v^2}\sin(\frac{a\pi}{2} - bx)\,dx,$ sabiendo que, $x < a < 2,\ v > 0,\ b > 0.$

Solución: Siendo: $\sin(\frac{a\pi}{2} - bx) = \sin\frac{a\pi}{2}\cos bx - \cos\frac{a\pi}{2}\sin bx,$ se tiene que la integral dada es: $I = v\sin\frac{a\pi}{2}\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{x^2+v^2}\cos bxdx - v\cos\frac{a\pi}{2}\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{x^2+v^2}\sin bxdx = v\sin\frac{a\pi}{2}C - v\cos\frac{a\pi}{2}S,$ siendo: $C = \int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{x^2+v^2}\cos bxdx,\ S = \int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{x^2+v^2}\sin bxdx.$ Por tanto se tiene: $C+iS = \int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{x^2+v^2}e^{bxi}dx =$ $= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^{a-1}}{z^2+v^2}e^{bzi}dz.$ En esta integral, $z = 0$ es un punto singular esencial, y $z = \pm vi$ son polos, estando $z = vi$ en el semiplano superior. Luego el residuo de la integral vale: $R = \lim_{z\to vi}\frac{z^{a-1}e^{bzi}}{z^2+v^2}(z-vi) = \frac{1}{2}v^{a-2}i^{a-2}e^{-bv}.$ Por tanto: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^{a-1}}{z^2+v^2}e^{bzi}dz = 2\pi i\frac{1}{2}v^{a-2}i^{a-2}e^{-bv} =$ $= \pi v^{a-2}i^{a-1}e^{-bv} = \pi v^{a-2}e^{\frac{\pi}{2}(a-1)i}e^{-bv}.$ Luego: $C+iS = \frac{\pi}{2}v^{a-2}e^{-bv}\left[\cos(a-1)\frac{\pi}{2} + i\sin(a-1)\frac{\pi}{2}\right].$ De donde se obtiene: $C = \frac{\pi}{2}v^{a-2}e^{-bv}\cos(a-1)\frac{\pi}{2},\ S = \frac{\pi}{2}v^{a-2}e^{-bv}\sin(a-1)\frac{\pi}{2}.$ El valor de la integral dada es: $I = v\sin\frac{a\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}v^{a-2}e^{-bv}\cos(a-1)\frac{\pi}{2} - v\cos\frac{a\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}v^{a-2}e^{-bv}\sin(a-1)\frac{\pi}{2} =$ $= \frac{\pi}{2}v^{a-1}e^{-bv}\left[\cos(a-1)\frac{\pi}{2}\sin\frac{a\pi}{2} - \sin(a-1)\frac{\pi}{2}\cos\frac{a\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}v^{a-1}e^{-bv}\sin(\frac{a\pi}{2} - \frac{a\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) =$ $= \frac{\pi}{2}v^{a-1}e^{-bv}.$

X 21- Se considera un rectángulo de lados a y b, referido a un punto cualquiera del plano y a dos ejes rectangulares que pasan por ese punto, y la recta $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho = 0.$ Se llama l a la longitud de esta recta comprendida entre los lados del rectángulo. Hallar el valor de la integral $I = \iint l\,d\alpha\,d\beta,$ cuando la recta toma todas las posiciones posibles que cortan a los lados del rectángulo.

Solución: La ecuación de la recta indica que la distancia del origen a la recta es $|\rho|$ siendo su pendiente: $-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot(-\alpha) = \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha).$ Trasladando los ejes y girándolos hasta que coincidan con los lados del rectángulo, los vértices de éste son: $O(0,0),\ A(a,0),\ B(0,b),\ C(a,b).$ El valor de l corresponde a la distancia entre los puntos de corte de la recta dada con los ejes, es decir entre los puntos $(0,\frac{\rho}{\sin\alpha})$ y $(\frac{\rho}{\cos\alpha},\ 0).$ Luego: $l = \sqrt{(\frac{\rho}{\sin\alpha})^2 + (\frac{\rho}{\cos\alpha})^2} = \frac{\rho}{\sin\alpha\cos\alpha}.$ Por tanto: $I = \iint_R\frac{\rho}{\sin\alpha\cos\alpha}d\alpha d\beta,$ siendo el recinto R, el formado por las cuatro rectas: $y = 0,\ x = a,\ y = b,\ y = 0,$ es decir: $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \rho < \sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega - \alpha - \frac{\pi}{2}),$ siendo: $\omega = \arctan\frac{b}{a}$ (el ángulo que forma la diagonal del rectángulo con la perpendicular desde el origen a la recta dada, es: $\omega - \alpha - \frac{\pi}{2}$). Luego el valor de la integral doble dada es:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\int_0^{\sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega-\alpha-\frac{\pi}{2})}\rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\frac{1}{2}(a^2+b^2)\cos^2(\omega-\alpha-\frac{\pi}{2}) =$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(\omega-\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin\alpha\cos\alpha}d\alpha =$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2}\left[\sin^2\omega\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot\alpha\, d\alpha + \cos^2\omega\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\alpha\, d\alpha + \sin 2\omega\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha\right] =$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2}\pi\sin\omega\cos\omega = \frac{a^2+b^2}{2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\pi}{2}ab.$$

X 22- Calcular la integral $I = \iint xy\dfrac{\delta^4 f(x,\ y)}{\delta x^2\delta y^2}\,dx\,dy,$ en el recinto $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b.$

Solución: La integral doble dada es: $I = \int_0^b ydy\int_0^a xf_{2,2}^{(4}(x,y)dx = \int_0^b\Big[f_{1,2}'''(x,y)x - \int f_{1,2}'''(x,y)dx\Big]_0^a ydy =$

$$= \int_0^b [f_{1,2}'''(a,y)a - f_{0,2}''(a,y) + f_{0,2}''(0,y)]ydy = \int_0^b f_{1,2}'''(a,y)aydy - \int_0^b f_{0,2}''(a,y)ydy + \int_0^b f_{0,2}''(0,y)ydy =$$

$= A - B + C,$ El cálculo de estas tres integrales es el siguiente:

$$A = \int_0^b f_{1,2}'''(a,y)aydy = |af_{1,1}''(a,y)y|_0^b - a\int_0^b f_{1,1}''(a,y)dy = abf_{1,1}''(a,b) - |af_{1,0}'(a,y)|_0^b =$$

$$= abf_{1,1}''(a,b) - af_{1,0}'(a,b) + af_{1,0}'(a,0),$$

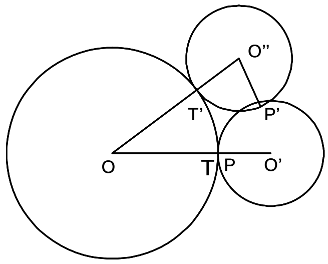
$$B = \int_0^b f_{0,2}''(a,y)ydy = |f_{0,1}'(a,y)y|_0^b - \int_0^b f_{0,1}'(a,y)dy = bf_{0,1}'(a,b) - f(a,b) + f(a,0),$$

$$C = \int_0^b f_{0,2}''(0,y)ydy = |f_{0,1}'(0,y)y|_0^b - \int_0^b f_{0,1}'(0,y)dy = bf_{0,1}'(0,b) - f(0,b) + f(0,0).$$

$$I = abf_{1,1}''(a,b) - af_{1,0}'(a,b) + af_{1,0}'(a,0) - bf_{0,1}'(a,b) + f(a,b) - f(a,0) + bf_{0,1}'(0,b) - f(0,b) + f(0,0) =$$
$$= abf_{xy}''(a,b) - a[f_x'(a,b) - f_x'(a,0)] - b[f_y'(a,b) - f_y'(0,b)] + f(a,b) - f(a,0) - f(0,b) + f(0,0).$$

Y 1- Hallar la longitud de una arcada de epicicloide.

Solución:



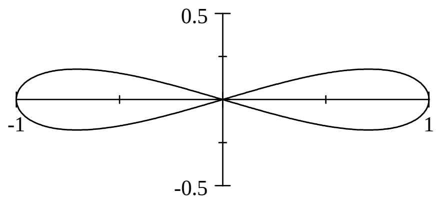
Un punto determinado P de una circunferencia de radio r y centro O', que gira sin deslizamiento sobre otra fija de radio R y centro O, describe una epicicloide. Tomando como eje de las abscisas la recta que une O con P cuando éste se encuentra sobre O, en el punto de tangencia T de las dos circunferencias, y como eje de ordenadas la perpendicular en O al eje OT, se tiene que cuando O' ha girado sobre sí misma un ángulo $\varphi = P'O''T'$, el arco θ formado por TOT' (nuevo punto de tangencia), es $\varphi\frac{r}{R}$. La arcada de epicicloide se completa cuando $\varphi = 2\pi$. Las coordenadas del punto P, en función del ángulo θ, son: $x = (R+r)\cos\theta - r\cos\frac{R+r}{r}\theta$, $y = (R+r)\sin\theta - r\sin\frac{R+r}{r}\theta$. La longitud de la arcada viene dada por: $l = \int\sqrt{x_\theta'^2 + y_\theta'^2}\ d\theta$. Como: $x'_\theta = (R+r)\left(-\sin\theta + \sin\frac{R+r}{r}\theta\right)$, $y'_\theta = (R+r)\left(\cos\theta - \cos\frac{R+r}{r}\theta\right)$, se tiene que:

$$l = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\sqrt{2(R+r)^2(1-\cos\tfrac{R}{r}\theta)}\,d\theta = \sqrt{2}\,(R+r)\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\sqrt{(1-\cos\tfrac{R}{r}\theta)}\,d\theta =$$

$$= \sqrt{2}\,(R+r)\frac{r}{R}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\sqrt{(1-\cos\varphi)}\,d\varphi = \left|-4(R+r)\cos\frac{\varphi}{2}\right|_0^{2\pi} = 8\frac{r}{R}(R+r).$$

Y 2- Hallar la longitud de la curva $8y^2 = x^2(1-x^2)$, así como el área de la superficie de revolución engendrada por la curva al girar alrededor del eje OX.

Solución:



La curva es simétrica respecto a los dos ejes coordenados, cortando al eje OX en $(0,0)$ y $(\pm1,0)$. Por tanto, su longitud es: $L = 4\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Siendo: $y = \sqrt{\dfrac{x^2(1-x^2)}{8}}$, $y'^2 = \dfrac{(1-2x^2)^2}{8(1-x^2)}$, luego:

$L = 4\int_0^1\sqrt{1+\dfrac{(1-2x^2)^2}{8(1-x^2)}}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1\dfrac{2x^2-3}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Haciendo el cambio: $x = \sin t$, se tiene:

$L = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(2\sin^2 t - 3)dt = \pi\sqrt{2}$. El área de la superficie de revolución es: $A = 4\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^1(2x^3-3x)dx = \dfrac{\pi}{2}$.

Y 3- Hallar la longitud a partir del origen de coordenadas, de la curva determinada por la intersección de las dos superficies cuyas ecuaciones son: $(y-x)^2 = 4x,\ 9(z-x)^2 = 4x^3$.

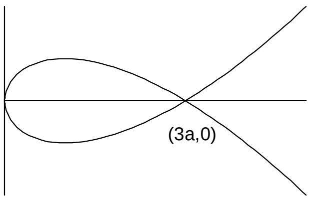
Solución: Siendo: $y = x \pm 2x^{\frac{1}{2}}$, $z = x \pm \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, se tiene: $y'_x = 1 \pm x^{-\frac{1}{2}}$, $z'_x = 1 \pm x^{\frac{1}{2}}$. Por tanto: $dL = \sqrt{1+\left(1\pm x^{-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(1\pm x^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{3\pm 2x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}\pm 2x^{\frac{1}{2}}+x}$. Tomando los dos signos $+$, se tiene: $L = \int_0^x (1+x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})dx = x+2x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Tomando los dos signos $-$, se tiene: $L = \int_0^x (1-x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})dx = x-2x^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Tomando los pares de signos $+,-$ o $-,+$, se obtienen integrales elípticas.

Y 4- Calcular la longitud total de la astroide (hipocicloide) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Solución: La curva es simétrica respecto a los dos ejes, luego su longitud total es: $L = 4\int_0^a \sqrt{1+y'^2}\,dx = 4\int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx = 4\left|\frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right|_0^a = 6a.$

Y 5- Hallar la longitud del lazo de la curva $9ay^2 = x(x-3a)^2$, así como su área.

Solución:



La curva es simétrica respecto al eje OX, luego la longitud pedida es: $L = 2\int_0^{3a}\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\int_0^{3a}\frac{x+a}{2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}dx = 2\left|\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}}+a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right|_0^{3a} = 4\sqrt{3}\,a$. El área viene dada por: $A = 2\int_0^{3a} ydx = 2\int_0^{3a}\frac{(x-3a)x^{\frac{1}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}}dx = \frac{2}{3a^{\frac{1}{2}}}\left|\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2ax^{\frac{3}{2}}\right|_0^{3a} = \frac{8\sqrt{3}}{5}a^2.$

Y 6- Calcular el área de la superficie limitada por el eje OX y la curva cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = a\sin t(15-5\sin^2 t+3\sin^4 t),\ y = 10a\cos^2 t.$

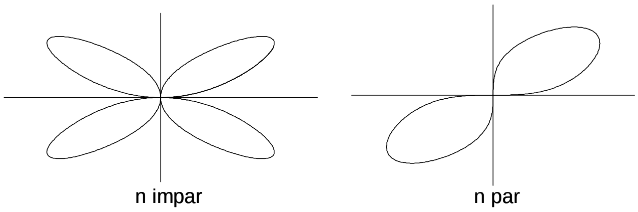
Solución: La curva corta al eje OX en los puntos $(\pm 13a,\ 0)$ para $t = \pm\frac{\pi}{2}$, y al eje OY en el punto $(0, 10a)$ para $t = 0$. La curva es simétrica respecto al eje OY, ocupando los dos primeros cuadrantes para $a > 0$, y los otros dos para $a < 0$. El área pedida viene dada por:

$$A = 2\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} ydx = 2\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} 10a\cos^2 t\cdot 15a\cos t(1-\sin^2 t+\sin^4 t)dt =$$

$$= 300a^2\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}(\cos^7 t-\cos^5 t+\cos^3 t)dt = 300a^2\left(\frac{6!!}{7!!}-\frac{4!!}{5!!}+\frac{2!!}{3!!}\right) = \frac{1240}{7}a^2.$$

Y 7- Calcular el área de la curva $x^{2n} + y^{2n} = a^2(xy)^{n-1}$, siendo n entero y positivo.

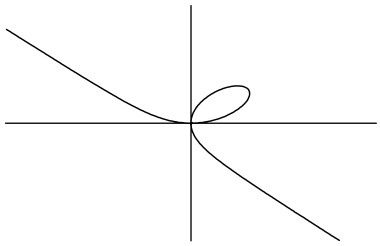
Solución:



Si n es impar, hay curva en los cuatro cuadrantes; si es par, en dos cuadrantes (1º y 3º). Cortando por la recta $y = tx$, se tiene: $x^2 = \dfrac{a^2t^{n-1}}{1+t^{2n}}$. Como: $dA = \dfrac{1}{2}(ydx + xdy) = \dfrac{1}{2}x^2dt$, se tiene que el área de un bucle, contenido en un cuadrante, viene dada por la integral: $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{a^2t^{n-1}}{1+t^{2n}}dt =$ $= \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{a^2}{n}\arctan t^n\right|_0^{\infty} = \dfrac{a^2\pi}{4n}$. Para n impar (cuatro bucles), el área de la curva es: $\dfrac{a^2\pi}{n}$. Para n par (dos bucles), el área de la curva es: $\dfrac{a^2\pi}{2n}$.

Y 8- Calcular el área del bucle de la curva $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (folium de Descartes).

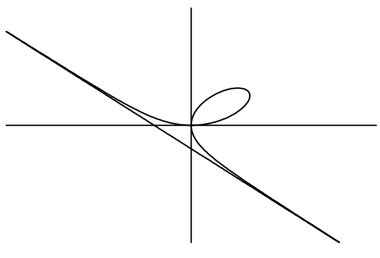
Solución:



Pasando a polares, se tiene: $\rho = \dfrac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$, luego: $A = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{2}\rho^2d\theta =$ $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta + \cos^3\theta)^2}d\theta$. Haciendo el cambio: $\tan\theta = t$, $d\theta = \dfrac{dt}{1+t^2}$, se tiene que el área pedida es: $A = 9a^2\displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^2}{(t^3+1)^2}dt = 9a^2\left|\dfrac{-1}{3(t^3+1)}\right|_0^1 = \dfrac{3}{2}a^2$.

Y 9- Calcular el área de la superficie delimitada por la curva $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (folium de Descartes) y su asíntota.

Solución:



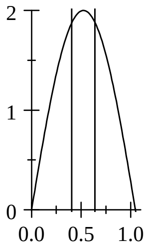
Pasando a polares, se tiene: $\rho = \dfrac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$. La asíntota es: $x + y + a = 0$, y en polares:

$\rho = \frac{-a}{\sin\theta + \cos\theta}$. La mitad del área pedida es: $\frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho_c^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho_a^2\, d\theta$, siendo ρ_a y ρ_c, los radios polares de la curva y de la asíntota respectivamente. Haciendo el cambio: $\tan\theta = t$, $d\theta = \frac{dt}{1+t^2}$, se tiene que el área entre la curva y su asíntota es: $A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho_c^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho_a^2 d\theta\right] = \frac{9a^2}{2}\int_1^{\infty}\left[\frac{t^2}{(t^3+1)^2} - \frac{1}{(t+1)^2}\right]dt =$

$= \frac{9a^2}{2}\left|-\frac{1}{3}(t^3+1)^{-1} + (t+1)^{-1}\right|_1^{\infty} = \frac{3}{2}a^2$ Esta área es igual al área del bucle (ver problema Y 8).

Y 10- Dada la curva $y = 2\sin 3x$, dividir el área de la arcada comprendida entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$, en tres trozos de áreas iguales por medio de dos ordenadas cuyas abscisas se piden con error $< 0{,}001$.

Solución:



El área desde el origen hasta la abscisa x, viene dada por: $A(x) = \int_0^x 2\sin 3x dx = \frac{2}{3}(1-\cos 3x)$. Siendo x_1 y x_2 las abscisas buscadas, se tiene: $\frac{2}{3}(1-\cos 3x_1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(1-\cos 3\frac{\pi}{3}) = \frac{4}{9}$. Luego: $x_1 = \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{3} = 0{,}410$ radianes, $x_2 = \frac{\pi}{3} - 0{,}410 = 0{,}637$ radianes.

Y 11- Hallar el área de la superficie $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$, limitada por la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C$.

Solución: Pasando a coordenadas cilíndricas, se tiene: $x = a\sqrt{c}\,\rho\cos\theta$, $y = b\sqrt{c}\,\rho\sin\theta$, siendo el jacobiano: $J = \begin{vmatrix} a\sqrt{c}\ \cos\theta & -a\rho\sqrt{c}\ \sin\theta \\ b\sqrt{c}\ \sin\theta & b\rho\sqrt{c}\ \cos\theta \end{vmatrix} = abc\rho$. Luego: $A = 4\iint\sqrt{1+c\rho^2}\,abc\rho d\rho d\theta$. Los límites de θ son: 0 y $\frac{\pi}{2}$. El límite inferior de ρ es 0, y el superior viene dado por: $\rho^2 c\cos^2\theta + \rho^2 c\sin^2\theta = \rho^2 c = c$, luego: $\rho = 1$. Por tanto, el área de la superficie definida en el enunciado, es: $A = 4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1\sqrt{1+c\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{2ab\pi}{3}\left[(1+c)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$.

Y 12- Hallar el área del elipsoide de revolución engendrado por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ al girar sobre OX, en cada uno de los siguientes casos: $a > b$, $a = b = R$, $a < b$.

Solución: $A = \int_{-a}^{a} 2\pi y dl = \int_{-a}^{a} 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{2\pi b}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx$. En el caso $a > b$, integrando por partes, se tiene: $A = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, o bien, siendo: $c^2 = a^2 - b^2$, $A = 2\pi b^2 + 2\pi\frac{a^2 b}{c}\arcsin\frac{c}{a}$. En el caso $a = b = R$, se tiene que el área es:

$A = 2\pi \int_{-R}^{R} R dx = 4\pi R^2$. En el caso $a < b$, se tiene: $A = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arg\,sinh} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$.

Y 13- Hallar el área de la superficie $z^2 + (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 - R^2 = 0$, situada en la región positiva de los ejes coordenados.

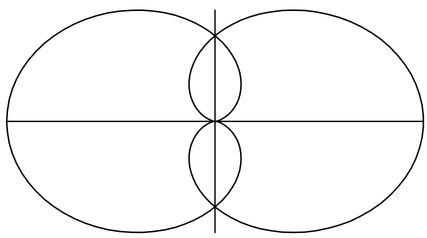
Solución: Pasando a cilíndricas, se tiene: $\sqrt{1 + z_x'^2 + z'y^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2\cos^2(\omega - \theta)}}$, siendo: $\rho = \frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{\cos(\omega - \theta)}$. Los límites de ρ son: para $z = 0$, $\rho = \frac{R}{\cos(\omega - \theta)}$, y para $z = R$, $\rho = 0$. Por tanto: $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\frac{R}{\cos(\omega-\theta)}} \frac{R\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2\cos^2(\omega - \theta)}} = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left| \frac{[R^2 - \rho^2\cos^2(\omega - \theta)]^{\frac{1}{2}}}{\cos^2(\omega - \theta)} \right|_0^{\frac{R}{\cos(\omega-\theta)}} =$
$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\cos^2(\omega - \theta)} = R^2\left[\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) + \tan\theta\right] = \frac{2R^2}{\sin 2\theta}$. También se obtiene por medio de la integral: $A = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\int_0^R \frac{Rx}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = \frac{2R^2}{\sin 2\theta}$.

Y 14- Hallar el área de la porción del paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$, interior al cilindro $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Solución: Pasando a cilíndricas, se tiene: $\sqrt{1 + z_x'^2 + z'y^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \sqrt{1 + \rho^2}$. Luego: $A = 4\iint \sqrt{1 + \rho^2}\,\rho d\rho d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}\,(*)} \sqrt{1 + \rho^2}\,\rho d\rho d\theta = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] d\theta =$
$= \frac{4}{3}\left| 2\sqrt{2}\left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right) - \theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{9} - \frac{2\pi}{3}$.
$(*)$ Obtención del límite superior de ρ: $(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)^2 = \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta$. Luego: $\rho^2 = \cos 2\theta$.

Y 15- Calcular el área de la superficie común a las cardioides $r = 2R(1 + \cos\theta)$, $r = 2R(1 - \cos\theta)$.

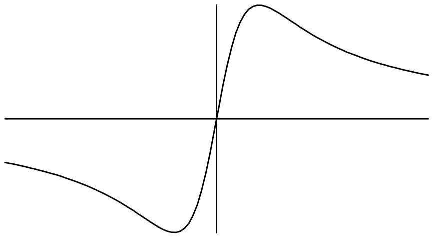
Solución:



La superficie común es 4 veces la superficie del 1º cuadrante (o del 4º) de la 2ª cardioide, o de la superficie del 2º cuadrante (o del 3º) de la 1ª cardioide. Por tanto: $A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}r^2 d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4R^2(1 - \cos\theta)^2 d\theta = 8R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 2\cos\theta + 1)d\theta =$
$= 8R^2\left| \frac{3}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta - 2\sin\theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(3\pi - 8)R^2$.

Y 16- Dada la curva $x = 4\tan\frac{t}{2},\ y = \sin t,$ hallar el área comprendida en el primer cuadrante entre la curva, el eje OX y la recta $x = \lambda,$ y su límite cuando $x \to \infty.$

Solución:



Eliminando t se tiene: $y = \dfrac{8x}{16+x^2}.$ Luego: $A = \displaystyle\int_0^{\lambda}\frac{8x}{16+x^2}dx = 4|\ln(16+x^2)|_0^{\lambda} = 4\ln\frac{16+\lambda^2}{16}.$ Su limite cuando $x \to \infty,$ es $\infty.$

Y 17- Dada la curva $x = 4\tan\frac{t}{2},\ y = \sin t,$ hallar el volumen limitado por la superficie de revolución que engendra al girar alrededor del eje $OX.$

Solución: Al ser simétrica respecto al origen: $V = 2\pi\displaystyle\int y^2dx = 2\pi\int_0^{\pi}4\sin^2\frac{t}{2}dt = 8\pi^2.$ Ver problema Y 16.

Y 18- Se considera la superficie $a^2y^2 = (a^2-x^2)(a^2-z^2).$ Calcular el volumen limitado por la porción de dicha superficie comprendida entre los planos $z = a$ y $z = -a.$

Solución: Al cortar la superficie por el plano $z = h,$ siendo $h < a,$ se obtiene la elipse: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-h^2} = 1,$ cuya superficie es: $\pi a\sqrt{a^2-h^2}.$ Por tanto el volumen pedido es: $V = 2\displaystyle\int_0^a \pi a\sqrt{a^2-h^2}\,dh = 2\pi a^2\int_0^a\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\,dh.$ Haciendo el cambio: $\dfrac{h}{a} = \sin t,$ se tiene: $V = 2\pi a^3\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = 2\pi a^3\left|\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}a^3.$

Y 19- Se considera un cono de semiángulo en el vértice $\alpha = 30^\circ$ y una esfera cuyo centro se encuentra en la superficie cónica y que pasa por su vértice. Hallar el área de la porción de cono interior a la esfera.

Solución: Sea el cono: $z^2 = 3(x^2+y^2).$ Y sea la ecuación de la esfera, que pasa por $(0,0,0)$ y cuyo centro es $(\frac{R}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}R)$: $x^2+y^2+z^2-Rx-\sqrt{3}Rz = 0,$ es decir, en coordenadas esféricas: $\rho = R\sin\theta\cos\varphi+\sqrt{3}R\cos\theta.$ Siendo: $z'_x = \dfrac{3x}{z},\ z'_y = \dfrac{3y}{z},$ y siendo el elemento infinitesimal del área del cono: $dA = \sqrt{1+z'^2_x+z'_{y^2}} = 2,$ se tiene que: $A = \displaystyle\iint_P 2dxdy = 2\iint_P \rho d\rho d\theta,$ siendo P la proyección en el plano $z = 0,$ de la intersección del cono y la esfera. Para obtener la ecuación de $P,$ se elimina z entre las ecuaciones del cono y de la esfera, teniéndose, por tanto: $x^2+y^2+3(x^2+y^2)-Rx = \sqrt{3}Rz,\quad [4(x^2+y^2)-Rx]^2 = 3a^2z^2 = 3R^23(x^2+y^2).$ Pasando a coordenadas polares, se tiene: $\rho = \dfrac{R}{4}(3+\cos\theta).$ Por tanto: $A = 4\displaystyle\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{R}{4}(3+\cos\theta)}\rho d\rho =$

$$= \frac{R^2}{8}\int_0^{\pi}(3+\cos\theta)^2d\theta = \frac{R^2}{8}\int_0^{\pi}(9+6\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta = \frac{R^2}{8}(9\pi+0+\frac{\pi}{2}) = \frac{19}{16}\pi R^2.$$

Y 20- Sea la esfera $(x-a)^2+y^2+z^2=a^2$, y el cono $x^2+y^2=z^2$. Calcular el área de la porción de esfera interior al cono.

Solución: En la esfera se tiene: $z'_x=\frac{-x+a}{z}$, $z'_y=\frac{-y}{z}$, $dA=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}=\frac{a}{z}dxdy=$ $=\frac{a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2-a^2}}dxdy$. La proyección de la intersección de esfera y cono, es: $(x-a)^2+y^2+x^2+y^2-a^2=x^2+y^2-ax=0$, que en polares es: $\rho=a\cos\theta$. Luego: $dA=\frac{adxdy}{\sqrt{x^2+y^2-2ax}}$. Haciendo el cambio: $x=t+a$, $dA=\frac{adxdy}{\sqrt{|x^2+y^2-a^2|}}=\frac{a\rho d\rho d\theta}{\sqrt{|\rho^2-a^2|}}$.

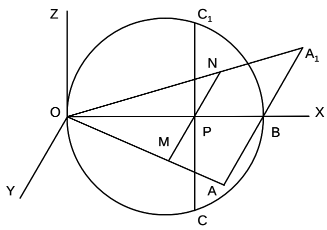
Luego: $A=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a\cos\theta}^{0}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{|\rho^2-a^2|}}=a^2(\pi-2)$.

Y 21- Sea la esfera $(x-a)^2+y^2+z^2=a^2$, y el cono $x^2+y^2=z^2$. Calcular el volumen común a ambos cuerpos.

Solución: Se trata de la diferencia de los volúmenes de dos troncos de cilindro de la misma base, limitados por las superficies de la esfera y del cono. El volumen del tronco limitado por la superficie esférica es: $V_1=2\iint_B zdxdy=2\iint_B\sqrt{a^2-y^2-(x-a)^2}\,dxdy=2\iint_B\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta=$ $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{-a\cos\theta}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho d\rho=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)a^3$. El volumen del tronco de cilindro limitado por la superficie del cono es: $V_2=2\iint_B xdxdy=2\iint_B\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy==2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^2d\rho=\frac{4}{9}a^3$. Luego el volumen pedido es: $V=V_1-V_2=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{8}{9}\right)a^3$.

Y 22- OA y OA_1 son dos segmentos iguales de longitud a, situados en el plano $z=0$, simétricos respecto al eje OX, con el que forman ángulos iguales θ. Sea B el punto en que AA_1 corta a OX. En el plano XOZ se traza la circunferencia de diámetro OB. Por un punto P cualquiera de OX, se traza un plano perpendicular a OX que corta a OA y OA_1, en M y N, respectivamente, y en C y C_1 a la circunferencia. Se construye la elipse de vértices M,N,C,C_1. Al deslizar P sobre OX, la elipse engendra una superficie. Hallar el volumen limitado por ésta, y el valor de θ para que dicho volumen sea máximo.

Solución:



Sean: $OP=x$, $OB=a\cos\theta$. Sean d_1 y d_2 los semiejes de la elipse: $d_1=PM=x\tan\theta$, $d_2=PC=\sqrt{x(a\cos\theta-x)}$, siendo el área de la elipse: $S_x=\pi d_1d_2$. Por tanto: $V=\int_0^{a\cos\theta}\pi x\tan\theta\sqrt{x(a\cos\theta-x)}\,dx=\frac{\pi^2a^3}{16}\sin\theta\cos^2\theta$. Para que el volumen V sea máximo: $V'_\theta=\cos\theta(\cos^2\theta-2\sin^2\theta)=0$. Para $\cos\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $V=0$, solución mínima. Para $\cos^2\theta-2\sin^2\theta=0$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta=\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}=35°15'51,8''$, siendo el volumen máximo: $V=\frac{\pi^2a^3\sqrt{3}}{72}\simeq 0,2374\,a^3$.

Y 23- Hallar el volumen común a las superficies engendradas al girar alrededor del eje OY, por las dos curvas cuyas respectivas ecuaciones son: $y^3 = 27x$, $3x = 4y - y^2$.

Solución: Las dos curvas se cortan en tres puntos de ordenadas: 3, 0, -12. Luego el volumen total corresponde a la suma de dos volúmenes: V_1, V_2. El primero se extiende desde $y = 3$ a $y = 0$, y el segundo desde $y = 0$ hasta $y = -12$. Luego el volumen pedido es: $V = V_1 + V_2 =$
$$= \pi\int_0^3\left[\left(\frac{4y-y^2}{3}\right)^2 - \left(\frac{y^3}{27}\right)^2\right]dy + \pi\int_{-12}^0\left[\left(\frac{4y-y^2}{3}\right)^2 - \left(\frac{y^3}{27}\right)^2\right]dy = \frac{104\pi}{35} + \frac{144.896\pi}{35} =$$
$$= \frac{29.000\pi}{7}.$$

Y 24- Sea V_n el volumen limitado por la superficie $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = a^{2n}$. Calcular el límite de V_n cuando $n \to \infty$.

Solución: Haciendo el cambio: $\frac{x}{a} = u^{\frac{1}{2n}}$, $dx = \frac{a}{2n}u^{\frac{1-2n}{2n}}du$, $\frac{y}{a} = v^{\frac{1}{2n}}$, $dy = \frac{a}{2n}v^{\frac{1-2n}{2n}}dv$, $\frac{z}{a} = w^{\frac{1}{2n}}$, $dz = \frac{a}{2n}w^{\frac{1-2n}{2n}}dw$, se tiene que el volumen citado es: $V_n = 2^3\iiint_T dxdydz =$
$$= 2^3\iiint_T\left(\frac{a}{2n}\right)^3 u^{\frac{1-2n}{2n}}v^{\frac{1-2n}{2n}}w^{\frac{1-2n}{2n}}dudvdw,$$ extendida a: $u + v + w = 1$ en el primer octante (T).

Aplicando Dirichlet, se tiene: $V_n = \frac{a^3}{n^3}\frac{\Gamma^3(\frac{1}{2n})}{\Gamma\left(1+\frac{3}{2n}\right)} = \frac{2a^3}{3n2}\frac{\Gamma^3(\frac{1}{2n})}{\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)}$. Luego: $\lim_{n\to\infty} V_n =$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2a^3}{3n2}\frac{\Gamma^3(\frac{1}{2n})}{\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)} = \frac{2a^3}{3n2}\left[\frac{\pi}{\Gamma(1-\frac{1}{2n})\sin\frac{\pi}{2n}}\right]^3\frac{\sin\frac{3\pi}{2n}}{\pi\Gamma(1-\frac{3}{2n})} = \frac{2a^3\pi^3\frac{3\pi}{2n}}{3n^2(\frac{\pi}{2n})^3\pi} = 8a^3.$$

Y 25- Calcular el volumen de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, $x > 0$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 - Rx = 0$.

Solución: Pasando a cilíndricas la ecuación de la esfera es: $\rho^2 + z^2 - R^2 = 0$, y la del cilindro: $\rho = R\cos\theta$. Luego: $V = 4\iiint_T \rho d\rho d\theta dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{R\cos\theta}^{R}\rho d\rho\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz = \frac{8}{9}R^3$.

Nota: La parte común corresponde a la "Ventana de Viviani", luego la parte exterior es igual a: $\frac{2}{3}\pi R^3$ (semiesfera) $-\frac{2}{9}R^3(3\pi - 4)$ (ventana de Viviani) $= \frac{8}{9}R^3$.

Y 26- Calcular el volumen común al paraboloide $y^2 + z^2 = 4ax$, al cilindro $y^2 = ax$, y al plano $x = 3a$.

Solución: Cortando por un plano perpendicular a OX, se tiene la superficie limitada por la circunferencia: $y^2 + z^2 = 4ax$ y las dos rectas paralelas: $y^2 = ax$. El área de dicha superficie viene dada por: $A = 4\int_0^{\sqrt{ax}} zdy = 4\int_0^{\sqrt{ax}}\sqrt{4ax - y^2}\,dy = ax\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Luego el volumen pedido es;
$$V = 4\int_0^{3a} ax\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx = 3a^3(2\pi + 3\sqrt{3}).$$

Y 27- Calcular el volumen del sólido limitado en su parte inferior por el paraboloide $x^2 + y^2 - az = 0$, y en su parte superior por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$.

Solución: El plano $z = a$, corta a ambos cuerpos según el círculo: $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. El volumen pedido V es la suma $V_1 + V_2$, correspondiendo V_1 al paraboloide entre las cotas $0 < z < a$, y V_2 a la esfera entra las cotas $a < z < 2a$. Por tanto: $V = \int_0^a \pi azdz + \int_a^{2a}\pi(2a\,z - z^2)dz = \frac{7}{6}\pi a^3$.

Y 28- Calcular el volumen común a dos cilindros de revolución iguales, cuyos ejes son ortogonales.

Solución: Sean los cilindros: $x^2+z^2=r^2$ y $y^2+z^2=r^2$. El volumen solicitado está formado por 16 partes de igual volumen limitadas por los planos coordenados (ocho octantes) y por los planos bisectores que pasan por el eje OZ que dividen cada octante en dos partes simétricas. El volumen pedido es: $V=16\iint ydxdy=16\iint xdxdz=16\int_0^r dz\int_0^{\sqrt{r^2-z^2}}xdx=\frac{16r^3}{3}$. Si los ejes de los dos cilindros formasen entre sí un ángulo agudo θ, el volumen común vendría dado por: $V=\frac{16r^3}{3sen\theta}$.

Y 29- Calcular el volumen comprendido entre las cotas $z=1$ y $z=4$, y la superficie $x^2+y^2+z^2=\frac{16z^4}{x^2+y^2+25z^2-10xz}+2xz$.

Solución: Al cortar la superficie dada por el plano $z=h$, se tiene: $(x^2+y^2+h^2-2xh)(x^2+y^2+25h^2-10xh)=\left[(x-h)^2+y^2\right]\left[(x-5h)^2+y^2\right]=16h^4$. Por tanto: $\sqrt{(x-h)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-5h)^2+y^2}=4h^2$. Esta ecuación corresponde a la lemniscata de Bernouilli, lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante e igual a la cuarta parte del cuadrado de la distancia entre los focos. En este caso, los focos son: $(h,0)$ y $(5h,0)$, y la cuarta parte del cuadrado de su distancia es: $4h^2$. El área de los dos bucles de la lemniscata es el doble del producto de las distancias a los focos, en este caso: $8h^2$. Por tanto, el volumen pedido es: $V=\int_1^4 8z^2dz=168$.

Y 30- Se da en el plano XY la circunferencia $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$, cuyo arco comprendido entre los puntos correspondientes a $\theta=\pm\frac{\pi}{2n}$, (siendo n entero), está sometido a la acción de una carga uniformemente repartida, de dirección paralela a OZ, y cuyo valor por unidad de arco, es función de θ, valiendo $A\cos n\theta$ (A es constante). Calcular el valor de la resultante y su punto de aplicación.

Solución: El valor de la resultante es: $f=\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}}AR\cos n\theta d\theta=\frac{2AR}{n}$. El centro del sistema ha de estar, por simetría, sobre el eje OX, estando dada su abscisa x_f, por la expresión: $x_f\frac{2AR}{n}=\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}}AR\cos n\theta\cdot R\cos\theta d\theta$, siendo $R\cos\theta$ la abscisa de cada punto de aplicación. Luego:

$$x_f=\frac{nR}{2}\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}}\cos n\theta\cos\theta d\theta=\frac{nR}{2}\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}}\frac{1}{2}[\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta]d\theta=\frac{n^2R\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2-1}.$$

Y 31- Un espacio de tres dimensiones está ocupado por una masa distribuida con absoluta simetría con relación a cada uno de los tres planos coordenados. La densidad de la masa en cada uno de los puntos del espacio, puede expresarse como función lineal de sus coordenadas x, y, z, siendo nula en el origen y siendo ρ_x, ρ_y, ρ_z, en los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ $(0,0,1)$, respectivamente. Calcular la masa total contenida en el interior de la superficie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Solución: La masa M contenida en un octante viene dada por la integral triple: $M=\iiint_T(\rho_xx+\rho_yy+\rho_zz)dxdydz=\rho_x\iiint_T xdxdydz+\rho_y\iiint_T ydxdydz+\rho_z\iiint_T zdxdydz$. Aplicando la fórmula de Dirichlet: $M=\rho_x\frac{\Gamma(\frac{2}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}\frac{a^2bc}{8}+\rho_y\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{2}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2})}\frac{ab^2c}{8}+$

$+\rho_z \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{2}{2})}{\Gamma(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2})} \dfrac{abc^2}{8} = abc\dfrac{\pi}{16}(a\rho_x + b\rho_y + c\rho_z)$. Luego la masa total pedida (en los ocho octantes) es: $abc\dfrac{\pi}{2}(a\rho_x + b\rho_y + c\rho_z)$.

Nota: Si el recinto fuera: $(\frac{x}{a})^\alpha + (\frac{y}{b})^\beta + (\frac{z}{c})^\gamma = 1$, la integral sería: $I = \iiint_T x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}dxdydz =$

$$= \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \frac{\Gamma(\frac{p}{\alpha})\,\Gamma(\frac{q}{\beta})\,\Gamma(\frac{r}{\gamma})}{\Gamma(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)}.$$

Y 32- Sobre la superficie esférica $x^2+y^2+z^2 = R^2$, se reparte homogéneamente una masa $M = 4\pi R^2 k$, siendo k una constante. Hallar el potencial W que esta masa crea en el punto $P(\lambda,0,0)$, sabiendo que el potencial viene dado por la fórmula $W = \iint \frac{k\,ds}{l}$, extendida a toda la superficie esférica, siendo l la distancia de P a cada punto de dicha superficie, y ds el elemento de esta superficie.

Solución: Pasando a esféricas: $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta\cos\varphi$, $z = R\sin\theta\sin\varphi$. La distancia l viene dada por: $l^2 = R^2+\lambda^2-2R\lambda\cos\theta$. Por otro lado: $ds = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy = \frac{R}{z}dxdy$. El jacobiano de la transformación es: $J = \begin{vmatrix} x'_\theta & x'\varphi \\ y'_\theta & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\sin\theta & 0 \\ R\cos\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} =$ $= R^2\sin^2\theta\sin\varphi$. Luego el elemento de superficie en coordenadas esféricas es: $ds = \dfrac{R}{R\sin\theta\,\sin\varphi}R^2\sin^2\theta\sin\varphi d\theta d\varphi = R^2\sin\theta d\theta d\varphi$. Por tanto, el potencial pedido W viene dado por la integral doble: $W = \iint \dfrac{kR^2\sin\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{R^2+\lambda^2-2R\lambda\cos\theta}} = kR^2\int_0^\pi \dfrac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2+\lambda^2-2R\lambda\cos\theta}}\int_0^{2\pi} d\varphi =$

$$= 2\pi kR^2\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2+\lambda^2-2R\lambda\cos\theta}} = \frac{2\pi kR}{\lambda}\left|\sqrt{R^2+\lambda^2-2R\lambda\cos\theta}\right|_0^\pi = \frac{2\pi kR}{\lambda}[R+\lambda\pm(R-\lambda)].$$

Si P es exterior a la esfera: $\lambda > R$, $W = \dfrac{2\pi kR}{\lambda}[R+\lambda+R-\lambda] = \dfrac{4\pi kR^2}{\lambda}$. Si $\lambda < R$, (P es interior a la esfera), $W = \dfrac{2\pi kR}{\lambda}[R+\lambda-R+\lambda] = 4\pi kR$. Si $\lambda = R$, (P está sobre la superficie esférica), $W = \dfrac{2\pi kR}{R}(R+R) = 4\pi kR$.

Z 1- Un depósito tiene 100 litros de agua salada con una concentración de sal de 5 gramos por litro. Se abre un grifo por el que salen del depósito 10 litros por segundo. Simultáneamente se echa en el depósito la misma cantidad de agua pura. Se supone que la concentración siempre es uniforme. Hallar el tiempo que tardará el agua en tener una concentración de 1 gramo de sal por litro.

Solución: Habiendo transcurrido t segundos, hay s gramos de sal por litro. En ese instante entran: Δa gramos de agua pura y salen: Δa gramos de agua salada con una concentración de s gramos por litro, es decir que salen: $\Delta a\frac{s}{100}$ gramos de sal. Luego: $\Delta s = -\Delta a\frac{s}{100}$. Por tanto: $\frac{\Delta s}{s} = -\frac{\Delta a}{100}dt = -\frac{10}{100}dt$. Integrando: $\ln s = -\frac{t}{10} + C$. Para $t = 0$, $C = \ln 500$. Luego: $t = 10\ln\frac{500}{s}$. Para $s = 100$, $t = 10\ln 5 = 16,09$ segundos.

Z 2- La parábola $y^2 = 2x$, tiene como foco F el punto $(\frac{1}{2},0)$ y como directriz la recta $x = -\frac{1}{2}$. Un punto P recorre su rama positiva de forma que su velocidad lineal es proporcional a la distancia PF. Siendo A el punto $(-\frac{1}{2},0)$, determinar la velocidad de M, punto de intersección de PA y OY, así como la abscisa de P para que la velocidad de M sea máxima o mínima.

Solución: La longitud de la rama positiva de la parábola entre su vértice $(0,0)$ y el punto de abscisa x, viene dada por: $\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,dx$. La velocidad lineal de P, es: $\frac{d\left(\int_0^x \sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,dx\right)}{dx}\frac{dx}{dt} = k\overline{PF} = k\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2x} = k(x+\frac{1}{2})$. Luego: $\frac{dx}{dt} = \frac{k(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{1+\frac{1}{2x}}} =$ $= \frac{k}{\sqrt{2}}\sqrt{x(2x+1)}$. Las coordenadas de M son: $(0,\frac{\sqrt{2x}}{2x+1})$, siendo por tanto su longitud recorrida: $\frac{\sqrt{2x}}{2x+1}$. Su velocidad es: $\frac{d\left(\frac{\sqrt{2x}}{2x+1}\right)}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\left(\frac{\sqrt{2x}}{2x+1}\right)}{dx}\frac{k}{\sqrt{2}}\sqrt{x(2x+1)} =$ $= \frac{1-2x}{\sqrt{2x}\,(2x+1)^2}\frac{k}{\sqrt{2}}\sqrt{x(2x+1)} = \frac{k(1-2x)}{2(2x+1)^{\frac{3}{2}}}$. Derivando esta expresión e igualándola a cero, se tiene: $x = \frac{5}{2}$. Volviendo a derivar, se obtiene: $\frac{k}{2}\frac{-6x+27}{(2x+1)^{\frac{7}{2}}}$. Sustituyendo: $x = \frac{5}{2}$, esta segunda derivada es > 0, luego la velocidad de M para $P(\frac{5}{2},\sqrt{5})$ es un mínimo.

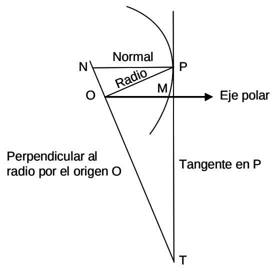
Z 3- Las coordenadas de un punto cualquiera de una curva dada se designan por (x,y), y el coeficiente angular de la tangente en dicho punto, por p. A esta curva se le hace corresponder otra, definida por $X = p$, $Y = y - px$. Calcular x, y, p en función de X, Y, P (coeficiente angular de la tangente en el punto de coordenadas X, Y), y buscar las curvas transformadas de las que satisfacen la ecuación $(xy+b)(y'^2-1)+(x^2-y^2-c^2)y' = 0$, en la que b y c son constantes, integrando esta ecuación.

Solución: $P = \frac{dY}{dX} = \frac{d(y-px)}{dp} = -x$. Luego se tiene: $x = -P$, $p = X$, $y = Y+px = Y-PX$. Sustituyendo estos valores en la ecuación dada, se tiene la ecuación diferencial de las curvas transformadas: $[-P(Y-PX)+b][X^2-1]+\left[P^2-(Y-PX)^2-c^2\right]X = 0$. Operando, la ecuación queda: $PX^2Y+bX^2+PY-b-Y^2X-c^2X = 0$, o bien: $Y'X^2Y+bX^2+Y'Y-b-Y^2X-c^2X = 0$. Haciendo: $z = Y^2$, $z' = 2YY'$, se tiene: $(X^2+1)z'-2zX+2bX^2-2b-2c^2X = 0$ (ecuación lineal). Luego: $\frac{z'}{z} = \frac{2X}{X^2+1}$, $z = \lambda(X^2+1)$. Sustituyendo estos valores en la ecuación lineal, se tiene:

$\lambda' = \dfrac{-2bX^2 + 2c^2X + 2b}{(X^2+1)^2}$, $\lambda = f(X) + C$, $z = [f(X)+C](X^2+1)$, $Y = \sqrt{[f(X)+C](X^2+1)}$.

Z 4- Hallar la curva en la que el área comprendida entre ella, el eje polar y el radio polar, está en una relación constante $\dfrac{1}{\pm 2k^2}$, con el área del triángulo formado por el radio polar, la normal y la subnormal polar.

Solución:



Sean OP el radio polar, PT la tangente en P, PN la normal en P, NO (perpendicular a OP) la subnormal polar, OT (prolongación de ON) la subtangente polar. Sus respectivos valores son: $PT = \dfrac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$, $PN = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}$, $OT = \dfrac{\rho^2}{\rho'}$, $ON = \rho'$. El área limitada por la curva, el eje polar y el radio polar, es: $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\theta \rho^2 d\theta$. El área del triángulo OPN es: $\dfrac{1}{2}\rho\rho'$. Por tanto: $\pm 2k^2 \displaystyle\int_0^\theta \rho^2 d\theta = \rho\rho'$. Derivando, se tiene: $\pm 2k^2\rho^2 = \rho'^2 + \rho\rho''$. Haciendo: $\rho' = t\rho$, $\rho'' = t'\rho + t\rho'$, se tiene: $\pm 2k^2 = 2t^2 + t'$, $\dfrac{dt}{\pm 2k^2 - 2t^2} = d\theta$. Tomando $+k^2$, se tiene: $\dfrac{dt}{-k^2+t^2} = -2d\theta$, $\dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{t-k}{t+k} = -2\theta + C$, $t = -k\coth[k(-2\theta + C)] = \dfrac{\rho'}{\rho}$, $\ln\rho = \dfrac{1}{2}\ln\sinh[k(-2\theta+C)] + K$. Integrando se tiene la ecuación de la curva pedida: $\rho^2 = A\sinh(-2k\theta + B)$, en donde A y B son constantes. Tomando $-k^2$, se tiene: $\dfrac{dt}{k^2+t^2} = -2d\theta$, $\dfrac{1}{k}\arctan\dfrac{t}{k} = -2\theta + C$, $t = k\tan[k(-2\theta + C)] = \dfrac{\rho'}{\rho}$, $\ln\rho = \dfrac{1}{2}\ln\cos[k(-2\theta+C)] + K$. Integrando se tiene otra ecuación de la curva pedida: $\rho^2 = A\cos(-2k\theta + B)$, en donde A y B son constantes.

Z 5- Integrar $y' + \dfrac{y}{x} = ay^2\ln x$.

Solución: Se trata de una ecuación de Bernouilli. Haciendo el cambio: $\dfrac{1}{y} = z$, $-\dfrac{y'}{y^2} = z'$, se tiene: $-z' + \dfrac{z}{x} - a\ln x = 0$. Resolviendo: $-z' + \dfrac{z}{x} = 0$, $z = Cx$. Introduciendo este valor, se tiene: $C' = -a\dfrac{\ln x}{x}$, $C = -\dfrac{a}{2}(\ln x)^2 + A$. Luego: $z = \left(-\dfrac{a}{2}(\ln x)^2 + A\right)x$, $y = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{a}{2}(\ln x)^2 + A\right)x}$.

Z 6- Integrar $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$.

Solución: Haciendo el cambio: $\dfrac{y}{x} = z$, $y' = z + xz'$, y sustituyendo estos valores, se tiene: $\cos z dz = -\dfrac{1}{x}dx$, $\sin z = -\ln(Cx)$, $y = x\arcsin[-\ln(Cx)]$.

Z 7- Integrar $x^2(x-1)y' + 2x^2y - (x+1) = 0$.

Solución: $y' + \dfrac{2}{x-1}y - \dfrac{x+1}{x^2(x-1)} = 0$, que es lineal. Resolviendo la ecuación: $y_1' + \dfrac{2}{x-1}y_1 = 0$, se tiene: $y_1 = A(x-1)^{-2}$, $y_1' = \dfrac{A'}{(x-1)^2} - \dfrac{2A}{(x-1)^3}$ Introduciendo estos valores en la ecuación dada, se tiene: $A' = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, $A = \displaystyle\int \dfrac{x^2-1}{x^2}dx = x + \dfrac{1}{x} + C$. Luego: $y = \dfrac{x + \frac{1}{x} + C}{(x-1)^2}$.

Z 8- Los polinomios enteros en x, de grado n, de la forma $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, siendo $P_0(x) = 1$, se llaman polinomios de Legendre. Escribir los cuatro primeros según las potencias decrecientes de x, y demostrar que $P_n(x)$ verifica a una ecuación diferencial de segundo orden, que debe hallarse.

Solución: Desarrollando $(x^2-1)^n$, se tiene: $(x^2-1)^n = x^{2n} - \binom{n}{1}x^{2n-2} + \ldots = \sum_{p=1}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}x^{2(n-p)}$. Hallando su derivada n –ésima y dividiendo por $2^n \cdot n!$, se obtiene: $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = = \sum \frac{(-1)^p}{2^n n!}\frac{n!}{p!(n-p)!}(2n-2p)(2n-2p-1)\ldots(n-2p+1)x^{n-2p}$. O bien, simplificando: $P_n = \sum \frac{(-1)^p}{2^n}\frac{(2n-2p)!}{p!(n-p)!(n-2p)!}x^{n-2p}$. De ahí se deduce la fórmula de recurrencia entre tres polinomios consecutivos de Legendre: $nP_n = (2n-1)xP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}$. Por tanto, partiendo de $P_0 = 1$, calculando $P_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x$, y aplicando la ley de recurrencia, se tiene: $P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $P_4 = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$, $P_5 = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{35}{8}x$, etc. Siendo: $P'_n = \sum \frac{(-1)^p}{2^n}\frac{(2n-2p)!}{p!\,(n-p)!\,(n-2p-1)!}x^{n-2p-1}$, se tiene que: $(x^2-1)P'_n = nxP_n - nP_{n-1}$. Y como: $P''_n = \sum \frac{(-1)^p}{2^n}\frac{(2n-2p)!}{p!\,(n-p)!\,(n-2p-2)!}x^{n-2p-2}$, se deduce la ecuación diferencial pedida: $(x^2-1)P''_n + 2xP'_n = n(n+1)P_n$.

Z 9- Integrar $2x^2y'y'' - xy'' + y' = 0$.

Solución: $2y'y'' = \frac{xy''-y'}{x^2}$. Es decir: $\frac{d(y'^2)}{dx} = \frac{d(\frac{y'}{x})}{dx}$. De donde se tiene: $\frac{y'}{x} = y'^2 + C_1$, $y' = \frac{1 \pm \sqrt{1-4C_1x^2}}{2x}$. Integrando: $y = \frac{1}{2}\ln x \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4C_1x^2} \mp \operatorname{arg\,cosh}\sqrt{C_1}\,x + C_2$.

Z 10- Integrar $\begin{vmatrix} y^{IV} & y''' & y'' \\ y''' & y'' & y' \\ y'' & y' & y \end{vmatrix} = 0$.

Solución: Por anularse el wronskiano de y, y', y'', hay una dependencia lineal entre ellas. Por tanto: $y + Ay' + By'' = 0$. La ecuación característica es: $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$, de donde se tiene: $\lambda = \frac{-A \pm \sqrt{A^2-4B}}{2}$. Llamando λ_1 y λ_2 a estas dos raíces, la solución es: $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$.

Z 11- Hallar la forma más general de la función $f(x,y)$, tal que las dos expresiones $dx + fdy$, $dx - fdy$, admitan respectivamente dos factores integrantes λ y μ, cuyo producto sea la unidad.

Solución: $\lambda'_y = \lambda'_x f + \lambda f'_x$, $\mu'_y = -\mu'_x f - \mu f'_x$. Como: $\lambda\mu = 1$, $\lambda'_x = \frac{-\mu'_x}{\mu^2}$, $\lambda'_y = \frac{-\mu'_y}{\mu^2}$. Sustituyendo estos valores en la primera igualdad y sumando la segunda, se tiene: $\mu'_x(f+1) = 0$. Luego: $\mu = \varphi(y)$. Como: $\mu'_y = -\mu'_x f - \mu f'_x = -\mu f'_x$, se tiene que: $f'_x = -\frac{\mu'_y}{\mu} = -\frac{\varphi'}{\varphi} = F(y)$. Por tanto, la función pedida es: $f = xF(y) + F_1(y)$.

Z 12- Integrar la expresión $A = z\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x^2+z^2}\right)dx + \frac{zdy}{xy^2} + \left(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\right)dz$.

Solución: $A = \frac{z}{x^2y}dx + \frac{z}{xy^2}dy - \frac{1}{xy}dz - \frac{z}{x^2+z^2}dx + \frac{x}{x^2+z^2}dz = d\left(\frac{-z}{xy}\right) + d(\arctan\frac{z}{x}) = = d\left(\frac{-z}{xy} + \arctan\frac{z}{x}\right)$. Luego la integral de A es: $\frac{-z}{xy} + \arctan\frac{z}{x} + C$.

Z 13- Integrar $y = y'x + \sqrt{a^2 - b^2y'^2}$.

Solución: Derivando, se tiene: $y' = y''x + y' - 2b^2y'y''(a^2 - b^2y'^2)^{-\frac{1}{2}}$. Simplificando: $y''\left[x - b^2y'(a^2 - b^2y'^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = 0$. Luego se obtiene la solución general: $y'' = 0$, luego: $y = Ax + B$. Introduciendo este valor en la ecuación dada, se obtiene que: $B = \sqrt{a^2 - b^2A^2}$. Por tanto: $y = Ax + \sqrt{a^2 - b^2A^2}$. Por otra parte, como: $x - b^2y'(a^2 - b^2y'^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$, $(a^2 - b^2y'^2)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{b^2y'}{x} = y - y'x$ (según la ecuación dada). Luego: $y' = \dfrac{xy}{b^2 + x^2}$, $y = \dfrac{x^2y}{b^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - b^2\dfrac{x^2y^2}{(b^2 + x^2)^2}}$ (solución singular).

Z 14- Integrar $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$.

Solución: Haciendo: $y' = p$, $y'' = p'$, $\dfrac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = dx$, $A + x = \arg\sinh p$, $p = \sinh(A + x)$, $y = \cosh(A + x) + B$.

Z 15- Integrar $y'^3 - (x^2 + xy + y^2)y'^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)y' - x^3y^3 = 0$.

Solución: La ecuación dada es igual a: $(y' - xy)(y' - y^2)(y' - x^2) = 0$. Luego se tienen las soluciones: $y' - xy = 0$, $y = e^{\frac{Ax^2}{2}}$; $y' - y^2 = 0$, $y = \dfrac{-1}{B + x}$; $y' - x^2 = 0$, $y = \dfrac{x^3}{3} + C$. La solución general es: $(y - e^{\frac{Ax^2}{2}})(y + \dfrac{1}{B + x})(y - \frac{x^3}{3} - C) = 0$.

Z 16- .Integrar $dy + \dfrac{xydx}{1 - x^2} = xy^{\frac{1}{2}}dx$.

Solución: La ecuación es: $y' + \dfrac{x}{1 - x^2}y - xy^{\frac{1}{2}} = 0$. Haciendo: $y = z^2$, $z = y^{\frac{1}{2}}$, $y' = 2zz'$. Sustituyendo estos valores en la ecuación dada: $2z' + \dfrac{x}{1 - x^2}z - x = 0$, que es lineal. Luego: $z = \frac{1}{3}(x^2 - 1) + C(1 - x^2)^{\frac{1}{4}}$, $y = \left[\frac{1}{3}(x^2 - 1) + C(1 - x^2)^{\frac{1}{4}}\right]^2$.

Z 17- Un depósito cilíndrico de 2 metros de diámetro tiene en el fondo un orificio de 1 decímetro de diámetro. La velocidad de salida del agua es $\sqrt{2gh}$, siendo h la altura del agua en el depósito. ¿Cuánto tardará en bajar el agua desde el nivel de 25 metros al de 9 metros?

Solución: La cantidad de agua correspondiente a una altura dh es: $\pi r^2dh = \pi dh$. El agua que sale en el tiempo dt por el orificio, es: $\pi \cdot 0.05^2\sqrt{2gh}\,dt$. Igualando las dos cantidades, se tiene:

$$dt = \frac{dh}{0,0025\sqrt{2gh}},\ t = \int_9^{25}\frac{dh}{0,0025\sqrt{2gh}} = \left|\frac{2h^{\frac{1}{2}}}{0,0025\sqrt{2g}}\right|_9^{25} = 361,2 \text{ segundos.}$$

Z 18- Dadas tres funciones P, Q, R dependientes de x, y, z, hallar la condición que deben cumplir para que tengan un factor integrante.

Solución: Sea μ el factor integrante. Se debe cumplir que $\mu(Pdx + Qdy + Rdz)$ sea una diferencial exacta. Para ello: $\dfrac{d^2}{dyz}\mu P = \dfrac{d^2}{dxz}\mu Q = \dfrac{d^2}{dzx}\mu R$. Operando con una de estas tres ecuaciones, por ejemplo: $\dfrac{d^2}{dyz}\mu P = \dfrac{d^2}{dxz}\mu Q$, se tiene: $\dfrac{d}{dy}\mu P = \dfrac{d}{dx}\mu Q$. De donde: $\mu'_yP + \mu P'_y = \mu'_xQ + \mu Q'_x$, $\mu'_yP - \mu'_xQ = \mu(Q'_x - P'_y)$, $\dfrac{d\mu}{\mu}(\dfrac{P}{dy} - \dfrac{Q}{dx}) = Q'_x - P'_y$, $\dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{dQdy - dPdx}{Pdx - Qdy}$. Operando análogamente con las otras dos ecuaciones, se tiene la condición pedida: $\dfrac{dQdy - dPdx}{Pdx - Qdy} = \dfrac{dPdx - dRdz}{Rdz - Pdx} = \dfrac{dRdz - dQdy}{Qdy - Rdz}$.

Z 19- La velocidad con que varía la temperatura de una habitación es en cada instante inversamente proporcional a la diferencia de temperatura existente entre la habitación y la calle. Sabiendo que al cabo de una hora la temperatura de la habitación se ha reducido a un tercio de la inicial, que era de

30 º, y que la temperatura de la calle es constante, determinar al cabo de cuánto tiempo serán iguales las temperaturas de la habitación y de la calle.

Solución: Temperatura de la calle: C. Temperatura de la habitación: y. Se tiene que: $y' = \frac{k}{y-C} = \frac{dy}{dt}$, $(y-C)dy = kdt$, $y^2 - 2Cy - 2kt + A = 0$. Para $t = 0$, $A = 60C - 900$. Para $t = 1$, $y = 10$, $k = 20C - 400$, $t = \frac{C^2 - 60C + 900}{800 - 40C}$. Haciendo $A = 0$, se tiene: $C = 15$, $t = 1{,}125$ horas.

Z 20- La velocidad con que varía la temperatura de una habitación es en cada instante proporcional al cuadrado de la diferencia de temperatura existente entre la habitación y la calle. Sabiendo que al cabo de una hora la temperatura de la habitación se ha reducido a un tercio de la inicial, que era de 30 º, y que la temperatura de la calle es constante, determinar al cabo de cuánto tiempo serán iguales las temperaturas de la habitación y de la calle.

Solución: Temperatura de la calle: C. Temperatura de la habitación: y. Se tiene que: $y' = k(C-y)^2 = \frac{dy}{dt}$, $\frac{dy}{k(C-y)^2} = dt$, $k(y-C) = -\frac{1}{t+C_1}$, $y = C - \frac{1}{k(t+C_1)}$. Para $t = 0$, $y = 30$. Para $t = 1$, $y = 10$, $k = \frac{-20}{(C-10)(C-30)}$, $C_1 = \frac{C-10}{-20}$, $y = C + \frac{(C-10)(C-30)}{20t - (C-10)}$. Luego la temperatura de la habitación será igual a la de la calle cuando transcurra un tiempo infinito.

Z 21- Sabiendo que la ecuación diferencial $dy + f(x,y)\,dx = 0$ admite un factor integrante de la forma $Xy + X_1$, siendo X y X_1 funciones de x, demostrar que $f(x,y)$ es de la forma $\frac{Ay^2 + By + C}{Dy + E}$, donde A, B, C, D, E son funciones de x.

Solución: $(Xy + X_1)dy = -(Xy + X_1)f(x,y)dx$. Integrando el primer término de esta ecuación, se tiene: $\int (Xy + X_1)dy = = \frac{1}{2}Xy^2 + X_1y + \varphi(x)$. Luego: $\frac{1}{2}Xy^2 + X_1y + \varphi(x) = -\int (Xy + X_1)f(x,y)dx$. Derivando respecto a x, resulta: $\frac{1}{2}X'y^2 + X_1'y + \varphi'(x) = -(Xy + X_1)f(x,y)$. Luego se tiene que: $f(x,y) = \frac{\frac{1}{2}X'y^2 + X_1'y + \varphi'(x)}{-(Xy + X_1)} = \frac{Ay^2 + By + C}{Dy + E}$.

Z 22- Dada la función $dy + \frac{Ay^2 + By + C}{Dy + E}dx = 0$, en la que A, B, C, D, E son funciones de x, encontrar la condición para que admita un factor integrante de la forma $Xy + X_1$ (siendo X y X_1 funciones de x), obteniendo la integral general.

Solución: Por el problema anterior (Z 21), se tiene: $\frac{Ay^2 + By + C}{Dy + E} = \frac{\frac{1}{2}X'y^2 + X_1'y + \varphi'(x)}{-(Xy + X_1)}$. Luego: $X = -D$, $X_1 = -E$, $X' = 2A$, $X_1' = B$. Por tanto, la condición consiste en las igualdades: $A = -\frac{1}{2}D'$, $B = -E'$. Siendo, por el citado problema: $\int (Xy + X_1)dy = \frac{1}{2}Xy^2 + X_1y + \varphi(x)$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}Xy^2 + X_1y + \varphi(x)\right) = \frac{1}{2}X'y^2 + X_1'y + \varphi'(x) = \frac{Ay^2 + By + C}{Dy + E}(Xy + X_1)$. Sustituyendo en esta igualdad, los valores encontrados más arriba, se tiene la integral general: $Ay^2 + By + \varphi'(x) = -\frac{Ay^2 + By + C}{Dy + E}(Dy + E)$, o lo que es lo mismo: $Ay^2 + By + \chi(x) = 0$.

Z 23- Determinar $f(x)$ si $\int_0^1 f(\theta \bullet x)d\theta = kf(x)$.

Solución: Derivando respecto a x: $\int_0^1 f'_{\theta x}(\theta \bullet x)\theta d\theta = kf'(x)$. Integrando por partes: $\int_0^1 f'_{\theta x}(\theta \bullet x)\theta d\theta = \left| \frac{f(\theta \bullet x)}{x}\theta \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{f(x)}{x}d\theta = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x}\int_0^1 f(\theta \bullet x)d\theta = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x}kf(x)$ (por el enunciado). Luego: $f(x) - kf(x) = xkf'(x)$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1-k}{kx}$, $f(x) = Cx^{\frac{1-k}{k}}$.

Z 24- Integrar $y' - y\coth x = -\sin x \coth x + \cos x$.

Solución: Resolviendo $y' - y\coth x = 0$, se tiene: $y = z\sinh x$, $y' = z'\sinh x + z\cosh x$. Luego: $z'\sinh x + z\cosh x - z\sinh x\coth x + \sin x\coth x - \cos x = 0$. De donde: $z' = \dfrac{\cos x - \sin x\coth x}{\sinh x}$, $z = \dfrac{\sin x}{\sinh x} + C$. La solución es: $y = \sin x + C\sinh x$.

Z 25- Integrar $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$, mediante un factor integrante.

Solución: Siendo la ecuación diferencial $Pdx + Qdy = 0$, y μ un factor integrante, se tiene que: $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$, $\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x$, $Q\mu'_x - P\mu'_y = \mu(P'_y - Q'_x)$, de la que es solución particular: $\dfrac{dx}{Q} = \dfrac{dy}{-P} = \dfrac{d\mu}{\mu(P'_y Q'_x)}$. Luego: $\dfrac{dx}{2xy} = \dfrac{dy}{-(x^2-y^2)} = \dfrac{d\mu}{\mu(-2y-2y)}$, $\dfrac{d\mu}{\mu} = -\dfrac{2dx}{x}$, $\mu = \dfrac{C}{x^2}$. Por tanto, se tiene que: $C\dfrac{x^2-y^2}{x^2}dx + C\dfrac{2xy}{x^2}dy = Cd(\dfrac{x^2+y^2}{x}) = 0$. La solución es: $\dfrac{x^2+y^2}{x} + k = 0$.

Z 26- Se da una función $f(x)$ definida positiva y continua para $x > 0$, e igual a 1 para $x = 1$. Se considera la ecuación diferencial $y'xf(x) - [f(x) + xf'(x)]y = (1 - \ln x)f^2(x)$. Siendo $y = a$ para $x = 1$, se pone $y = F(a,x)$. Haciendo $f(x) = \dfrac{2}{1 + x^\theta}$, con $\theta > 0$, estudiar la serie de término general $U_n = F(a,n)$.

Solución: La ecuación diferencial se puede escribir de la siguiente forma: $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{y}{xf}) = \dfrac{y'xf - y(f + xf'_x)}{x^2f^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln x}{x} + C\right)$. Integrando: $\dfrac{y}{xf} = \dfrac{\ln x}{x} + C$. Para $x = 1$, $\dfrac{a}{1} = \dfrac{\ln 1}{1} + C$, $C = a$. Por tanto, se tiene: $y = F(a,x) = xf\left(\dfrac{\ln x}{x} + a\right) = f(\ln x + ax) =$ $= \dfrac{2(\ln x + ax)}{1 + x^\theta}$. Luego: $U_n = \dfrac{2(\ln n + an)}{1 + n^\theta}$, que tiene signo constante positivo a partir de un cierto valor de n, para el que: $\ln n + an > 0$. Como: $U_n = \dfrac{2(\ln n + an)}{1 + n^\theta} < \dfrac{2a}{n^{\theta-1}}$, la serie, comparándola con la armónica, es convergente para $\theta > 2$, siendo divergente para $\theta \leq 2$.

Z 27- Se da una función $f(x)$ definida positiva y continua para $x > 0$, e igual a 1 para $x = 1$. Se considera la ecuación diferencial $y'xf(x) - [f(x) + xf'(x)]y = f^2(x)(1 - \ln x)$. Siendo $y = a$ para $x = 1$, se pone $y = F(a,x)$. Haciendo $f(x) = e^{1-x}$, estudiar la serie de término general $U_n = F(a,n)$.

Solución: La ecuación diferencial se puede escribir de la siguiente forma: $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{y}{xf}) = \dfrac{y'xf - y(f + xf'_x)}{x^2f^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln x}{x} + C\right)$. Integrando: $\dfrac{y}{xf} = \dfrac{\ln x}{x} + C$. Para $x = 1$, $\dfrac{a}{1} = \dfrac{\ln 1}{1} + C$, $C = a$. Por tanto: $y = F(a,x) = xf\left(\dfrac{\ln x}{x} + a\right) = f(\ln x + ax) =$ $= e^{1-x}(\ln x + ax)$. Luego: $U_n = e^{1-n}(\ln n + an)$, que tiene signo constante positivo a partir de un cierto valor de n, para el que $\ln n + an > 0$. Siendo: $U_n = \dfrac{\ln n + an}{e^{n-1}} < \dfrac{n^2}{e^n}$, y como: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n^2}}{e} = \dfrac{1}{e}$, la serie es convergente.

Z 28- Sea $G(x,y)$ un factor integrante de la ecuación $dy - f(x,y)dx = 0$. Probar que la función $U(x,y) = \dfrac{d}{dy}\ln G$, satisface a la ecuación $U'_x + fU'_y + Uf'_y + f''_{y^2} = 0$, y determinar la forma de $f(x,y)$ para que esta última ecuación admita una solución $U = U(x)$ dependiente sólo de x.

Solución: Siendo: $U = \dfrac{d}{dy}\ln G = \dfrac{G'_y}{G}$, $U'_x = \dfrac{G''_{xy} - G'_xG'_y}{G^2}$, $U'_y = \dfrac{G''_{y^2}G - G'^2_y}{G^2}$. Sustituyendo estos valores en: $U'_x + fU'_y + Uf'_y + f''_{y^2} = 0$ [**A**], se obtiene la siguiente ecuación: $G''_{xy}G - G'_xG'_y + f(G''_{y^2}G - G'^2_y) + GG'_yf'_y + G^2f''_{y^2} = 0$ [**B**] Por ser G factor integrante de

$dy - fdx = 0$, se tiene que: $G'_x = -(Gf)'_y$, es decir: $G'_x + G'_y f + Gf'_y = 0$ [**C**], cuya derivada respecto a y es: $G''_{xy} + G''_{y^2}\, f + G'_y\, f'_y + G'_y\, f'_y + G\, f''_{y^2} = 0$. Multiplicando esta ecuación por G y teniendo en cuenta la igualdad [**C**], se obtiene la ecuación [**B**], con lo que queda demostrado que la función U satisface la ecuación [**A**]. Para determinar la forma de f, se parte de $U = \frac{G'_y}{G}$, independiente de y. Se tiene: $G'_y = GU(x)$, $\frac{dG}{G} = U(x)dy$, $\ln G = U(x)y + C$, $G = e^{U(x)y+C}$, $G'_x = GyU'_x$, $G'_y = GU$. Como: $G'_x = -f'_y G - fG'_y$, se tiene: $GU'_y + f'_y G + fGU = 0$, es decir: $f'_y + Uf + U'_y = 0$. Esta ecuación lineal, en la que la función es f, y la variable es y, tiene como solución: $f = ke^{-Uy} - \frac{U'}{U}y + \frac{U'}{U^2}$. Es decir: $f(x,y) = ke^{Ay} + By + C$, siendo A, B, C, funciones exclusivamente de x.

Z 29- Integrar $y'' + y'\tan x = \sin 2x$.

Solución: Haciendo: $y' = p$, $y'' = p'$, se tiene: $p' + p\tan x - \sin 2x = 0$. Resolviendo esta ecuación lineal: $p = y' = -\cos x(2\cos x + k)$, se obtiene la solución: $y = -x - \sin x\cos x - k\sin x + C$.

Z 30- Resolver la ecuación $r(q^2+1) - 2spq + t(p^2+1) = 0$, en la que z es función exclusivamente de $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, siendo $p = z'_x$, $q = z'_y$, $r = z''_{x^2}$, $s = z''_{xy}$, $t = z''_{y^2}$.

Solución: Haciendo el cambio: $w = \rho^2 = x^2 + y^2$, $p = z'_x = z'_w w'_x = z'2x$, $q = z'_y = z'2y$, $r = z''_{x^2} = (z'_w w'_x)'_x = (z'2x)'_x = z''_{w^2} w'_x 2x + 2z' = z''4x^2 + 2z'$, $s = (z'_x)'_y = z''4xy$, $t = z''4y^2 + 2z'$. Introduciendo estos valores en la ecuación diferencial dada, se obtiene que: $(z''4x^2 + 2z')(z'^2 4x^2 + 1) - 2z'4xyz'2xz'2y + (z''4y^2 + 2z')(z'^2 4x^2 + 1) = 0$. Simplificando e introduciendo: $w = x^2 + y^2$, se obtiene: $z''w + 2z'^3 w + z' = 0$. Haciendo: $\frac{1}{z'^2} = u$, se tiene la ecuación lineal: $u' - 2\frac{u}{w} - 4 = 0$, cuya solución es: $u = Aw^2 - 4w$. Es decir: $z'^2 = \frac{1}{Aw^2 - 4w}$, $z' = \frac{1}{\pm\sqrt{Aw^2 - 4w}}$. Luego: $z = \pm\int\sqrt{Aw^2 - 4w}\,dw = \pm\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left(2 - Aw + \sqrt{A^2w^2 - 4Aw}\right) + C =$ $= \pm\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left(2 - A\rho^2 + \rho\sqrt{A^2\rho^2 - 4A}\right) + C$, siendo A y C constantes.

Z 31- En la ecuación $x^2y'' + 2nxy' + [n(n-1) - h^2x^2]y = 0$, se reemplaza y por el producto uv, donde u, v son funciones de x, obteniéndose una ecuación diferencial lineal de segundo orden respecto a v, cuyos coeficientes son funciones de x, u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$. Determinar la función u de forma que el coeficiente de $\frac{dv}{dx}$ sea nulo y resolver la ecuación.

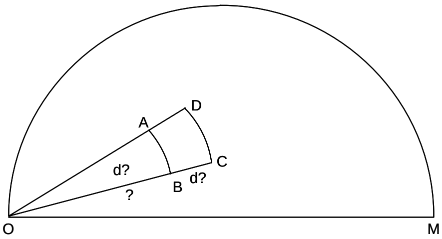
Solución: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$. Sustituyendo estos valores en la ecuación dada, se tiene: $u''v + 2u'v' + uv'' + \frac{2n}{x}(u'v + uv') + \left[\frac{n(n-1)}{x^2} - h^2\right]uv = 0$, siendo el coeficiente de v': $2u' + \frac{2nu}{x} = 0$. Luego: $u = kx^{-n}$, $u' = -nkx^{-n-1}$, $u'' = n(n+1)kx^{-n-2}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación, se tiene: $v'' - h^2v = 0$, $v''v' = h^2vv'$. Integrando esta ecuación, se tiene: $v'^2 = h^2v^2 + k$, $v' = \sqrt{h^2v^2 + k}$, $\frac{dv}{\sqrt{h^2v^2+k}} = dx$, $x = A\sinh(hv + B)$, $v = \frac{1}{h}\left(\text{arg sinh}\,\frac{x}{A} - B\right)$. La solución es: $y = uv = \frac{C}{h}x^{-n}\left(\text{arg sinh}\,\frac{x}{A} - B\right)$.

Z 32- Integrar $xy'' + 2y' + axy = 0$.

Solución: $y'' + \frac{2}{x}y' + ay = 0$, $y = uv$, $y' = uv' + u'v$, $y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$. Sustituyendo estos valores en la ecuación: $uv'' + 2(u' + \frac{u}{x})v' + \left(u'' + \frac{2u'}{x} + au\right)v = 0$. Haciendo que el coeficiente de v' sea nulo: $u' + \frac{u}{x} = 0$, $u = \frac{A}{x}$, $u' = -\frac{A}{x^2}$, $u'' = \frac{2A}{x^3}$. Luego la ecuación queda: $v'' + av = 0$, $v''v' + avv' = 0$. Integrando esta ecuación, se tiene: $v'^2 + av^2 = 0$, $v' = v\sqrt{-a}$, $v = Be^{\pm x\sqrt{-a}}$. Por tanto: $y = uv = \frac{A}{x}Be^{\pm x\sqrt{-a}} = \frac{C}{x}e^{\pm x\sqrt{-a}}$. Si $a < 0$, la integral general es: $y = \frac{1}{x}(Ae^{x\sqrt{-a}} + Be^{-x\sqrt{-a}})$. Si $a > 0$, la integral general es: $y = \frac{1}{x}(A\cos ax + B\sin ax)$.

Z 33- Una cierta población de densidad constante Δ, está distribuida en un semicírculo de 10 km de radio. En un momento dado se ordena evacuar a la población, para lo cual se dirigen en línea recta hacia un extremo O del diámetro del semicírculo. Las bajas producidas durante la evacuación corresponden, por cada km andado, al 5% de la población que inicialmente se pone en movimiento. Hallar la relación entre las bajas y la población finalmente evacuada.

Solución:



Con centro O y radios ρ y $\rho + d\rho$, se traza una corona circular en la que dos radios que forman entre sí un ángulo $d\theta$, delimitan un elemento de superficie $ABCD$, de forma que: $OA = OB = \rho$, $OC = OD = \rho + d\rho$, $AB = \rho d\theta$. El área de $ABCD$ es: $AB \cdot BC = \rho d\theta d\rho$, y su población inicial: $\Delta\rho d\theta d\rho$. Las bajas por cada km recorrido son: $\frac{5}{100}\Delta\rho d\theta d\rho$, por lo que las bajas totales hasta llegar a O, son: $\frac{5}{100}\Delta\rho^2 d\theta d\rho$. Las bajas del conjunto de la población, son: $\iint \frac{5}{100}\Delta\rho^2 d\theta d\rho = \frac{5}{100}\Delta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{20\cos\theta} \rho^2 d\rho = \frac{5\Delta}{100}\frac{20^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta = \frac{5\Delta}{100}\frac{20^3}{3}\frac{2!!}{3!!} = = \frac{800}{9}\Delta.$ La población inicial es: $\frac{1}{2}\pi 100\Delta = 50\pi\Delta$. El número de evacuados es: $50\pi\Delta - \frac{800}{9}\Delta = \frac{450\pi - 800}{9}\Delta$. La relación pedida es: $\dfrac{\frac{800}{9}\Delta}{\frac{450\pi - 800}{9}\Delta} = \frac{16}{9\pi - 16} \simeq 1,3$ (la relación entre las bajas y la población inicial es: $\dfrac{\frac{800}{9}\Delta}{50\pi\Delta} = \frac{16}{9\pi} \simeq 56,6\%$).

Z 34- Se da la ecuación diferencial $ay'' - xy' + by = 0$, en la que a y b son constantes reales. 1º) Encontrar una serie entera $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots$, que satisfaga a la ecuación. 2º) Comprobar que: a).los coeficientes λ_0 y λ_1 son arbitrarios; b) la serie puede escribirse en la forma $\lambda_0\varphi(x,a,b) + \lambda_1\psi(x,a,b)$, donde φ y ψ son dos series enteras en x, cuyos coeficientes son funciones de a y b; c) las series son convergentes; d) las funciones φ y ψ satisfacen a la ecuación diferencial; e) sus derivadas φ' y ψ' satisfacen cada una de ellas a una ecuación que en ambos casos tienen la misma forma. 3º) Expresar $\varphi'(x,a,b)$ y $\psi'(x,a,b)$ en función de $\varphi(x,a,b-1)$ y $\psi(x,a,b-1)$. 4º) Cuando b es entero y positivo, la serie φ o la serie ψ, según que b sea par o impar, son polinomios. 5º) Discutir según el signo de a, la realidad de las raíces de estos polinomios φ y ψ según la paridad de b.

Solución: 1º) Al introducir en la ecuación los valores de $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n + \ldots$, y de sus derivadas: $y' = \lambda_1 + 2\lambda_2 x + \ldots + (n+1)\lambda_{n+1}x^n + \ldots$, $y'' = 2\lambda_2 + \ldots + (n+2)(n+1)\lambda_{n+2}x^n + \ldots$, se obtiene la siguiente ecuación: $a(2\lambda_2 + \ldots) - x(\lambda_1 + 2\lambda_2 x + \ldots) + b(\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots) = 0$, siendo: $a(n+2)(n+1)\lambda_{n+2} - n\lambda_n + b\lambda_n$ el coeficiente del término general en x^n, cuya anulación, para que se cumpla la ecuación, da: $\lambda_{n+2} = \frac{(n-b)\lambda_n}{a(n+2)(n+1)}$. Dando a n el valor par: $2p-2$, se tiene: $\lambda_{2p} = (-1)^p \frac{b(b-2)(b-4)\ldots[b-(2p-2)]}{a^p(2p)!}\lambda_0$. Y dando el valor impar: $2p-1$, se tiene: $\lambda_{2p+1} = (-1)^p \frac{(b-1)(b-3)\ldots[b-(2p-1)]}{a^p(2p-1)!}\lambda_1$. 2º) a) De las expresiones anteriores de λ_{2p} y λ_{2p+1}, se deduce que λ_0 y λ_1 pueden tomar cualquier valor arbitrario. b) Llamando: $\varphi(x,a,b) = \sum \frac{\lambda_{2p}}{\lambda_0}x^{2p}$, $\psi(x,a,b) = \sum \frac{\lambda_{2p+1}}{\lambda_0}x^{2p+1}$, la serie se puede poner en la forma: $y = \lambda_0\varphi(x,a,b) + \lambda_1\psi(x,a,b)$. c) En cada una de estas series la relación de un término al anterior es: $\frac{\lambda_{n+2}}{\lambda_n} = \frac{n-b}{a(n+2)(n+1)}x^2$, que tiende a cero cuando $n \to \infty$, luego las dos series son convergentes y por tanto también lo es la serie y. d) Cuando uno de los valores λ_0, λ_1, toma el valor cero, la serie y se hace idéntica a una de las series φ o ψ, y cada una de ellas verifica a la ecuación dada. e) La derivada de la ecuación dada es: $ay''' - xy'' + (b-1)y' = 0$; haciendo: $z = y'$, se tiene: $az'' - xz' + (b-1)z = 0$; las funciones φ y ψ satisfacen a la ecuación dada, y sus derivadas lo hacen a esta última ecuación que es de la misma forma que aquélla. 3º) Esta última ecuación (de función z), no difiere de la dada más que en la sustitución de b por $b-1$, luego se pueden escribir las siguientes igualdades: $\varphi'(x,a,b) = \alpha\varphi(x,a,b-1) + \beta\psi(x,a,b-1)$, $\psi'(x,a,b) = \gamma\varphi(x,a,b-1) + \delta\psi(x,a,b-1)$. Los valores de α, β, γ, δ se obtienen introduciendo en estas dos relaciones las expresiones: φ y ψ, φ' y ψ', en sus desarrollos en serie, e identificando los dos miembros se obtiene: $\alpha = 0$, $\beta = 2\frac{\lambda_2}{\lambda_0} = -\frac{b}{a}$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, resultando: $\varphi'(x,a,b) = -\frac{b}{a}\psi(x,a,b-1)$, $\psi'(x,a,b) = \varphi(x,a,b-1)$. 4º).Si $b = 2p$, la serie está limitada en el término de exponente $2p$, es decir, en x^{2p}, luego es un polinomio. De forma similar, si $b = 2p+1$, se limita en el término x^{2p+1}. 5º) Si a es negativo y b par, φ tiene todos sus términos positivos, y como son de grado par, no tiene raíces reales. Si a es positivo, para estudiar las raíces de φ se considera que este polinomio y sus derivadas sucesivas satisfacen a las siguientes relaciones: $b\varphi = x\varphi' - a\varphi''$, $(b-1)\varphi' = x\varphi'' - a\varphi''', \ldots$, $[b-(2p-2)]\varphi^{(2p-2)} = x\varphi^{(2p-1)} - a\varphi^{(2p)}$. Estas relaciones demuestran que: a) en la serie de funciones no pueden anularse dos consecutivas simultáneamente, pues en este caso serían nulas todas las φ, lo que no es posible por ser $\varphi^{2p)}$ una constante; b) si se anula una función $\varphi^{(k)}$, las dos funciones $\varphi^{(k-1)}$, $\varphi^{(k+1)}$ son de distinto signo. Además, $\frac{\varphi}{\varphi'}$ pasa de negativo a positivo, anulándose cuando x varía de $-\infty$ a $+\infty$. El número de variaciones de las $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(2p)}$ no cambia cuando se anula una intermedia, pero esta serie pierde una variación cada vez que x anula a φ. El número de raíces reales de φ es igual al número de variaciones perdidas al pasar x de $-\infty$ a $+\infty$. Para $x = -\infty$, esta serie tiene sus términos alternativamente positivos y negativos, y para $x = +\infty$ todos son positivos, luego φ tiene $2p$ raíces reales. Si b es impar, ψ de grado $2p+1$ admite siempre la raíz $x = 0$; si a es negativo, ψ no tiene otra raíz real, y si a es positivo, se demuestra de forma similar a lo hecho con φ, que todas las raíces de ψ son reales.

Z 35- Resolver la ecuación $(x+y+2)y' + x + y - 1 = 0$.

Solución: Despejando y', se tiene: $y' = \frac{-x-y+1}{x+y+2}$. Haciendo el cambio: $z = -x-y$, $z'_x = -1-y'$, $-y' = z'_x + 1 = \frac{x+y-1}{x+y+2} = \frac{-z-1}{-z+2}$, $z'_x = \frac{3}{z-2} = \frac{dz}{dx}$. Luego: $(z-2)dz = 3dx$. Integrando: $\frac{z^2}{2} - 2z = 3x + C$. Operando: $(x+y)^2 + 4(x+y) - 6x + k = 0$. La solución es: $x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 4y + k = 0$.

Z 36- Resolver la ecuación $\sqrt{x}\,y' - y + (1 - 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$.

Solución: Operando: $y' - \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{y} = 0$, $y^{-\frac{1}{2}}y' - \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Haciendo el cambio: $2y^{\frac{1}{2}} = t$, $y^{-\frac{1}{2}}y' = t'$, se tiene: $t' - \frac{t}{2\sqrt{x}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, ecuación lineal cuya solución es: $t = Ce^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} - 2$, es decir: $y = \frac{t^2}{4} = (ke^{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} - 1)^2$.

Z 37- Resolver la ecuación $y' + 2xy + xy^4 = 0$ (ecuación de Bernouilli).

Solución: $y^{-4}y' + 2xy^{-3} + x = 0$. Haciendo: $t = y^{-3}$, $t' = -3y^{-4}y'$, se tiene: $-\frac{t'}{3} + 2xt + x = 0$. Aplicando el factor integrante e^{-3x^2}, se tiene: $te^{-3x^2} = \int 3xe^{-3x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-3x^2} + C$. Luego la solución es: $y^3 = \frac{1}{-\frac{1}{2} + Ce^{3x^2}}$.

Z 38- Resolver la ecuación $y'x^3\sin y = xy' - 2y$.

Solución: Dividiendo por y', y suponiendo que x es función de y, se tiene: $2yx' - x = -x^3\sin y$ (ecuación de Bernouilli). Haciendo el cambio: $t(y) = x^{-2}$, se tiene la ecuación lineal:

$yt' + t = \sin y$, cuya solución es: $t = \frac{C}{y} - \frac{\cos y}{y}$. Luego la solución pedida es: $\frac{1}{x^2} = \frac{C}{y} - \frac{\cos y}{y}$, es decir: $y + x^2\cos y - Cx^2 = 0$.

Z 39- Hallar la integral general de la ecuación de Riccati $y' - x^2 + 2xy - y^2 = 0$. Previamente se calculará una solución lineal del tipo $y = mx + n$.

Solución: Introduciendo en la ecuación dada los valores: $y = mx + n$, $y' = m$, se tiene: $m - x^2 + 2x(mx+n) - (mx+n)^2 = 0$, es decir: $x^2(-1 + 2m - m^2) + x(2n - 2mn) + m - n^2 = 0$. Anulando los coeficientes de esta ecuación, se tiene el siguiente sistema de tres ecuaciones: $-1 + 2m - m^2 = 0$, $2n - 2mn = 0$, $m - n^2 = 0$, cuyas soluciones son: $m = 1$, $n = \pm 1$, por lo que hay dos soluciones particulares lineales: $y_1 = x + 1$, $y_2 = x - 1$. Haciendo el cambio: $t = \frac{y - y_1}{y - y_2}$, $y = \frac{ty_2 - y_1}{t - 1}$, se obtiene la ecuación: $\frac{dt}{t} = f(x)(y_1 - y_2)dx = 2\,dx$, cuya solución es: $t = Ce^{2x}$. Por tanto, la solución pedida es: $y = \frac{Ce^{2x}(x-1) - x - 1}{Ce^{2x} - 1}$.

Z 40- Resolver la ecuación $yy'^2 + xy'^3 + 1 = 0$.

Solución: Despejando y, en la ecuación dada, se tiene: $y = -xy' - \frac{1}{y'^2}$. Derivando esta ecuación: $y' = -y' - xy'' + \frac{2y''}{y'^3}$. Haciendo el cambio: $y' = p$, se tiene: $2p + xp' - \frac{2p'}{p^3} = 0$, es decir: $2p + x\frac{dp}{dx} - 2\frac{dp}{p^3dx} = 0$, o bien: $2pdx + xdp - 2\frac{dp}{p^3} = 0$. Luego: $\frac{dx}{dp} = \frac{\frac{2}{p^3} - x}{2p}$, es decir: $\frac{dx}{dp} = -\frac{x}{2p} + \frac{1}{p^4}$, ecuación lineal, cuya solución es: $x = \frac{C}{\sqrt{p}} - \frac{2}{5p^3}$. Por tanto: $y = -xy' - \frac{1}{y'^2} = -\left(\frac{C}{\sqrt{p}} - \frac{2}{5p^3}\right)p - \frac{1}{p^2} = -C\sqrt{p} - \frac{3}{5p^2}$ (la solución de la ecuación dada está dada por estas dos ecuaciones que definen los valores de x e y en función del parámetro p).

Z 41- Resolver $m^2yy'^2 + (2x - 2n)y' - y = 0$.

Solución: Haciendo el cambio: $y^2 = t$, $y = t^{\frac{1}{2}}$, $y' = \frac{t'}{2t^{\frac{1}{2}}}$, se tiene la ecuación: $m^2t^{\frac{1}{2}}\frac{t'^2}{4t} + (2x - 2n)\frac{t'}{2t^{\frac{1}{2}}} - t^{\frac{1}{2}} = 0$. Operando: $m^2t'^2 + 4(x-n)t' - 4t = 0$, es decir: $t = t'x + \frac{m^2}{4}t'^2 - nt'$, ecuación de Claireaut, cuya solución es: $t = y^2 = Cx + \frac{C^2}{4}m^2 - nC$.

Z 42- Resolver $y = 3xy' + 6y^2y'^2$.

Solución: $y^3 = 3xy^2y' + 6y^4y'^2$. Haciendo el cambio: $y^3 = t$, $y' = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}t'$, se tiene: $t = 3xt^{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}t' + 6t^{\frac{4}{3}}\frac{1}{9}t^{-\frac{4}{3}}t'^2 = xt' + \frac{2}{3}t'^2$, ecuación de Claireaut, cuya solución es: $t = y^3 = Cx + \frac{2}{3}C^2$.

Z 43- Resolver la ecuación $4x^2y'' + 4xy' + (x^2 - 1)y = 0$, sabiendo que $y(\pi) = 1$, $y(2\pi) = 0$.

Solución: $y'' + \frac{y'}{x} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2})y = 0$. Se trata de una ecuación de Bessel, en la que: $k = \frac{1}{2}$ y $\nu = \frac{1}{2}$, teniéndose: $y'' + \frac{y'}{x} + (k^2 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0$. La integral es: $y = AJ_{\frac{1}{2}}(\frac{x}{2}) + BJ_{-\frac{1}{2}}(\frac{x}{2}) = A\sqrt{\frac{2}{\pi\frac{x}{2}}}\sin\frac{x}{2} + B\sqrt{\frac{2}{\pi\frac{x}{2}}}\cos\frac{x}{2} = A\frac{2}{\sqrt{\pi x}}\sin\frac{x}{2} + B\frac{2}{\sqrt{\pi x}}\cos\frac{x}{2}$. Para $x = \pi$, $y = A\frac{2}{\pi} = 1$, $A = \frac{\pi}{2}$. Para $x = 2\pi$, $y = B\frac{-2}{\pi\sqrt{2}} = 0$, $B = 0$. Luego la solución es: $y = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\sin\frac{x}{2}$.

Z 44- Demostrar que $e^{\frac{1}{2}x(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^nJ_n(x)$, representando $J_n(x)$ a las funciones de Bessel de primera especie (es decir: $e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} = J_0(x) + tJ_1(x) + \ldots + t^k J_k(x) + \ldots + \frac{1}{t}J_{-1}(x) + \ldots + \frac{1}{t^k}J_{-k}(x) + \ldots$).

Solución: $e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{xt}{2}} \cdot e^{-\frac{xt}{2}}$. Desarrollando en serie de potencias estos dos factores, se tiene: $\left[1 + \frac{xt}{2} + \frac{x^2t^2}{2^2 \cdot 2!} + \ldots + \frac{x^nt^n}{2^n \cdot n!} + \ldots\right] \cdot \left[1 - \frac{x}{2t} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!t^2} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{2^n \cdot n!t^n} + \ldots\right]$. El coeficiente de t^0 es: $1 - (\frac{x}{2})^2 + \frac{1}{(2!)^2}(\frac{x}{2})^4 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(n!)^2}(\frac{x}{2})^{2n} + \ldots = J_0(x)$. El coeficiente de t^k es: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(k+n)!}(\frac{x}{2})^{k+2n} = J_k(x)$. El coeficiente de t^{-k} es: $(-1)^k J_k(x) = J_{-k}(x)$. Luego: $e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} = \sum_{-k=-\infty}^{-1} t^{-k}J_{-k}(x) + J_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} t^k J_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x)$.

Z 45- Resolver mediante desarrollo en serie, la ecuación: $y'' = x^2 + y$.

Solución: Se tiene que: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$, $y' = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$, $y'' = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$ Sustituyendo estos valores en la ecuación dada, se tiene: $2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots = a_0 + a_1x + (a_2+1)x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ Por tanto: $2a_2 = a_0$, $a_2 = \frac{a_0}{2}$, $2 \cdot 3a_3 = a_1$, $a_3 = \frac{a_1}{2 \cdot 3}$. De la misma forma se obtienen: $a_4 = \frac{a_0}{4!} + \frac{1}{3 \cdot 4}$, $a_5 = \frac{a_1}{5!}$, $a_6 = \frac{a_0}{6!} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$, etc. El desarrollo final es: $y = a_0\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^6}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots =$
$= a_0 \cosh x + a_1 \sinh x + 2\left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) = a_0 \cosh x + a_1 \sinh x + 2(\cosh x - 1 - \frac{x^2}{2}) =$
$= A\cosh x + B\sinh x - x^2 - 2 = Ce^x + De^{-x} - x^2 - 2$.

Z 46- Resolver la ecuación $(x+2)^2y'' - (x+2)y' + y = 3x + 4$ (ecuación lineal de Legendre).

Solución: Haciendo el cambio: $x + 2 = e^z$, se tiene: $e^{2z}y'' - e^zy' + y = 3e^z - 2$. Luego siendo D el operador que indica la derivación respecto a la variable independiente x, se tiene: $[D(D-1) - D + 1]y - (D-1)^2y = 3e^z - 2$. La integral general es: $y = C_1e^z + C_2ze^z$, siendo una integral particular: $y = \frac{1}{(D-1)^2}(3e^z - 2) = 3e^z \iint (dz)^2 - 2\frac{1}{(D-1)^2}e^z = \frac{3}{2}z^2e^z - 2$. Luego la solución es: $y = C_1e^z + C_2ze^z + \frac{3}{2}z^2e^z - 2 = (x+2)\left[C_1 + C_2\ln(x+2) + \frac{3}{2}(\ln(x+2))^2\right] - 2$.

Z 47- Resolver la ecuación $y'' - y = x^2 - 1$, mediante la transformación de Laplace, sabiendo que $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Solución: La función transformada de Laplace es: $\eta(p) = \int_0^{\infty} e^{-px}y(x)dx$, siendo $y(x)$ la función generatriz de η. Es decir: $\eta(p) = \mathcal{L}[y(x)]$, $y(x) = \mathcal{L}^{-1}[\eta(p)]$. Por tanto, aplicando esta transformación, se tiene que: $p^2\eta - p - 2 - \eta = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p}$, $(p^2-1)\eta = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} + p + 2$, $\eta = \frac{p^4 + 2p^3 - p^2 + 2}{p^3(p^2-1)} = \frac{p^3 + p^2 - 2p + 2}{p^3(p-1)} = \frac{A}{p^3} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p} + \frac{D}{p-1} = \frac{-2}{p^3} - \frac{1}{p} + \frac{2}{p-1}$. Invirtiendo la transformación, se tiene: $y = \mathcal{L}^{-1}(\eta) = -x^2 - 1 + 2e^x$.

Z 48- Resolver la ecuación: $x^2r - y^2t + px - qy = x^2$, siendo $z'_x = p$, $z'_y = q$, $z''_{x^2} = r$, $z''_{y^2} = t$.

Solución: Haciendo el cambio: $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$, se tienen los siguientes valores: $p = yz'_u + \frac{1}{y}z'_v$, $q = xz'_u - \frac{z}{y^2}z'_v$, $r = y^2z''_{u^2} + 2z''_{uv} + \frac{1}{y^2}z''_{v^2}$, $t = x^2z''_{u^2} - 2\frac{x^2}{y^2}z''_{uv} + \frac{x^2}{y^4}z''_{v^2} + \frac{2x}{y^3}z'_v$. Sustituyendo en la ecuación dada, se tiene: $4x^2z''_{uv} = x^2$, $z''_{uv} = \frac{1}{4}$. Luego: $z'_u = \int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}u + \psi(v)$, $z = \int\left(\frac{1}{4}u + \psi(v)\right)dv = \varphi_1(v) + \varphi_2(u) + \frac{1}{4}uv = \varphi_1(\frac{x}{y}) + \varphi_2(xy) + \frac{1}{4}x^2$, con $\frac{d}{dv}\varphi_1(v) = \psi(v)$.

Z 49- Hallar la ecuación de las curvas cuyo radio de curvatura es $R = \frac{1}{m}(m^2 + l^2)$, siendo m una constante y l la longitud de la curva.

Solución: $R = \frac{dl}{d\theta} = \frac{m^2 + l^2}{m}$, $d\theta = \frac{mdl}{m^2 + l^2}$. Luego: $\theta = \arctan\frac{l}{m}$, $\tan\theta = \frac{l}{m}$,

$\cos\theta = \frac{m}{\sqrt{m^2+l^2}}$, $\sin\theta = \frac{l}{\sqrt{m^2+l^2}}$. Por tanto: $x = \int_0^l \frac{m\,dl}{\sqrt{m^2+l^2}} = m\ln\left(\frac{l}{m} + \sqrt{1+\frac{l^2}{m^2}}\right)$, $y = \int_0^l \frac{l\,dl}{\sqrt{m^2+l^2}} = \sqrt{m^2+l^2}$. Luego: $e^{\frac{x}{m}} = \frac{l}{m} + \sqrt{1+\frac{l^2}{m^2}}$, $(e^{\frac{x}{m}} - \frac{l}{m})^2 = 1 + \frac{l^2}{m^2}$, $e^{\frac{2x}{m}} - \frac{2l}{m}e^{\frac{x}{m}} - 1 = 0$, $l = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)$. Como: $y^2 = m^2 + l^2 = m^2 + \frac{m^2}{4}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)^2 =$ $= \frac{m^2}{4}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)^2$, la ecuación pedida es: $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = m\cosh\frac{x}{m}$.

Z 50- Resolver la ecuación $qs = pt$, .siendo $z'_x = p$, $z'_y = q$, $z''_{xy} = s$, $z''_{y^2} = t$.

Solución: $s = p'_y$, $t = q'_y$. Luego: $\frac{\frac{dp}{dy}}{p} = \frac{\frac{dq}{dy}}{q}$. Por tanto: $\ln p = \ln q + \ln f(x)$, donde $f(x)$ es una función exclusivamente de x. Es decir: $\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy}f(x) = 0$. De donde: $dy = f(x)dx$, $dz = 0$. Es decir: $y = \int f(x)dx + C_1$, $C_1 = y + \varphi(x)$, $C_2 = z$. Se deduce que: $z = F[y + \varphi(x)]$. En efecto: $p = F' \cdot \varphi'$, $q = F'$, $s = F'' \cdot \varphi'$, $t = F''$, $\varphi' = \frac{p}{q} = \frac{s}{t}$, $pt = qs$.

Z 51- Resolver $(x - x^2)y'' + 4(1-x)y' - 2y = 0$ (ecuación de Gauss), mediante desarrollo en serie.

Solución: La ecuación de Gauss es: $(x-x^2)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$. En la ecuación del enunciado: $\alpha + \beta + 1 = 4$, $\gamma = 4$, $\alpha\beta = 2$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtienen dos conjuntos de valores: $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 4$ y $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$. Para cualquiera de estos dos conjuntos se tiene la serie hipergeométrica: $y_1 = F(1,2,4,x) = F(2,1,4,x) =$ $= 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots$ Introduciendo los valores encontrados, se obtiene: $y_1 = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{10} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{7} + \frac{3x^5}{28} + \ldots$ La serie: $y_2 = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, \alpha) = x^{-3}F(-2,-1,-2,x) = x^{-3}F(-1,-2,-2,x) = x^{-3}(1-x)$, pues al ser $\gamma = 4$, el cuarto término de y_2 tiene cero por denominador, siendo nulo uno de los dos factores del tercer término, es decir: $\alpha - \gamma + 2 = 0$, o bien: $\beta - \gamma + 2 = 0$. Por tanto, la solución es: $y = C_1F(1,2,4,x) + C_2\frac{1-x}{x^3}$.

Z 52- Hallar la ecuación diferencial de todas las circunferencias del plano.

Solución: Ecuación de la circunferencia de centro (α,β) y radio R: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0$. Derivando: $x - \alpha + (y-\beta)y' = 0$. Volviendo a derivar: $1 + y'^2 + y''(y-\beta) = 0$. Volviendo a derivar: $2y'y'' + y'''(y-\beta) + y''y' = 0$. Eliminando $y - \beta$, entre las dos últimas ecuaciones, se tiene la ecuación pedida: $\frac{1+y'^2}{y''} = \frac{3y''y'}{y'''}$, es decir: $y'''(1+y'^2) - 3y'y''^2 = 0$.

Z 53- Hallar la ecuación diferencial de todas las curvas de segundo grado.

Solución: Sea la ecuación general: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. O bien: $x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. Derivando sucesivamente cinco veces, se tiene: $2x + 2By + 2Bxy' + 2Cyy' + 2D + 2Ey' = 0$; $2 + 4By' + 2Bxy'' + 2Cy'^2 + 2Cyy'' + 2Ey'' = 0$; $6By'' + 2Bxy''' + 6Cy'y'' + 2Cyy''' + 2Ey''' = 0$; $8By''' + 2Bxy^{iv} + 6Cy''^2 + 2Cyy^{iv} + 2Ey^{iv} = 0$; $10By^{iv} + 2Bxy^{v} + 12Cy'y''' + 8Cy''y''' + 8Cy'y^{iv} + 2Cy'y^{iv} + 2Cyy^{v} + 2Ey^{v} = 0$. De las ecuaciones correspondientes a la 2ª, 3ª y 4ª derivada, se obtienen los valores: $B = \frac{3y''y^{iv} - 4y'''^2}{M}$, $C = \frac{3y''^2y''' + 4y'y'''^2 - 3y'y''y^{iv}}{M}$, siendo: $M = 3y'^2y''y^{iv} - 4y'^2y'''^2 - 6y'y''^2y''' + 9y''^4$. Eliminando E entre las ecuaciones de la 2ª y 5ª derivada, y sustituyendo en la expresión resultante los valores encontrados de B y C, se tiene la ecuación pedida: $9y''^2y^{v} - 45y''y'''y^{iv} + 40y'''^3 = 0$.

Z 54- Resolver la ecuación: $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$.

Solución: $\frac{ds}{dt} = e^s - 1$, $\frac{ds}{e^s - 1} = dt$. Integrando: $\ln\frac{e^s-1}{e^s} = t + \ln C$, $s = -\ln(1 + Ce^t)$.

Z 55- Resolver la ecuación: $y' = \cos(y - x)$.

Solución: Haciendo: $z = y - x$, $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$. Luego: $y' = \frac{dz}{dx} + 1 = \cos z$, $dx = \frac{dz}{\cos z - 1}$, $x = \cot\frac{z}{2} + C = \cot\frac{y-x}{2} + C$. Es también solución: $z = 2k\pi$, es decir: $y = x + 2k\pi$.

Z 56- Un depósito contiene $1\,\mathrm{m}^3$ de agua salada, siendo $50\,\mathrm{kg}$ la cantidad de sal disuelta. En un momento dado se abre un grifo por el que entran en el depósito 10 litros de agua por minuto, que se supone se mezclan instantáneamente con la disolución contenida en el depósito. Simultáneamente se abre un orificio de salida, por el que salen del depósito 10 litros de la disolución por minuto. ¿Qué cantidad de sal quedará en el depósito al cabo de 30 minutos? (se supone que el peso específico de la sal es similar al del agua).

Solución: La cantidad de sal existente cuando ha transcurrido el tiempo t, es $y(t)$ kg, por lo que su concentración es: $\frac{y}{1000}$. La sal que sale del depósito es: $\frac{y}{1000}10dt$. Luego: $dy = -0,01ydt$. Integrando: $y = Ce^{-0,01t}$. Para $t = 0$, $y = 50$, $C = 50$. Luego: $y = 50e^{-0,01t}$. El valor de y para $t = 30$, es: $y(30) = 50e^{-0,3} = 37\,\mathrm{kg}$.

Z 57- Se analiza una muestra de una roca que contiene $100\,\mathrm{g}$ de uranio y $20\,\mathrm{g}$ de plomo que provienen de la desintegración de aquél. El tiempo de vida media del uranio es de $4,5 \cdot 10^9$ años y se sabe que de $238\,\mathrm{g}$ de uranio se obtienen tras su desintegración total, $206\,\mathrm{g}$ de plomo. Determinar la edad de la roca, suponiendo que cuando se formó, no contenía plomo. Se desprecian los productos intermedios de la desintegración del uranio en plomo.

Solución: La ley de desintegración determina que la cantidad $q(t)$ de sustancia radiactiva que se desintegra en la unidad de tiempo, en un momento dado, es proporcional a la cantidad $Q(t)$ de dicha sustancia en dicho momento: $q(t) = kQ(t)$. En el intervalo dt entre t_1 y $t_1 + dt$, se desintegra: $kQ(t_1)dt = Q(t + dt) - Q(t)$. Luego: $\frac{dQ(t)}{dt} = kQ(t)$, cuya solución es: $Q(t) = Ce^{kt}$, siendo C la cantidad inicial de la sustancia. Sea y la cantidad de uranio desintegrado: $\frac{y}{20} = \frac{238}{206}$, $y = 23,1\,\mathrm{g}$. La cantidad total inicial de uranio era: $100 + 23,1 = 123,1\,\mathrm{g}$. Luego: $Q(t) = 123,1e^{kt} \cdot 100$. Para $t = 4,5 \cdot 10^9$, $\frac{Q(t)}{123,1} = 0,5 = e^{4,5\cdot 10^9 k}$, $k = -\frac{\ln 2}{4,5 \cdot 10^9}$. Por tanto: $100 = 123,1e^{-\frac{\ln 2}{4,5\cdot 10^9}}$, $t = 1.349,2 \cdot 10^6$años.

Z 58- Un paracaidista salta desde una altura de $1,5\,\mathrm{km}$, y abre su paracaídas a una altura de $0,5\,\mathrm{km}$. Calcular el tiempo transcurrido desde que salta hasta que abre el paracaídas. La velocidad límite de caída es de $50\,\mathrm{m/s}$. La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad de caída.

Solución: Sea m la masa del paracaidista, v su velocidad, y sea $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$ la aceleración de la gravedad. Aplicando la fórmula $f = m \cdot a$, se tiene: $mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt}$, $dt = \frac{dv}{g - k_0v^2}$, siendo $k_0 = \frac{k}{m}$. Integrando: $t + \ln C = \frac{1}{2\sqrt{k_0 g}} \ln\frac{a+v}{a-v}$, siendo: $a = \sqrt{\frac{g}{k_0}}$, $\frac{a+v}{a-v} = Ce^{\lambda t}$, siendo: $\lambda = 2\sqrt{k_0 g}$. Para $t = 0$, la velocidad inicial es nula, luego $C = 1$. Se tiene: $\lim_{t\to\infty}\left|\frac{a+v(t)}{a-v(t)}\right| = \infty$, luego: $\lim_{t\to\infty} v(t) = a$. Pero, $\lim_{t\to\infty} v(t) = 50\,\mathrm{m/s}$, luego: $a = 50$, es decir: $50 = \sqrt{\frac{gm}{k}}$, $k = \frac{mg}{2500}$, $\lambda = 2\sqrt{\frac{kg}{m}} = \frac{2g}{50} = 0,39 \simeq 0,4$. Por tanto: $v(t) = a\frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda t} + 1} = 50\tanh\frac{\lambda t}{2} = 50\tanh 0,2t = \frac{dl(t)}{dt}$, siendo l el camino recorrido. Integrando: $l(t) = 250\ln\cosh 0,2t + l_0$. Como: $l_0 = 0$, $l(t) = 1.500 - 500 = 1000$, $t = 5\ln\left(e^4 + \sqrt{e^8 - 1}\right) = 23,5$ segundos.

Z 59- Un balón pesa $0,4$ kp. Se lanza hacia arriba con velocidad inicial de $20\,\mathrm{m/s}$. La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad (para el caso, es $0,48\ p$ para una velocidad de $1\,\mathrm{m/s}$). Hallar la altura máxima que alcanza y el tiempo que tarda en ello.

Solución: Aplicando la fórmula $f = m \cdot a$, se tiene: $-mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt}$, $m = \frac{p}{g} = \frac{0,4}{10}$ (tomando

$g \simeq 10)$, $k = 0,00048\dfrac{kp \cdot s^2}{m^2}$. Luego: $\dfrac{dv}{dt} = -10 - 0,012v^2$. Integrando esta ecuación diferencial: $\arctan(\sqrt{0,0012}\,v) = \sqrt{0,12}\,(C - t)$, $v = \dfrac{10}{\sqrt{0,12}}\tan\left[(C-t)\sqrt{0,12}\,\right]$. Para $t = 0$, $v_0 = 20$, $C = \dfrac{1}{\sqrt{0,12}}\arctan\left(2\sqrt{0,12}\right) = 100,21° = 1,75\,\text{rad}$. La altura máxima se alcanza cuando $v = 0$, es decir: $t = C = 1,75\,\text{s}$. Siendo l el camino recorrido, se plantea la siguiente integral: $l = \int \dfrac{10}{\sqrt{0,12}}\tan\left[(1,75-t)\sqrt{0,12}\,\right]dt = \dfrac{250}{3}\ln\left[\cos\left((1,75-t)\sqrt{0,12}\,\right)\right]_0^{1,75} = 16,3\,\text{m}$.

Z 60- Hallar la presión atmosférica a una altura h, si sobre el nivel del mar la presión es 1 kp/cm^2, siendo la densidad del aire de $0,0012\,\text{g}/cm^3$. Se supone que la temperatura del aire es constante y que se cumple la ley de Boyle-Mariotte.

Solución: A la altura h, la presión es $P(h)$. La diferencia entre $P(h)$ y $P(h+\Delta h)$, corresponde al peso de una columna de aire de base 1 cm^2 y altura Δh, es decir, siendo ρ la densidad media del aire: $P(h) - P(h+\Delta h) = \rho(h + k\Delta h)g\Delta h$, siendo $0 < k < 1$, y g la aceleración de la gravedad. Para $\Delta h \to 0$, se tiene: $\dfrac{d\rho}{dh} = -g\rho(h)$. La densidad de un gas a temperatura constante es proporcional a la presión (ley de Boyle-Mariotte), es decir: $\rho(h) = \lambda P(h)$. Luego: $\dfrac{dP}{dh} = -g\lambda P$, $\dfrac{dP}{P} = -g\lambda dh$. Integrando: $\ln P = -g\lambda h + C$, $P = e^{-g\lambda h + C}$. Para $h = 0$, $P = 1$. Luego: $1 = e^C$, $C = 0$, $P = e^{-g\lambda h}$. Por otra parte: $0,0012\,\text{g}/\text{cm}^3 = \lambda \cdot 1kp/\text{cm}^2 = \lambda 1000p/\text{cm}^2 = 1000g/\text{cm}^2 \cdot \lambda g$, Por tanto, se tiene que: $\lambda g = \dfrac{0,0012\,\text{g}/\text{cm}^3}{1000\,\text{g}/\text{cm}^2} = 0,0000012\,\text{cm}^{-1} = 0,12\,\text{km}^{-1}$. Luego: $P = e^{-0,12\,h}kp/\text{cm}^2$, dada la altura h en km.

Z 61- La masa de un cohete con el depósito lleno de combustible, es M, y sin combustible es m. La velocidad de expulsión de los residuos de la combustión respecto al cohete es c. La velocidad inicial del cohete es nula. Hallar su velocidad tras la combustión de todo el combustible. No tener en cuenta ni la gravedad ni la resistencia del aire.

Solución: En el instante t, tras la ignición, la masa total es $M(t)$ y la velocidad $v(t)$. Aplicando la fórmula: *cantidad de movimiento* (mv), *igual a impulso* (ft), se tiene que la cantidad de movimiento es: $M(t) \cdot v(t)$, que es igual al impulso de las fuerzas que actúan sobre el cohete. Este impulso corresponde a la expulsión de los residuos de la combustión. En el intervalo Δt, se expulsa una masa de residuos igual a: $M(t) - M(t+\Delta t)$, siendo la velocidad de expulsión con relación al cohete: $c - v(t)$. Por tanto, la variación del impulso es: $[c - v(t)][M(t) - M(t+\Delta t)]$. Igualando esta expresión a la variación de la cantidad de movimiento, se tiene: $[c - v(t)][M(t) - M(t+\Delta t)] = M(t+\Delta t)\cdot v(t+\Delta t) - M(t)\cdot v(t)$. Operando, se tiene la ecuación: $c\Delta M + M(t+\Delta t)[v(t) - v(t+\Delta t)] = c\Delta M + M\Delta v + M(\Delta t)\Delta v = 0$. Luego: $c\dfrac{\Delta M}{\Delta v} + M + M(\Delta t) = 0$. Haciendo $\Delta v \to 0$, se tiene: $c\dfrac{dM}{dv} + M = 0$, $dv = -\dfrac{c}{M}dM$, $v(t) = -c\ln M(t) + k$. Para $t = 0$, $M(t) = M$, $v(t) = 0$. Luego: $k = -c\ln\dfrac{1}{M}$, $v = c\ln\dfrac{M}{M(t)}$. Cuando se ha quemado la totalidad del combustible: $M(t) = m$. Por tanto la velocidad pedida es: $v = c\ln\dfrac{M}{m}$.

Z 62- Se destilan dos líquidos A y B. En todo momento, el cociente de las cantidades evaporadas es proporcional al cociente de las cantidades que todavía se encuentran en estado líquido. Determinar la ecuación de dependencia entre las masas de A y B.

Solución: Sea $x(t)$ la masa de A no evaporada en el momento t. Y sea $y(t)$ la de B. En el momento $t + \Delta t$, las correspondientes masas son: $x(t) - x(t+\Delta t)$, $y(t) - y(t+\Delta t)$, respectivamente. Como: $\dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{x(t+\Delta t) - x(t)} = k\dfrac{y(t)}{x(t)}$, pasando al límite, se tiene: $\dfrac{dy}{dx} = k\dfrac{y}{x}$, $\ln y = k\ln x + \ln C$. Luego: $y = Cx^k$.

Z 63- Resolver la ecuación integral $f(t) = t^3 + \displaystyle\int_0^t \sin(t-x)f(x)dx$.

Solución: Sean las siguientes transformadas de Laplace: $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathcal{L}(t^3) = \frac{6}{p^4}$, $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{p^2+1}$. Luego se tiene que: $\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin(t-x)f(x)dx\right] = \frac{F(p)}{p^2+1}$, $F(p) = \frac{6}{p^4} + \frac{F(p)}{p^2+1}$, $F(p) = \frac{6(p^2+1)}{p^6} = \frac{6}{p^6} + \frac{6}{p^4}$. Aplicando las tablas de $\mathcal{L}^{-1}$, se obtiene: $f(t) = \frac{t^5}{20} + t^3$.

Z 64- Resolver la ecuación integral $1 - \cos t = \int_0^t \sinh(t-x)f(x)dx$.

Solución: Se tienen las transformadas de Laplace: $\mathcal{L}(1-\cos t) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p(p^2+1)}$, $\mathcal{L}\left[\int_0^t \sinh(t-x)f(x)dx = \sinh \cdot f(t)\right] = \frac{F(p)}{p^2-1}$. Por tanto: $\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{F(p)}{p^2-1}$. De donde: $F(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2+1)} = \frac{2p}{p^2+1} - \frac{1}{p}$. Aplicando las tablas de $\mathcal{L}^{-1}$, se obtiene: $f(t) = 2\cos t - 1$.

Z 65- Resolver la ecuación integral $\sin t = \int_0^t \cos(t-x)f(x)dx$.

Solución: Derivando, se tiene: $\cos t = -\int_0^t \sin(t-x)f(x)dx + f(t)$. Se tienen las transformadas de Laplace: $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathcal{L}(\cos t) = \frac{p}{p^2+1}$, $\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin(t-x)f(x)dx\right] = \frac{F(p)}{p^2+1}$. Por tanto: $\frac{p}{p^2+1} = -\frac{F(p)}{p^2+1} + F(p)$. De donde: $F(p) = \frac{1}{p}$. Aplicando las tablas de $\mathcal{L}^{-1}$, se obtiene: $f(t) = 1$.

Z 66- Resolver la ecuación integral $1 - \cos t = \int_0^t \cosh(t-x)f(x)dx$.

Solución: Derivando, se tiene: $\sin t = \int_0^t \sinh(t-x)f(x)dx + f(x)$. Se tienen las transformadas de Laplace: $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{p^2+1}$, $\mathcal{L}\left[\int_0^t \sinh(t-x)f(x)dx\right] = \frac{F(p)}{p^2-1}$. Por tanto: $\frac{1}{p^2+1} = \frac{F(p)}{p^2-1} + F(p)$. De donde: $F(p) = \frac{p^2-1}{p^2(p^2+1)} = \frac{2p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2}$. Aplicando las tablas de $\mathcal{L}^{-1}$, se obtiene: $f(t) = 2\sin t - t$.

Z 67- Resolver la ecuación integral $t^3 = \int_0^t (t-x)^2 f(x)dx$.

Solución: Siendo: $\mathcal{L}(t^3) = \frac{6}{p^4}$, $\mathcal{L}\left[\int_0^t (t-x)^2 f(x)dx = t^2 \cdot f(t)\right] = \frac{2F(p)}{p^3}$. Luego: $\frac{6}{p^4} = \frac{2F(p)}{p^3}$, $F(p) = \frac{3}{p}$. Aplicando las tablas de $\mathcal{L}^{-1}$, se obtiene: $f(t) = 3$.

Z 68- Resolver el sistema de ecuaciones integrales $x(t) = t + \int_0^t y(u)du$, $y(t) = 1 + \int_0^t x(u)du$.

Solución: Se tienen las transformadas de Laplace: $\mathcal{L}[x(t)] = X(p)$, $\mathcal{L}[y(t)] = Y(p)$. Luego:

$\mathcal{L}\left[\int_0^t y(u)du = 1\cdot y(t)\right] = \frac{Y(p)}{p}$, $\mathcal{L}\left[\int_0^t x(u)du = 1\cdot x(t)\right] = \frac{X(p)}{p}$. Como: $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2}$, $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}$, se tiene: $X(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{Y(p)}{p}$, $Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{X(p)}{p}$. Las soluciones de este sistema son: $X(p) = \frac{2}{p^2-1}$, $Y(p) = \frac{2p}{p^2-1} - \frac{1}{p}$. Aplicando las tablas de $\mathcal{L}^{-1}$, se obtiene: $x(t) = 2\sinh t$, $y(t) = 2\cosh t - 1$.

Z 69- Escribir en forma de ecuación integral la expresión $f(t)\cdot t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ (ecuación integral de Abel) y resolverla.

Solución: La ecuación integral es: $\int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\frac{1}{2}}}dx = t^{\frac{1}{2}}$ (se trata de la ecuación de Abel para $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$). Para resolverla, sean las transformadas de Laplace: $\mathcal{L}(t^{\frac{1}{2}}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{p^{\frac{3}{2}}}$, $\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\frac{1}{2}}}dx = t^{-\frac{1}{2}}f(t)\right] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{p^{\frac{1}{2}}}F(p)$. Luego: $F(p) = \frac{p^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{3}{2})}{p^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2p}$. Aplicando las tablas de $\mathcal{L}^{-1}$, se obtiene: $f(t) = \frac{1}{2}$.

Z 70- Resolver la ecuación integral $1 = \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}}f(x)dx$.

Solución: Se obtienen las siguientes transformadas de Laplace: $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}$, $\mathcal{L}\left[\int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}}f(x)dx = t^{-\frac{1}{2}}\cdot f(t)\right] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{p^{\frac{1}{2}}}F(p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,F(p)$. Por tanto: $F(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi p}}$. Aplicando las tablas de $\mathcal{L}^{-1}$, se obtiene: $f(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t}}$.

Z 71- Resolver la ecuación integral $t = \int_0^t 2\cos(t-x)f(x)\,dx$.

Solución: Se tienen las siguientes transformadas de Laplace: $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2}$, $\mathcal{L}(\cos t) = \frac{p}{p^2+1}$. Luego: $\mathcal{L}\left[\int_0^t \cos(t-x)f(x)dx\right] = \frac{pF(p)}{p^2+1}$. Por tanto: $\frac{1}{p^2} = 2\frac{pF(p)}{p^2+1}$, $2F(p) = \frac{p^2+1}{p^3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}$. Aplicando las tablas de $\mathcal{L}^{-1}$, se obtiene: $2f(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$, $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{t^2}{4}$.

Z 72- Resolver la ecuación integral $\sin t + \cos t = \int_0^t e^{t-x}f(x)dx$.

Solución: Derivando, se tiene: $\cos t - \sin t = f(t) + \int_0^t e^{t-x}f(x)dx$. Eliminando la integral entre esta ecuación y la del enunciado, se obtiene: $f(t) = -2\sin t$.

Z 73- Resolver la ecuación integral $k^t - 1 = \int_0^t k^{t-x}f(x)\,dx$.

Solución: Derivando, se tiene: $k^t \ln k = f(t) + \ln k \int_0^t k^{t-x} f(x)dx$. Eliminando la integral entre esta ecuación y la del enunciado, se obtiene: $f(t) = \ln k$.

Z 74- Resolver la ecuación integral $e^{-t} = \int_0^t \sin(t-x)f(x)dx$.

Solución: Derivando, se tiene: $-e^{-t} = \int_0^t \cos(t-x)f(x)dx$. Volviendo a derivar, se tiene: $e^{-t} = -\int_0^t \sin(t-x)f(x)dx + f(t)$. Eliminando la integral entre esta ecuación y la del enunciado, se obtiene la solución: $f(t) = e^{-t} + e^{-t} = 2e^{-t}$.

Z 75- Hallar la curva en la que la funcional $f = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}$, que une los puntos fijos A y B, alcanza su valor extremo.

Solución: Esta funcional determina la longitud de la curva que une los dos puntos fijos dados. Se trata, por tanto, de encontrar la curva de longitud mínima que une dichos puntos, que obviamente es la línea recta. La extremal pedida es la curva integral de la ecuación de Euler de las extremales: $\frac{d}{dx}(f'_{y'}) - f'_y = 0$, siendo $f(x,y,y') = 0$, que desarrollada, da: $y''f''_{y'^2} + y'f''_{yy'} + f''_{xy'} - f'_y = 0$. Como la funcional dada no contiene explícitamente x ni y, la ecuación de Euler se simplifica: $y'' = 0$, cuya solución es: $y = mx + n$. Para calcular las constantes m, n, se hace cumplir a esta ecuación con las coordenadas de A y B, obteniéndose la recta que pasa por los dos puntos.

Z 76- Hallar entre las curvas que unen los puntos $A(1,3)$ y $B(2,5)$, la curva en la que la funcional $f = \int_A^B y'(1+x^2y')dx$, alcanza su valor extremo.

Solución: La ecuación de la funcional f no contiene explícitamente la variable y, luego la ecuación de Euler para las extremales, queda simplificada en: $\frac{d}{dx}(f'_{y'}) = 0$, es decir, $f'_{y'}$ es una constante. Por tanto: $f'_{y'} = 1 + x^2y' + y'x^2 = 1 + 2x^2y' = C$, $y' = \frac{C-1}{2x^2}$, $y = \frac{-C+1}{2x} + D$. Se trata de una familia de hipérbolas. Haciendo que pase por los puntos dados, se obtiene la hipérbola: $y = -\frac{4}{x} + 7$.

Z 77- Hallar entre las curvas que unen los puntos A y B, la curva en la que la funcional $f = \int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$, alcanza un valor extremo.

Solución: La funcional f no contiene explícitamente la variable x, luego la ecuación de Euler para las extremales, queda simplificada en: $y''f''_{y'^2} + y'f''_{yy'} - f'_y = 0$. Multiplicando esta ecuación por y', se tiene: $y'(y''f''_{y'^2} + y'f''_{yy'} - f'_y) = f''_{y'^2}y'y'' + f''_{yy'}y'^2 - f'_y y' + f'_{y'}y'' - f'_y y'' = \frac{d}{dx}(f - y'f'_{y'}) = 0$. Luego una primera integral da: $f - y'f'_{y'} = C$, es decir: $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y'\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = C$. Simplificando: $1 = Cy\sqrt{1+y'^2}$, que integrada da: $(x+D)^2 + y^2 = \frac{1}{C^2}$. Esta ecuación corresponde a una familia de circunferencias con centro en el eje de abscisas. Al hacer que pase por los dos puntos dados, se obtiene un valor para las constantes C y D, quedando determinada la circunferencia.

Z 78- Determinar la curva que, pasando por dos puntos dados, forma al girar alrededor del eje de abscisas, una superficie de área mínima.

Solución: $S = \int_A^B 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Como la funcional no contiene explícitamente x, se tiene que: $f - y'f'_{y'} = 0$. Es decir: $y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C$. Operando: $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C$. Haciendo: $y' = \sinh t$, $y = k\cosh t$, $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C\sinh t dt}{\sinh t} = Cdt$, $x = Ct + D$. Eliminando t, se tiene la solución: $y = C\cosh\frac{x-D}{C}$, que corresponde a una familia de catenarias, que al girar forman superficies llamadas catenoides. Las constantes C y D se fijan al hacer que la ecuación se verifique para los dos puntos dados.

Z 79- Determinar la curva situada en un plano vertical, que pasa por dos puntos dados, de forma que un punto material recorra el trayecto entre dichos dos puntos, en el menor tiempo posible. Se desprecia el rozamiento y la resistencia del medio.

Solución: La velocidad v de caída desde una altura y, es: $v = \sqrt{2gy}$. El tiempo invertido en la caída entre los dos puntos, es: $t = \int\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$. Tomando uno de los puntos como origen de coordenadas: $y(0) = 0$. La funcional no contiene la variable x, por lo que la ecuación de Euler de las extremales es: $f - y'f'_{y'} = 0$. Por tanto: $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = C_1$. Operando: $\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C_2$, $y(1+y'^2) = \frac{1}{C_2^2} = C$. Haciendo: $y' = \cot t$, $y = \frac{C}{1+\cot^2 t} = C\sin^2 t =$ $= \frac{C}{2}(1-\cos 2t)$, Como: $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C\sin 2t dt}{\cot t} = \frac{2C\sin t\cos t dt}{\cot t} = 2C\sin^2 t = C(1-\cos 2t)dt$. Integrando: $x = C(t - \frac{\sin 2t}{2}) + k$. Como para $t = 0$, $x = 0$, $k = 0$, se tiene que: $x = \frac{C}{2}(2t - \sin 2t)$. Luego la curva corresponde a la familia de cicloides: $x = C(t - \sin t)$, $y = C(1-\cos t)$. La curva hallada recibe el nombre de braquistócrona.

Z 80- Determinar la forma adecuada para un depósito de fluidos, de forma que su capacidad sea máxima, mientras que su superficie sea mínima (menor coste del material utilizado).

Solución: Se trata de una superficie de revolución generada por una curva $y = F(x)$, que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(a,0)$. El volumen viene dado por: $V = \int_0^a \pi y^2 dx$, y la superficie por: $S = \int_0^a 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Como la funcional no contiene explícitamente x, se tiene: $f - y'f'_{y'} = 0$. Como el enunciado puede presentarse de la forma "cómo encontrar la máxima capacidad para una superficie dada", se puede poner: $\int_0^a \pi y^2 dx = \lambda\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. De donde se tiene que: $f(yy') = \pi y^2 - \lambda 2\pi y\sqrt{1+y'^2}$, $2\lambda y - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + y^2 - 2\lambda y\sqrt{1+y'^2} =$ constante. Como $y(0) = 0$, la constante es nula. Operando: $\sqrt{1+y'^2} = \frac{2\lambda}{y}$, $y^2 + y^2y'^2 = 4\lambda^2$, $yy' = \sqrt{4\lambda^2 - y^2}$, $ydy = \sqrt{4\lambda^2 - y^2}\,dx$, $\int_0^{x=a}\frac{ydy}{\sqrt{4\lambda^2-y^2}} = \int_0^{x=a} dx$, $\left|\sqrt{4\lambda^2-y^2}\right|_0^{x=a} = x + C$. Para $x = y = 0$, $2\lambda = C$. Para $x = a$, $y = 0$, $\lambda = \frac{a}{4}$. Luego: $4\lambda^2 - y^2 = (x-2\lambda)^2$, $x^2 + y^2 - ax - \frac{a^2}{4} = 0$. Se trata de una circunferencia de centro $(\frac{a}{2},0)$ y radio $\frac{a}{2}$, siendo el depósito la correspondiente esfera.

Anexo - Problemas de Estadística

1- Al calibrar unas piezas se han obtenido las siguientes dimensiones en milímetros: 74, 73, 73, 70, 71, 75, 71, 72, 65, 68, 78, 79, 64, 62, 63, 69, 71, 62, 62, 68, 74, 63, 75, 77, 71, 61, 72, 66, 77, 72, 73, 64, 70, 66, 61, 62, 63, 63, 66, 68, 74, 65, 68, 76, 71, 70, 65, 64, 62, 65, 68, 70, 78, 79, 72. Se pide la tabla de frecuencias con intervalo 3, el cálculo de la media aritmética, mediana, moda, media geométrica, media armónica, desviación típica, asimetría y apuntamiento.

Solución:

Intervalos	f_i	$\sum fi$	m_i	X_a	d_i	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$	$f_i d_i^3$	$f_i d_i^4$
61 – 63	11	11	62,5		–3	–33	99	–297	891
64 – 66	10	21	65,5		–2	–20	40	–80	160
67 – 69	6	27	68,5		–1	–6	6	–6	6
70 – 72	13	40	71,5	71,5	0	0	0	0	0
73 – 75	8	48	74,5		1	8	8	8	8
76 – 78	5	53	77,5		2	10	20	40	80
79 – 81	2	55	80,5		3	6	18	54	162
Total	55					–35	191	–281	1307

Se ha tomado como promedio arbitrario: $X_a = 71,5$.

Media aritmética: $\overline{X} = X_a + I\frac{\sum f_i d_i}{N} = 71,5 + \frac{3 \cdot (-35)}{55} = 69,59.$

Desviación típica: $s = I\sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{191}{55} - \left(\frac{-35}{55}\right)^2} = 5,25.$

$$\text{Asimetría: } a_s = \frac{\frac{\sum f_i d_i^3}{N} - 3\frac{\sum f_i d_i^2}{N}\frac{\sum f_i d_i}{N} + 2\left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2}{\left[\sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2}\right]^3} =$$

$$= \frac{\frac{-281}{55} - 3\frac{191}{55} \cdot \frac{-35}{55} + 2\left(\frac{-35}{55}\right)^2}{\left[\sqrt{\frac{191}{55} - \left(\frac{-35}{55}\right)^2}\right]^3} = 0,43.$$

$$\text{Apuntamiento: } a_p = \frac{\frac{\sum f_i d_i^4}{N} - 4\frac{\sum f_i d_i^3}{N}\frac{\sum f_i d_i}{N} + 6\frac{\sum f_i d_i^2}{N}\left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2 - 3\left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^4}{\left[\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2\right]^2} - 3 =$$

$$= \frac{\frac{1307}{55} - 4\frac{-281}{55}\frac{-35}{55} + 6\frac{191}{55}\left(\frac{-35}{55}\right)^2 - 3\left(\frac{-35}{55}\right)^4}{\left[\frac{191}{55} - \left(\frac{-35}{55}\right)^2\right]^2} - 3 = -1,01.$$

Media geométrica: $M_g = \text{antilog}\,\frac{\sum f_i \log X_i}{N} = 69,39.$

Media armónica: $M_a = \frac{N}{\sum \frac{f_i}{X_i}} = 67,92.$

Mediana: $M_d = 70.$

Moda: $M_o = 71$. Aplicando la siguiente fórmula aproximada para la obtención de la moda, $M_0 = 3M_d - 2\overline{X}$, se obtiene el valor: $M_0 = 3 \cdot 70 - 2 \cdot 69,59 = 70,82.$

2- En un almacén hay 10.000 piezas cuya dureza se exige que esté entre los límites 48 y 52. El porcentaje de piezas defectuosas es 2%. Se pide la desviación típica del número de piezas defectuosas, suponiendo que las piezas extraídas se vuelven a introducir.

Solución: Se supone la distribución binomial de la dureza: $F(X_i) = \sum_{X=0}^{X_i} \binom{n}{X} p^X q^{n-X}$. Se tiene que: $p = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$, $q = 1 - p = \frac{49}{50}$. Por tanto, el valor de la desviación típica es: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{49}{50}} = 14$.

3- En una fábrica se examinan cada hora 20 piezas y si hay una defectuosa se interrumpe la operación y se determina la causa del defecto. Suponiendo que el proceso de fabricación produce $1,5\%$ de piezas defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que se interrumpa la fabricación?.

Solución: La probabilidad de que no haya ninguna pieza defectuosa en las 20 piezas que se examinan, es: $\left(\frac{98,5}{100}\right)^{20}$. Luego la probabilidad de que haya que parar la fabricación, es: $1 - \left(\frac{98,5}{100}\right)^{20} = 0,26$.

4- Si X se distribuye normalmente con promedio $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$, hallar la probabilidad de que $-1,71 \leq X \leq 1,22$.

Solución: La fórmula de la distribución normal con promedio μ y desviación típica σ, es: $f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. En el caso del enunciado, la fórmula es: $f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}}$. La probabilidad P de que X esté en el intervalo: $-1,71 \leq X \leq 1,22$, es igual a la suma de las probabilidades de que: $-1,71 \leq X \leq 0$ y de que: $0 \leq X \leq 1,22$. Es decir que: $P(-1,71 \leq X \leq 1,22) = P(-1,71 \leq X \leq 0) + P(0 \leq X \leq 1,22)$. Utilizando tablas de la función normal, se tiene: $P(-1,71 \leq X \leq 0) = 0,4564$, $P(0 \leq X \leq 1,22) = 0,3888$. Luego: $P(-1,71 \leq X \leq 1,22) = P(-1,71 \leq X \leq 0) + P(0 \leq X \leq 1,22) = 0,4564 + 0,3888 = 0,8452$.

5- Si X se distribuye normalmente con promedio $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$, hallar la probabilidad de que $9 \leq X \leq 10$.

Solución: Haciendo: $u = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-10}{2}$, se tiene que: $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$. Para $X = 9$, $u = -0,5$; para $X = 10$, $u = 0$. Utilizando tablas de la función normal, se tiene: $P(9 \leq X \leq 10) = P(-0,5 \leq u \leq 0) = 0,19146$.

6- En una fábrica de instrumentos de precisión, una de las dimensiones de las piezas fabricadas tiene una desviación típica de $0,001$. Los límites requeridos en las dimensiones son de $0,121$ a $0,129$, y se controlan todas las piezas. La media de la dimensión es $0,123$. Suponiendo equiprobabilidad en la elección de cada pieza, ¿qué porcentaje de piezas se van a desechar?

Solución: Haciendo: $u = \frac{X - 0,123}{0,001}$, se tiene que: $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$. Para $X = 0,121$, $u = -2$; para $X = 0,129$, $u = 6$. Por tanto, se tiene: $P(0,121 \leq X \leq 0,129) = P(-2 \leq u \leq 6) =$ $= P(0 \leq u \leq 2) + P(0 \leq u \leq 6)$, pues por simetría de la curva normal se tiene que: $P(-2 \leq u \leq 0) = P(0 \leq u \leq 2)$. Utilizando tablas de la función normal, se tiene: $P(0 \leq u \leq 2) = 0,47725$, $P(0 \leq u \leq 6) \simeq 0,5$. Luego: $P(-2 \leq u \leq 6) = 0,97725$. Por tanto, el porcentaje de piezas a desechar es: $100 - 97,725 = 2,275\%$.

7- Hallar la probabilidad de que la variable V, que sigue la distribución de χ^2 con 10 grados de libertad, esté comprendida entre $2,5$ y $18,3$.

Solución: La fórmula de la distribución χ^2 es: $f(\chi^2) = \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} (\chi^2)^{\frac{k}{2}-1}$. El parámetro k recibe el nombre de grados de libertad. Utilizando una tabla de distribución de χ^2, para $k = 10$, se tiene: $P(2,5 \leq V \leq 18,3) = P(V \leq 18,3) - P(V < 2,5) = 0,99 - 0,05 = 0,94$.

8- Si X es una variable que sigue la distribución t de Student, hallar la probabilidad para $k = 10$, de que X esté comprendida entre $-1,71$ y $1,22$.

Solución: La fórmula de la distribución t de Student es: $f(t) = \dfrac{(\frac{k-1}{2})!}{\sqrt{k\pi}\,(\frac{k-2}{2})!}\left(1 + \dfrac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$. Esta curva es simétrica respecto al origen. El parámetro k recibe el nombre de grados de libertad. Utilizando una tabla de la distribución de t, se tiene para $k = 10$, los siguientes valores: la probabilidad de un valor de t mayor que $1,093$ es $0,3$, mayor que $1,372$ es $0,2$, y mayor que $1,812$ es $0,1$ (estos valores se refieren a ambas direcciones, positiva y negativa; luego en un solo sentido la probabilidad es la mitad). Interpolando los valores dados, y tomando sus mitades: para $-1,71$ el valor es: $\dfrac{0,123}{2} = 0,0615$, y para $1,22$ el valor es: $\dfrac{0,254}{2} = 0,127$. La probabilidad pedida es: $(0,5 - 0,0615) + (0,5 - 0,127) = 81,1\%$.

9- Si X es una variable que sigue la distribución de Fisher con 20 y 22 grados de libertad, hallar la probabilidad de que X sea menor que $2,50$.

Solución: La fórmula de la distribución de F de Fisher es la siguiente: $f(F) = (\frac{k_1}{k_2})^{\frac{k_1}{2}} \dfrac{(1 + \frac{k_1}{k_2}F)^{-(\frac{k_1+k_2}{2})} F^{\frac{k_1}{2}-.1}}{B(\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2})}$, donde B representa la función euleriana de primera especie. La curva es ligeramente asimétrica. Los parámetros k_1 y k_2 reciben el nombre de grados de libertad. Utilizando una tabla de distribución de F de Fisher, se tiene para los grados de libertad indicados y para las probabilidades $0,05$ y $0,01$, respectivamente: $F_{0.05} = 2,07$ y $F_{0,01} = 2,83$. Interpolando, para $X = 2,5$ se obtiene el siguiente valor:
$0,05 - \dfrac{(0,05 - 0,01)(2,5 - 2,07)}{2,83 - 2,07} = 0,02737$. Luego: $P(X < 2,5) = 1 - 0,027 = 97,3\%$.

10- Una empresa metalúrgica ha producido en 33 meses, las siguientes cantidades mensuales de un determinado producto, con los costes que se indican entre paréntesis (las unidades producidas se dan en millares, y los costes en millones de euros): 7(0,3), 20(0,4), 22(0,4), 28(0,5), 32(0,5), 29(0,5), 41(0,6), 29(0,5), 52(0,8), 64(1,1), 68(1,7), 62(0,9), 93(1,2), 73(0,7), 94(1,9), 90(2,5), 59(0,9), 84(1,9), 55(1,1), 56(0,9),76(1), 89(1,2), 117(1,6), 173(1,5), 90(1,5), 139(1,9), 156(2,1), 161(2,1), 188(2,6), 145(1,9), 161(2,1), 181(2,3), 177(2,3). Hallar la función del coste de producción de la forma $C = a + bx + cx^2$, y calcular el coeficiente de regresión y las desviaciones típicas.

Solución: Agrupando las producciones en los intervalos: 0/70; 70,1/140; 140,1/210, y los costes en los intervalos: 0,21/1; 1,01/1,8; 1,81/2,6, se tiene el siguiente cuadro:

Intervalos	0/70	70,1/140	140,1/210	f_j	d_j	f_jd_j	$f_jd_j^2$	$\sum f_{ij}d_i$	$d_j\sum f_{ij}d_i$
0,21/1	12	2		14	–1	–14	14	–12	12
1,01/1,8	3	4	1	8	0	0	0	–2	0
1,81/2,6		4	7	11	1	11	11	7	7
f_i	15	10	8	33	0	–3	25	–7	19
d_i	–1	0	1	0					
f_id_i	–15	0	8	–7					
$f_id_i^2$	15	0	8	23					
$\sum f_{ij}d_j$	–12	2	7	–3					
$d_i\sum f_{ij}d_j$	12	0	7	19					

$X_a = 105$, $Y_a = 1,4$, $I_x = 70$, $I_y = 0,8$, $\overline{X} = 105 + 70 \cdot \dfrac{-7}{33} = 90,15$,

$$\overline{Y} = 1,4 + 0,8 \cdot \frac{-3}{33} = 1,33,\ r = \frac{19 - \frac{(-7)(-3)}{33}}{\sqrt{23 - \frac{(-7)^2}{33}}\sqrt{25 - \frac{(-3)^2}{33}}} = 0,8,$$

$$s_y = 0,8\sqrt{\frac{25 - \frac{(-3)^2}{33}}{33}} = 0,69,\ s_x = 70\sqrt{\frac{23 - \frac{(-7)^2}{33}}{33}} = 56,52.$$

Para calcular la curva de regresión, ha de tenerse que la función: $F = \sum(Y - a - bX - cX^2)^2$, ha de ser mínima. Por tanto se tienen las tres ecuaciones siguientes:

$F'_a = 2\sum(Y - a - bX - cX^2)(-1) = 0,$

$F'_b = 2\sum(Y - a - bX - cX^2)(-X) = 0,$

$F'_c = 2\sum(Y - a - bX - cX^2)(-X^2) = 0.$

Es decir: $na + b\sum X + c\sum X^2 - \sum Y = 0,$

$a\sum X + b\sum X^2 + c\sum X^3 - \sum XY = 0,$

$a\sum X^2 + b\sum X^3 + c\sum X^4 - \sum X^2Y = 0.$

Siendo los valores medios de los intervalos de X: 35, 105, 175, y de los de Y: $0,6,\ 1,4,\ 2,2$, se tiene: $\sum X = 35 \cdot 15 + 105 \cdot 10 + 175 \cdot 8 = 2.975,$

$\sum X^2 = 35^2 \cdot 15 + 105^2 \cdot 10 + 175^2 \cdot 8 = 373.625,$

$\sum X^3 = 35^3 \cdot 15 + 105^3 \cdot 10 + 175^3 \cdot 8 = 55.094.375,$

$\sum X^4 = 35^4 \cdot 15 + 105^4 \cdot 10 + 175^4 \cdot 8 = 8.741.140.625,$

$\sum Y = 0,6 \cdot 14 + 1,4 \cdot 8 + 2,2 \cdot 11 = 43,8,$

$\sum XY = 35 \cdot 0,6 \cdot 12 + 35 \cdot 1,4 \cdot 3 + 105 \cdot 0,6 \cdot 2 + 105 \cdot 1,4 \cdot 4 + 105 \cdot 2,2 \cdot 4 + 175 \cdot 1,4 +$
$+175 \cdot 2,2 \cdot 7 = 4.977,$

$\sum X^2Y = 35^2 \cdot 0,6 \cdot 12 + 35^2 \cdot 1,4 \cdot 3 + 105^2 \cdot 0,6 \cdot 2 + 105^2 \cdot 1,4 \cdot 4 + 105^2 \cdot 2,2 \cdot 4 +$
$+175^2 \cdot 1,4 + 175^2 \cdot 2,2 \cdot 7 = 700.455.$

El sistema a resolver es:

$33a + 2.975b + 373.625c - 43,8 = 0,$

$2,975a + 373.625b + 55.094.375c - 4.977 = 0,$

$373.625a + 55.094.375b + 8.741.140.625c - 700.455 = 0,$

cuya solución es: $a = 0,26,\ b = 0,0152,\ c = -0,0000268,$ con lo que la curva de regresión es: $Y = 0,26 + 0,0152X - 0,0000268X^2$, siendo X los miles de piezas producidas mensualmente e Y los millones de euros del coste mensual de producción.

11- Siendo $f(X,Y) = ce^{-(X+2Y)}$ para $X > 0,\ Y > 0,$ hallar la probabilidad de que: a) $X > 1,$ siendo $Y > 1$; b) $X < 1$; c) $X > 1,$ siendo $Y < 1.$

Solución: $F = c\iint e^{-(X+2Y)}dXdY = \frac{c}{2}(-e^{-2Y} + e^{-2Y-X} + 1 - e^{-X}).$

$F(\infty,\infty) = 1 = \frac{c}{2},\quad c = 2,\quad F(0,0) = 0,\quad F(1,1) = -e^{-2} + e^{-3} + 1 - e^{-1},\quad F(\infty,1) = -e^{-2} + 1,$ $F(1,\infty) = 1 - e^{-1}.$

a) $P(X > 1,\ Y > 1) = F(\infty,\infty) - F(\infty,1) - F(1,\infty) - F(\infty,1) + F(1,1) = e^{-3} = 0,0498.$

b) $P(X < 1,\ \infty) = F(1,\infty) = 1 - e^{-1} = 0,6321.$

c) $P(X > 1,\ Y < 1) = F(\infty,1) - F(1,1) = e^{-1} - e^{-3} = 0,3181.$

12- Se dispone de los datos anuales de seis variables en el transcurso de 21 años, que se recogen en la tabla siguiente. Hallar la línea de regresión y el coeficiente de correlación múltiple.

Años	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	7,238	1,2103	2,0427	2,2357	98,07	30.199
2	13,656	0,9689	2,0456	1,8174	94,17	44.811
3	11,031	0,8317	1,8510	1,7730	86,81	67.570
4	9,976	1,9154	1,7753	2,2645	82,69	88.852
5	8,852	0,8272	1,6935	2,3182	80,67	81.615
6	13,470	0,8822	2,2184	2,4485	87,66	38.800
7	8,605	1,1538	2,0288	2,8178	92,06	112.272
8	11.315	1,1861	2,1014	3,3421	95,03	54.320
9	11,405	1,2243	1,9233	3,6097	97,74	47.976
10	12,431	1,2052	1,9163	4,0732	98,00	46.481
11	11,833	1,2684	2,1155	4,1112	99,94	56.909
12	12,505	1,2274	2,0719	4,0750	103,06	46.182
13	9,612	1,2691	1,9911	4,1703	101,27	51.252
14	9,843	1,5457	1,9503	4,3739	104,96	96.701
15	15,293	1,2603	1,9644	4,3739	104,63	55.453
16	9,178	1,2728	2,1114	3,8167	104,41	119.385
17	15,392	1,0542	2,0751	3,8844	102,77	51.370
18	8,891	1,1727	2,0333	3,8828	103,62	106.903
19	11,394	1,1703	1,8229	3,8599	105,26	93.859
20	11,944	1,0541	1,8776	3,6947	102,91	62.961
21	12,359	1,8983	2,0059	3,7092	105,04	43.153
Totales	236,223	23,6184	41,6157	70,6521	2050,77	1.397.024

Solución: Se obtienen los siguientes valores:

$\sum X_1^2 = 2.750,761$	$\sum X_1X_2 = 263,848$	$\sum X_1X_3 = 469,5211$
$\sum X_1X_4 = 803,6467$	$\sum X_1X_5 = 23.144,6693$	$\sum X_1X_6 = 15.150,962$
$\sum X_2^2 = 27,2216$	$\sum X_2X_3 = 46,9339$	$\sum X_2X_4 = 81,7439$
$\sum X_2X_5 = 2.325,3302$	$\sum X_2X_6 = 1.590.070,13$	$\sum X_3^2 = 82,7929$
$\sum X_3X_4 = 140,4259$	$\sum X_3X_5 = 4.070,8062$	$\sum X_3X_6 = 2.751.278,21$
$\sum X_4^2 = 252,8733$	$\sum X_4X_5 = 7.008,2626$	$\sum X_4X_6 = 4.741.223,64$
$\sum X_5^2 = 201.446,82$	$\sum X_5X_6 = 136.423.936$	$\sum X_6^2 = 106.944.665.536$

Aplicando la fórmula: $r_{ij} = \dfrac{\sum X_iX_j - \dfrac{\sum X_i}{N}\sum X_j}{\sqrt{\sum X_i^2 - \dfrac{(\sum X_i)^2}{N}}\sqrt{\sum X_j^2 - \dfrac{(\sum X_j)^2}{N}}}$, se obtienen los siguientes coeficientes de correlación:

$r_{12} = -0,162264$	$r_{13} = 0,234088$	$r_{14} = 0,229859$	$r_{15} = 0,213509$	$r_{16} = -0,4929$
$r_{23} = 0,278037$	$r_{24} = 0,715947$	$r_{25} = 0,671544$	$r_{26} = -0,194661$	$r_{34} = 0,187279$
$r_{35} = 0,348462$	$r_{36} = -0,255748$	$r_{45} = 0,813223$	$r_{46} = 0,089143$	$r_{56} = -0,000845$

Luego: $|r_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & -0,162264 & 0,234088 & 0,229859 & 0,213509 & -0,492900 \\ -0,162264 & 1 & 0,278037 & 0,715947 & 0,671544 & 0,194661 \\ 0,234088 & 0,278037 & 1 & 0,187279 & 0,348462 & -0,255748 \\ 0,229859 & 0,715947 & 0,187279 & 1 & 0,813223 & 0,089143 \\ 0,213509 & 0,671544 & 0,34862 & 0,813223 & 1 & -0,000845 \\ -0,492900 & 0,194661 & -0,255748 & 0,089143 & -0,000845 & 1 \end{vmatrix}.$

De donde se deducen: $c_{12.3456} = -\frac{r^{12}}{r^{11}} = -0,626353$, $c_{13.2456} = -\frac{r^{13}}{r^{11}} = -0,312499$, $c_{14.2356} = -\frac{r^{14}}{r^{11}} = 0,631941$, $c_{15,2346} = -\frac{r^{15}}{r^{11}} = -0,155385$, $c_{16.2345} = -\frac{r^{16}}{r^{11}} = -0,383272$.

Por tanto, con las variables normalizadas, se tiene:
$x_1 = -0,626353x_2 - 0,312499x_3 + 0,631941x_4 - 0,155385x_5 - 0,383272x_6$. Pasando a valores reales, la ecuación de la línea de regresión es:

$$\frac{X_1 - 11,2487}{4,49} = \frac{-0,626353(X_2 - 1,1247)}{0,032} - \frac{0,312499(X_3 - 1,9817)}{0,015} +$$
$$+\frac{0,631941(X_4 - 3,3644)}{0,7225} - \frac{0,155385(X_5 - 97,6557)}{56,07} - \frac{0,383272(X_6 - 66525)}{667034028}.$$

El coeficiente de correlación múltiple es: $r_{1.23456} = \sqrt{1 - \frac{|r_{ij}|}{|r_{ij}|^{(1,1)}}} = 0,601$, $k^2_{1.23456} = 0,638367$.

También se pueden calcular los coeficientes de orden inferior para obtener en cascada los de orden superior:

$r_{12.3}$= $-0,243444$	$r_{14.3}$= $0,194782$	$r_{24.3}$= $0,703571$	$r_{15.3}$= $0,144784$	$r_{45.3}$= $0,812350$
$r_{25.3}$= $0,638208$	$r_{16.3}$= $0,460742$	$r_{64.3}$= $0,144310$	$r_{65.3}$= $0,097418$	$r_{26.3}$= $0,286201$
$r_{12.34}$= $-0,545874$	$r_{15.34}$= $-0,023508$	$r_{25,34}$= $-0,160954$	$r_{16.34}$= $-0,509496$	$r_{65.34}$= $-0,034730$
$r_{26,34}$= $0,265658$	$r_{12.345}$= $-0,5494$	$r_{16.345}$= $-0,510758$	$r_{26.345}$= $0,274995$	$r_{12.3456}$= $-0,494744$
$r_{13.2456}$= $-0,028775$	…			

13- Hallar los intervalos de confianza del promedio μ, correspondientes a una probabilidad de $0,9973$, de un colectivo del que se conoce una muestra de cuatro elementos: 12, 10, 11, 15, siendo $2,4$ la desviación típica del colectivo.

Solución: La estimación por máxima verosimilitud proporciona el valor: $\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{48}{4} = 12$. Según las tablas de la función normal: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$, para la probabilidad: $P = \frac{1}{2}(0,9973) = 0,49865$, $t = 3$. Los intervalos de confianza del promedio μ vienen dados por: $\mu_i = \overline{X} - t(P/2)\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = 12 - 3 \cdot \frac{2,4}{\sqrt{4}} = 8,4$, $\mu_s = \overline{X} + t(P/2)\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = 12 + 3 \cdot \frac{2,4}{\sqrt{4}} = 15,6$. Es decir: $8,4 < \mu < 15,6$. Tomando como estadístico la mediana M_d, la muestra ordenada es: $10, 11, 12, 15$, siendo: $M_d = 11,5$. Para $n = 4$, la tabla de eficiencias da: $k = 1,09$. Por tanto:
$\mu_i = 11,5 - t(P/2)\frac{k\sigma_X}{\sqrt{n}} = 11,5 - 3 \cdot \frac{1,09 \cdot 2,4}{\sqrt{4}} = 7,576$,
$\mu_s = 11,5 + t(P/2)\frac{k\sigma_X}{\sqrt{n}} = 11,5 + 3 \cdot \frac{1,09 \cdot 2,4}{\sqrt{4}} = 15,424$. Es decir: $7,576 < \mu < 15,424$.

14- Hallar los límites de confianza correspondientes a una probabilidad $P = 0,9973$, de un colectivo que sigue la distribución normal, cuya $\sigma = 0,1$, y del que se conoce la siguiente muestra de 40 unidades: $12,524$, $12,667$, $12,574$, $12,732$, $12,853$, $12,735$, $12,604$, $12,694$, $12,741$, $12,592$, $12,671$, $12,708$, $12,870$, $12,591$, $12,656$, $12,671$, $12,725$, $12,646$, $12,562$, $12,732$, $12,606$,

$12,713,\ 12,763,\ 12,790,\ 12,841,\ 12,611,\ 12,691,\ 12,723,\ 12,713,\ 12,737,\ 12,655,\ 12,676,$ $12,707,\ 12,803,\ 12,694,\ 12,551,\ 12,692,\ 12,464,\ 12,601,\ 12,883.$

Solución: Tomando como estimador la media de la muestra: $\overline{X} = \frac{\sum X}{40} = \frac{507,452}{40} = 12,6863,$ los límites serán (ver problema 13): $12,6863 \pm \frac{3 \cdot 0,1}{\sqrt{40}},$ es decir: $\mu_i = 12,6389,\ \mu_s = 12,7337.$ Luego: $12,6389 < \mu < 12,7337.$

15- En una fábrica se estaban produciendo piezas con un promedio de cuatro defectos por pieza. A causa de una avería, este promedio ascendió a seis defectos por pieza. Tras efectuar unas reparaciones del equipo, se desea conocer si el número de defectos ha disminuido a cuatro, o si sigue en seis o más. Para ello se toman muestras de cuatro datos, y se desea un error de primera clase de $0,07.$ También se desea conocer el error de segunda clase. Las piezas sucesivas han dado los siguientes defectos: 5, 6, 4, 6, 3, 3, 4, 5, 4, 3, 4, 7, 3. Se supone que la variable sigue la ley de Poisson.

Solución: La hipótesis a comprobar es $H_0 = 4,$ siendo la hipótesis alternativa $H_1 = 6.$ Se denomina región crítica w a aquella en la que, si está comprendido el valor del estadístico obtenido con los datos de la muestra tomada para comprobar H_0, se rechaza esta hipótesis. Se denomina error de 1ª clase, o error α, a la probabilidad de que el estadístico esté en w, si H_0 es la hipótesis verdadera. Se denomina error de 2ª clase, o error β, a la probabilidad de que el estadístico no esté en w, si H_1 es la hipótesis verdadera. El número de datos que se toma es $n = 4$, y el estadístico a comprobar, correspondiente a la hipótesis H_0, es $\mu_0 = 4.$ Luego: $a = n\mu_0 = 4 \cdot 4 = 16.$ En las tablas de Poisson que dan el valor de: $\sum_{X=0}^{c} \frac{a^X e^{-a}}{X!}$, se busca el valor de c correspondiente a $a = 16$ y la probabilidad de $0,07.$ Este valor de c está entre 22 y 23, luego se toma: $n\mu_s = 22,5.$ Como: $n\overline{X} = 4 \cdot \frac{57}{13} = 17,52 < 22,5,$ se acepta la hipótesis de que el número de defectos ha disminuido a cuatro. Para calcular $\beta,$ se busca: $a = 4 \cdot 6 = 24,$ y el valor correspondiente a $c = 22$ es: $0,686.$ Luego: $\beta = 1 - 0,686 = 0,314.$

16- En un muestreo se ha tomado una muestra de 100 piezas, encontrando 20 defectuosas. Se desea obtener los límites de confianza para el porcentaje de defectos del colectivo con una probabilidad de $0,95.$

Solución: Utilizando las tablas de distribución binomial, para $n = 100$ y $X = 20,$ se tiene que entre $p = 0,29$ y $p = 0,30$ (aproximadamente por interpolación es para $p = 0,295$), la probabilidad es de: $0,025$ $(= \frac{1 - 0,95}{2})$. Para $X = 19,$ entre $p = 0,12$ y $p = 0,13$ (aproximadamente por interpolación $0,125$), la probabilidad es de: $0,975$ $(= 1 - \frac{1 - 0,95}{2})$. Por tanto, los límites son: $0,125 < p < 0,295.$

Por otra parte, utilizando una aproximación normal simplificada, se obtiene: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0,025} = 1,96.$ Luego el cálculo del valor aproximado del límite inferior de confianza es: $p_i = \overline{X} - \frac{1}{2n} - t_{0,025}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} = 0,20 - \frac{1}{200} - 1,96\sqrt{\frac{0,20 \cdot 0,80}{100}} = 0,1166,$ siendo el límite superior de confianza: $p_s = \overline{X} + \frac{1}{2n} + t_{0,025}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} = 0,2834.$ Por tanto, los límites son: $0,1166 < p < 0,2834,$ ambos menores que los hallados antes.

17- En el análisis del rendimiento de dos tipos de barrenas, se han cronometrado 50 perforaciones de $1,5\,\mathrm{m}$ de longitud, cuyos tiempos, agrupados de 5 en 5 segundos, son los siguientes: 3 perforaciones entre 95/99 segundos; 6 entre 100/104; 7 entre 105/109; 11 entre 110/114; 9 entre 115/119; 7 entre 120/124; 3 entre 125/129; 3 entre 130/134; 1 entre 135/139. Hallar la media aritmética, la desviación típica, la asimetría y el apuntamiento.

Solución: Se tiene la siguiente tabla, tomando como promedio arbitrario: $X_a = 122,5$ segundos:

Tiempos	f_i	m_i	d_i	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$	$f_i d_i^3$	$f_i d_i^4$
95 – 99	3	97,5	–5	–15	75	–375	1.875
100 – 104	6	102,5	–4	–24	96	–384	1.536
105 – 109	7	107,5	–3	–21	63	–189	567
110 – 114	11	112,5	–2	–22	44	–88	176
115 – 119	9	117,5	–1	–9	9	–9	9
120 – 124	7	122,5	0	0	0	0	0
125 – 129	3	127,5	1	3	3	3	3
130 – 134	3	132,5	2	6	12	24	48
135 – 139	1	137,5	3	3	9	27	81
Totales	50			–79	311	–991	4.295

Media aritmética: $\overline{X} = 122,5 + \dfrac{5(-79)}{50} = 114,6$ segundos.

Desviación típica: $\sigma = 5\sqrt{\dfrac{311}{50} - \left(\dfrac{-79}{50}\right)^2} = 9,65.$

Asimetría: $a_s = \dfrac{\dfrac{-991}{50} - 3\cdot\dfrac{311}{50}\cdot\dfrac{-79}{50} + 2\left(\dfrac{-79}{50}\right)^2}{\left[\sqrt{\dfrac{311}{50} - \left(\dfrac{-79}{50}\right)^2}\,\right]^3} = 0,0167.$

Apuntamiento: $a_p = \dfrac{\dfrac{4295}{50} - 4\cdot\dfrac{-991}{50}\cdot\dfrac{-79}{50} + 6\cdot\dfrac{311}{50}\left(\dfrac{-79}{50}\right)^2 - 3\left(\dfrac{-79}{50}\right)^4}{\left[\dfrac{311}{50} - \left(\dfrac{-79}{50}\right)^2\right]^2} - 3 = -0,94.$

18- Estudiando los tiempos empleados en palear el escombro obtenido de una pega, se han cronometrado los valores recogidos en las dos primeras columnas del cuadro incluido a continuación, agrupados de 20 en 20 segundos. Calcular la media aritmética, la desviación típica y la asimetría.

Solución: En el cuadro siguiente se ha elegido como promedio arbitrario: $X_a = 480$ segundos:

Tiempos	f_i	m_i	d_i	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$	$f_i d_i^3$
330 – 349	1	340	–7	–7	49	–343
350 – 369	0	360	–6	0	0	0
370 – 389	2	380	–5	–10	50	–500
390 – 409	3	400	–4	–12	48	–576
410 – 429	4	420	–3	–12	36	–432
430 – 449	7	440	–2	–14	28	–392
450 – 469	8	460	–1	–8	8	–64
470 – 489	9	480	0	0	0	0
490 – 509	8	500	1	8	8	64
510 – 529	7	520	2	14	28	392
530 – 549	6	540	3	18	54	972
550 – 569	5	560	4	20	80	1.600
570 – 589	3	580	5	15	75	1.125
590 – 609	2	600	6	12	72	864
610 – 629	1	620	7	7	49	343
Totales	66			31	585	3.053

Media: $\overline{X} = 480 + \frac{20 \cdot 31}{66} = 489,3$ segundos.

Desviación típica: $\sigma = 20\sqrt{\frac{585}{66} - \left(\frac{31}{66}\right)^2} = 58,7.$

Asimetría: $a_s = 1,3.$

19- Estudiando los tiempos empleados en descender la jaula desde la calle hasta la cota de extracción de un pozo, se han cronometrado los valores recogidos en las dos primeras columnas del cuadro incluido más abajo, agrupados de 5 en 5 segundos Calcular la media aritmética, la desviación típica y la asimetría.

Solución: En el cuadro siguiente se ha elegido como promedio arbitrario: $X_a = 182$ segundos:

Tiempos	f_i	m_i	d_i	$d_i f_i$	$d_i f_i^2$	$d_i f_i^3$
160 – 164	1	162	–4	–4	16	–64
165 – 169	2	167	–3	–6	18	–54
170 – 174	10	172	–2	–20	40	–80
175 – 179	36	177	–1	–36	36	–36
180 – 184	40	182	0	0	0	0
185 – 189	20	187	1	20	20	20
190 – 194	10	192	2	20	40	80
195 – 199	2	197	3	6	18	54
Totales	121			–20	188	–80

Media aritmética: $\overline{X} = 182 + \dfrac{5(-20)}{121} = 181,17$ segundos.

Desviación típica: $\sigma = 5\sqrt{\dfrac{188}{121} - \left(\dfrac{-20}{121}\right)^2} = 6.$

Asimetría: $a_s = 0,07.$

20- En la realización de diez barrenos de $2,5\,\mathrm{m}$, de profundidad, la perforadora A ha tardado 385, 264, 347, 501, 544, 442, 413, 561, 527, 618 segundos, y la perforadora B ha tardado 282, 687, 375, 385, 432, 444, 318, 622, 375, 280 segundos. Encontrar si hay una diferencia significativa entre las dos perforadoras.

Solución: Para la perforadora A, se obtienen: $\overline{X_A} = 480$, $\sigma_A = 85,2$. Para la perforadora B: $\overline{X_B} = 420$, $\sigma_B = 136,3$. Luego: $D = 480 - 420 = 60$, $\sigma_D = \sqrt{\dfrac{85,2^2}{10} + \dfrac{136,3^2}{10}} = 50,8$. Como: $D \ngtr 2\sigma_D$, no hay diferencia significativa entre las dos perforadoras.

21- En la realización de unas perforaciones de igual longitud, la perforadora A ha tardado 132, 116, 98, 124, 115, 118, 140, 151, 129, 117, 101, 107, 98, 115 segundos, y la perforadora B ha tardado 96, 100, 84, 120, 112, 120, 115, 117, 105, 97, 99, 111 segundos. Encontrar si hay una diferencia significativa entre las dos perforadoras.

Solución: Para la perforadora A, se obtienen: $n_A = 14$, $\overline{X_A} = 118,6$, $\sigma_A = 15,5$. Para la perforadora B: $n_B = 12$, $\overline{X_B} = 106,3$, $\sigma_B = 11,3$. Luego: $D = 118,6 - 106,3 = 12,3$, $\sigma_D = \sqrt{\dfrac{15,5^2}{14} + \dfrac{11,3^2}{12}} = 5,27$. Como: $D > 2\sigma_D$, pero $< 3\sigma_D$, hay diferencia significativa entre las dos perforadoras, aunque no altamente significativa.

22- Estudiando las presiones del terreno de dos tajos, se han encontrado los siguientes datos de carga máxima en toneladas, indicándose entre paréntesis el número de mampostas con dicha carga máxima:

Tajo A: 28(1), 29(2), 30(4), 31(5), 32(6), 33(12), 34(14), 35(9), 36(3), 37(1), 38(1).

Tajo B: 23(1), 24(2), 25(5), 26(10), 27(11), 28(7), 29(3), 30(2), 31(1), 32(1).

Encontrar si hay una diferencia significativa entre los dos tajos.

Solución: Para el tajo A, se obtienen: $n_A = 58$, $\overline{X_A} = 33$, $\sigma_A = 2,03$. Para el tajo B: $n_B = 43$, $\overline{X_B} = 27$, $\sigma_B = 1,83$. Luego: $D = 58 - 43 = 15$, $\sigma_D = \sqrt{\dfrac{2,03^2}{58} + \dfrac{1,83^2}{43}} = 0,39$. Como: $D > 3\sigma_D$, la diferencia es altamente significativa, por lo que los dos conjuntos de datos no forman parte de un mismo conjunto.

23- Analizando las cargas máximas (kg/cm^2) de dos líneas de 11 y 9 mampostas, colocada la primera el día A, y la segunda el día B, se han obtenido los siguientes resultados:

Día A: 120, 145, 140, 180, 80, 110, 120, 135, 150, 95, 100.

Día B: 90, 70, 120, 50, 100, 80, 115, 75, 110.

Encontrar si hay diferencia significativa entre las cargas máximas correspondientes al día A y al día B.

Solución: Para el día A, se obtienen: $n_A = 11$, $\overline{X_A} = 125$, $\sigma_A = 27{,}3$. Para el día B: $n_B = 9$, $\overline{X_B} = 90$, $\sigma_B = 22$. Luego: $D = 125 - 90 = 35$, $\sigma_D = \sqrt{\dfrac{27{,}3^2}{11} + \dfrac{22^2}{9}} = 11$. Como: $D > 3\sigma_D$, la diferencia es altamente significativa, por lo que la diferencia entre las cargas máximas es un hecho no debido al azar.

24- Se ha realizado una serie de medidas de las cargas (kg/cm^2) soportadas por mampostas metálicas colocadas en un tajo en 16 días diferentes, obteniéndose el cuadro recogido más abajo. Encontrar si las diferencias halladas son significativas.

Solución:

Días →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
	85	40	95	90	70	40	110	55	50	70	85	75	105	20	40	60	
	20	50	90	80	45	80	150	110	90	45	30	40	90	20	60	10	
	70	70	150	90	80	70	65	70	100	100	40	30	60	80	90	80	
	65	100	45	80	100	100	70	70	105	70	40	100	30	40	70	70	
	30	75	125	90	90	85	70	25	120	40	80	70	35	60	65	140	
	85	55	55	65	70	90	55	150	120	50	70	40	35	85	20	50	
	70	50	60	95	50	100	120	65	90	80	120	35	70	100	40	35	
	55	60	90	100	75	70	100	85	115	55	50	50	20	40	60	60	
	70	70	80			75	90	100	125		30	30	80	65	60	20	
						120		130	115		90		50				
											10						
$\sum$	550	570	790	690	580	830	830	860	960	510	645	470	575	510	505	525	10.400
$\overline{X}$	61,1	63,3	87,8	86,2	72,5	83	92,2	86	96	63,7	58,6	52,2	57,5	56,7	56,1	58,3	70,74
$\sum \cdot \overline{X} \cdot 10^3$	33,6	36,1	69,4	59,5	42,1	68,9	76,5	74,0	92,2	32,5	37,8	24,5	33,1	28,9	28,3	30,6	767,8

$N = 147$, $\sum X^2 = 863{,}9 \cdot 10^3$, $S_a^2 = 767{,}8 \cdot 10^3 - 147 \cdot 70{,}74^2 = 32.190{,}3$,
$S_t^2 = 863{,}9 \cdot 10^3 - 147 \cdot 70{,}74^2 = 128.290{,}3$, $S_r^2 = 128.290{,}3 - 32.190{,}3 = 96.100$,
$W_a = \dfrac{32.190{,}3}{16-1} = 2.146$, $W_r = \dfrac{96.100}{147-16} = 733{,}6$, $\dfrac{W_a}{W_r} = 2{,}9$.

En la tabla de F de Fisher para el 5%, publicada por Snedecor, en la columna encabezada por los grados de libertad de S_a^2, que son 15, y en la línea correspondiente a los grados de libertad de S_r^2, que son 131, se obtiene por interpolación un valor aproximado a 1,8. Y en la tabla para el 1%, procediendo de la misma manera, se obtiene aproximadamente 2,3. Al ser $\dfrac{W_a}{W_r} = 2{,}9$, mayor que los dos valores obtenidos en las tablas de F de Fisher, la diferencia es altamente significativa.

25- Las cargas en kg/cm^2, medidas en mampostas colocadas en días diferentes ($D_1, \ldots D_7$) y en posiciones diferentes ($P_1, \ldots P_9$), son las recogidas en el cuadro siguiente. Comprobar si la diferencia de cargas es significativa.

Solución:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	$\sum$	$\overline{X}$	$\sum \cdot \overline{X} \cdot 10^3$
P_1	70	85	75	105	20	40	60	455	65,0	29,6
P_2	45	30	40	90	20	60	10	295	42,1	12,4
P_3	100	40	30	60	80	90	80	480	68,6	32,9
P_4	70	40	100	30	40	70	70	420	60,0	25,2
P_5	40	80	70	35	60	65	140	490	70,0	34,3
P_6	50	70	40	35	85	20	50	350	50,0	17,5
P_7	80	120	35	70	100	40	35	480	68,6	32,9
P_8	55	50	50	20	40	60	60	335	47,9	16,1
P_9	0	30	30	80	65	60	20	285	47,5	$\downarrow$ 13,5
$\sum$	510	545	470	525	510	505	525			214,4
$\overline{X}$	63,7	60,6	52,2	58,3	56,7	56,1	58,3			
$\sum \cdot \overline{X} \cdot 10^3$	32,5	33,0	24,5	30,6	28,9	28,3	30,6	$\rightarrow$ 208,4		

$N = 62$, $\overline{X} = 57,9$, $\sum d^2 = 252.200$, $S_A^2 = 208,4 \cdot 10^3 - 62 \cdot 57,9^2 = 550,6$,
$S_B^2 = 214,4 \cdot 10^3 - 62 \cdot 57,9^2 = 6.550,6$, $S_t^2 = 252.200 - 62 \cdot 57,9^2 = 44.350,6$,
$S_r^2 = 44.350,6 - 550,6 - 6.550,6 = 37.249,4$, $W_A = \dfrac{550,6}{7-1} = 91,8$,
$W_B = \dfrac{6.550,6}{9-1} = 818,8$, $W_r = \dfrac{37.249,4}{62-7-9+1} = 792,5$, $\dfrac{W_A}{W_r} = 0,16$, $\dfrac{W_B}{W_r} = 1,03$.

En las tablas de F de Fisher para 5% y 1%, publicadas por Snedecor, se encuentran para W_r (47 grados de libertad) y W_A (6 grados de libertad), los valores: $3,8$ y $7,3$; y para W_B (8 grados de libertad) y W_r (47 grados de libertad) los valores: $2,1$ y 3 Como $0,16 < 3,8 < 7,3$ no existe diferencia significativa en relación a los días de colocación de las mampostas. Como: $1,03 < 2,1 < 3$, tampoco existe diferencia significativa en relación con las diferentes posiciones de las mampostas.

26- Hallar si existe correlación entre las cargas soportadas al cabo de 24 horas por unas mampostas, y las cargas máximas, según los datos recogidos en el cuadro incluido más abajo.

Solución: Los valores de las cargas soportadas al cabo de 24 horas se distribuyen entre 0 y 149 kg/cm^2; se establecen intervalos de 10 kg/cm^2, y se toma como promedio arbitrario 55 kg/cm^2. Es decir: $I_H = 10$, $\overline{H} = 55$. Los valores correspondientes a las cargas máximas se distribuyen entre 40 y 319 kg/cm^2; se establecen intervalos de 20 kg/cm^2, y se toma como promedio arbitrario 170 kg/cm^2. Es decir: $I_M = 20$, $\overline{M} = 170$. El cuadro de frecuencias es el siguiente:

	40 – 59	60 – 79	80 – 99	100 – 119	120 – 139	140 – 159	160 – 179	180 – 199
0 – 9	3		4	2	2	3		
10 – 19	1			1	6	2	2	3
20 – 29	2	1	2	3	2	4	3	1
30 – 39				3	6	7	6	7
40 – 49				2	3	4	13	3
50 – 59			2	1		4	4	4
60 – 69				1	1	3	1	5
70 – 79					1			2
80 – 89							3	2
90 – 99								1
100 – 109								1
110 – 119							2	
120 – 129								
130 – 139								
140 – 149								
f	6	1	8	13	21	27	34	29
d_M	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
$f \cdot d_M$	–36	–5	–32	–39	–42	–27	0	29
$f \cdot d_M^2$	216	25	128	117	84	27	0	29
$f \cdot d_M \cdot dH$	150	15	104	92	116	50	0	–8

	200 – 219	220 – 239	240 – 259	260 – 279	280 – 299	300 – 319	f	d_H	$f \cdot d_H$	$f \cdot d_H^2$
0 – 9	1						15	–5	–75	375
10 – 19							15	–4	–60	240
20 – 29	1	3					22	–3	–66	198
30 – 39	4	2	2	1			38	–2	–76	152
40 – 49	5	2					32	–1	–32	32
50 – 59	4	4	1		1		25	0	0	0
60 – 69	3	2	1	2	2		21	1	21	21
70 – 79	4	1		2	1	1	12	2	24	48
80 – 89		1	1	1			8	3	24	72
90 – 99	3	2	1			1	8	4	32	128
100 – 109							1	5	5	25
110 – 119				1	1		4	6	24	144
120 – 129							0	7	0	0
130 – 139							0	8	0	0
140 – 149					1	1	2	9	↓ 18	↓ 162
f	25	17	6	7	6	3	203		–161	1.597
d_M	2	3	4	5	6	7				
$f \cdot d_M$	50	51	24	35	36	21	→ 65			
$f \cdot d_M^2$	100	153	96	175	216	147	→ 1.513			
$f \cdot d_M \cdot dH$	2	0	16	65	114	105	→ 821			

Para las cargas máximas, se tiene:

$\overline{X_M} = 170 + \dfrac{20 \cdot 65}{203} = 176{,}4,\ S_M = 20\sqrt{\dfrac{1.513}{203} - \left(\dfrac{65}{203}\right)^2} = 54{,}2.$

Para las cargas al cabo de 24 horas, se tiene:

$\overline{X_H} = 55 + \dfrac{10 \cdot (-161)}{203} = 47{,}1,\ S_H = 10\sqrt{\dfrac{1.597}{203} - \left(\dfrac{-161}{203}\right)^2} = 26{,}9.$

El coeficiente de correlación es: $r = \sqrt{\dfrac{\left(821 - \dfrac{65 \cdot (-161)}{203}\right)^2}{\left(1.597 - \dfrac{161^2}{203}\right)\left(1.513 - \dfrac{65^2}{203}\right)}} = 0{,}59.$

En la tabla de los valores de $z = \arg\tanh r$, se encuentra: $z = \arg\tanh 0{,}59 = 0{,}675$, y como: $2\sigma_z = \dfrac{2}{\sqrt{203-3}} = 0{,}14$, al ser: $z(= 0{,}675) > 2\sigma_z(= 0{,}14)$, se tiene que r es significativamente diferente de cero, por lo que hay correlación entre las cargas máximas y las cargas soportadas al cabo de 24 horas.

27- En la Academia Usunáriz, de San Sebastián, se daban clases de cultura general, de idiomas, de la carrera de Comercio (Peritaje y Profesorado mercantil), de Bachillerato y de preparación para el ingreso en las carreras técnicas. Existen los datos mensuales de sus alumnos desde octubre de 1939 (la Academia había empezado a funcionar unos diez años antes) hasta el cierre de la Academia en 1984. Muchos de los alumnos estudiaban por libre la carrera de Comercio, estudios que compatibilizaban con su trabajo diario, por lo que asistían a la Academia a última hora de la tarde (incluso hasta las diez de la noche). En 1953, la Escuela de Comercio estableció las "permanencias", facilitando a sus alumnos la asistencia a la Escuela a últimas horas de la tarde, con lo que gran parte de éstos dejaron de asistir a las Academias. El impacto de esta situación se fue amortiguando con los años. A partir de los primeros años de la entrada en funcionamiento de la Escuela de Ingenieros Industriales de San Sebastián, la Academia Usunáriz reforzó su dedicación a la enseñanza de estos estudios, pudiéndose decir que a partir de 1965 alcanzó al respecto, un nivel sostenido. Desde 1976, la Academia fue disminuyendo paulatinamente sus clases, hasta su cierre en 1984. Analizar la distribución por meses de la asistencia de los alumnos en cada periodo considerado. Los datos se recogen en el cuadro incluido más abajo.

Solución: Para realizar el análisis indicado, sólo es necesario, dentro de un determinado año, conocer la asistencia mes a mes, de los alumnos, comparándola con el correspondiente promedio anual de alumnos, para lo cual se establece para cada mes, la diferencia porcentual, positiva o negativa, con el promedio anual del año de que se trata (son años escolares, es decir desde octubre del año N, a septiembre del $N+1$). Por ejemplo, si es A el número medio de alumnos de un determinado año, y B el de uno de sus meses, le corresponderá a este mes el valor de $\frac{B-A}{A}\cdot 100$ (la suma de los 12 valores de un año es cero). En el cuadro siguiente se recogen estos valores.

Año	*Oct*	*Nov*	*Dic*	*En*	*Feb*	*Mar*	*Abr*	*May*	*Jun*	*Jul*	*Ag*	*Sep*
39	–13,4	–7,6	1,2	8,6	5,6	10,0	10,0	11,5	–0,2	7,1	–13,4	–19,4
40	–6,3	11,5	11,5	14,5	10,0	11,5	5,6	1,1	–4,8	–18,2	–16,7	–19,7
41	–0,5	10,4	11,9	8,8	10,4	10,4	5,7	–0,5	–17,6	–19,2	–8,3	–11,5
42	–6,1	17,8	5,8	–1,0	9,2	12,7	7,5	12,7	–21,5	–12,9	–12,9	–11,3
43	–10,5	–6,1	–0,4	–6,1	1,1	8,3	6,9	9,7	–7,6	2,5	–0,4	2,6
44	–5,7	7,4	3,5	3,5	7,4	11,4	14,0	11,4	–24,0	–17,6	–0,4	–10,9
45	–1,7	2,2	3,4	8,6	6,0	7,3	7,3	15,1	–1,7	–19,8	–8,2	–18,5
46	–2,3	3,4	1,1	–2,3	–2,3	2,3	–1,1	4,6	–6,9	3,4	5,7	–5,6
47	–20,7	1,1	1,1	4,3	3,3	9,8	5,4	6,5	1,1	0	–4,3	–7,6
48	–4,4	4,2	3,0	1,7	4,2	4,2	6,6	5,4	–3,2	–6,8	–4,4	–10,5
49	–15,4	0,1	4,9	7,2	14,4	8,4	12,0	12,0	–2,3	–15,4	–11,8	–14,1
50	–11,8	8,8	9,9	6,8	17,9	8,8	5,3	3,1	–13,0	–9,5	–13,0	–23,3
51	–0,3	11,0	11,0	9,8	11,0	14,8	12,3	12,3	–19,2	–20,5	–23,0	–19,2
52	–2,8	7,3	0,6	7,3	8,9	3,9	5,6	–4,5	–11,2	–6,1	3,9	–12,9
53	–2,1	–7,6	–3,9	1,5	5,1	–5,7	–5,7	–9,4	–11,1	19,6	19,6	–0,3
54	–18,9	–3,5	–3,5	3,5	3,5	9,1	4,9	4,9	–3,5	–0,7	–2,1	6,3
55	–16,5	–6,8	–5,2	–8,4	4,4	–0,4	1,2	–2,0	–8,4	10,8	14,1	17,2
56	–22,2	–10,7	–10,7	–9,2	–4,9	–3,5	–3,5	–2,0	0,8	16,7	23,9	25,3
57	–6,9	–2,5	–4,0	0,4	4,7	3,3	1,8	0,4	–1,1	3,3	–1,1	1,7
58	–17,7	–3,7	–6,5	–5,1	3,3	6,0	14,4	8,8	4,7	3,3	–0,9	–6,6
59	–2,7	13,5	–5,2	8,5	6,0	6,0	–0,2	3,5	–13,9	–6,4	–2,7	–6,4

Año	*Oct*	*Nov*	*Dic*	*En*	*Feb*	*Mar*	*Abr*	*May*	*Jun*	*Jul*	*Ag*	*Sep*
60	–9,4	12,0	9,6	4,9	6,1	6,1	8,4	8,4	2,5	–15,4	–9,4	23,8
61	–13,6	1,5	2,7	7,7	11,5	5,2	–1,0	–1,0	–3,5	–8,7	0,2	–1,0
62	–8,1	–6,7	–3,9	4,4	–1,2	–2,6	5,8	5,8	5,8	5,8	1,6	–6,7
63	–11,0	1,5	2,9	4,3	11,2	0,1	11,2	14,0	–5,4	–5,4	–15,2	–8,2
64	–27,9	0	–3,3	–3,3	9,8	14,8	8,2	19,7	13,1	–6,6	–4,9	–19,6
65	–29,5	1,4	–5,4	–2,2	4,9	27,2	8,3	13,5	–2,0	3,1	–0,3	–14,0
66	–17,4	10,1	10,1	–8,3	–0,9	–2,8	10,1	–2,8	6,4	8,3	–6,4	–6,4
67	1,7	7,4	–2,0	7,4	9,3	11,1	11,1	3,6	–13,3	–13,3	–9,6	–13,4
68	1,4	11,0	5,3	9,1	14,8	3,3	1,4	–4,3	1,4	–6,2	–15,8	–21,4
69	–14,6	–4,0	–7,6	4,9	17,3	10,2	19,1	6,7	–5,8	–4,0	–11,1	–11,1
70	3,9	16,8	–3,6	2,0	5,7	13,1	3,9	–1,7	0,2	3,9	–12,8	–31,4
71	13,6	27,5	13,6	16,4	–0,2	–14,1	–19,6	–11,3	–30,8	8,1	–0,2	–3,0
72	–12,7	11,5	11,5	21,2	23,6	6,7	1,8	–3,0	–17,5	–7,9	–15,2	–20,0
73	–40,3	–12,3	–5,3	40,4	43,9	15,8	8,8	–1,8	–8,8	–15,8	–8,8	–15,8
74	–4,0	–0,8	5,6	12,0	21,6	15,2	34,4	24,8	12,0	–32,8	–74,4	–13,6
75	12,0	15,4	8,4	–16,0	8,4	15,4	5,0	15,4	12,0	–33,5	–37,0	–5,5
76	16,1	33,4	3,2	16,1	24,7	24,7	16,1	3,2	–14,0	–18,2	–48,3	–57,0
77	27,9	18,0	–1,6	–1,6	18,0	8,2	8,2	8,2	–21,3	–11,5	–11,5	–41,0
78	–42,3	–19,2	–7,8	3,8	–19,2	–19,2	15,4	3,8	3,8	38,5	61,5	–19,1
79	15,7	30,1	30,1	15,7	15,7	15,7	15,7	1,2	–71,1	1,2	1,2	–71,2
80	–38,5	–7,7	23,1	–38,5	–7,7	23,1	23,1	–7,7	–38,5	23,1	53,9	–7,7
81	0	0	50,0	0	0	100	50,0	0	0	–100	–100	0
82	12,5	50,0	50,0	50,0	12,5	12,5	12,5	12,5	–25,0	12,5	–100	–100

En el cuadro siguiente se agrupan los datos anteriores según los distintos periodos considerados, habiéndose añadido una columna con la correspondiente desviación típica (σ).

Años	*Oct*	*Nov*	*Dic*	*En*	*Feb*	*Mar*	*Abr*	*May*	*Jun*	*Jul*	*Ag*	*Sep*	σ
39 – 52	7,3	5,1	4,9	5,8	7,7	8,8	7,4	7,2	–9,4	–9,5	–7,7	–13,0	8,1
53 – 57	–13,3	–6,2	–5,5	–2,4	2,6	0,6	–0,3	–1,6	–4,7	9,9	10,9	10,0	7,1
58 – 64	0,2	5,1	2,9	3,2	2,4	2,6	4,1	5,9	2,9	–8,5	–9,0	–11,8	5,8
53 – 64	–13,1	–1,1	–2,6	0,8	5,0	3,2	3,8	4,3	–1,8	1,4	1,9	–1,8	4,7
39 – 64	–10,0	2,2	1,5	3,5	6,4	6,2	5,7	5,9	–5,9	–4,5	–3,2	–7,8	5,7
65 – 75	–7,8	7,6	2,8	7,4	13,5	9,2	7,7	3,6	–4,2	–8,2	–17.5	–14,1	9,6
39 – 75	–9,3	3,8	1,9	4,7	8,5	7,1	6,3	5,2	–5,4	–5,6	–7,5	–9,7	6,1
76 – 82	–1,2	14,9	21,1	6,5	6,3	23,6	20,1	3,0	–23,7	–7,9	–20,4	–42,3	17,4
39 – 82	–8,0	5,6	5,0	5,0	8,1	9,7	8,5	4,9	–8,3	–6,0	–9,6	–14,9	8,3

Para 1939-1952, el periodo veraniego que incluye las épocas de exámenes de junio y septiembre, es el de menor asistencia, siendo mínima la de septiembre. En los cinco años 1953-57, tras la implantación de las "permanencias", la situación cambia importantemente: los meses de verano después de los exámenes de junio, son los de mayor asistencia pues en ellos no funcionan las "permanencias" y los alumnos de comercio vuelven a las academias para preparar los exámenes de septiembre, tras unos exámenes de junio no muy positivos. Terminados estos exámenes, la asistencia disminuye. En los años 1958-1964, se vuelve a una situación parecida a la de los años 1939-1952, aunque con una menor desviación típica ($5,8$ frente a $8,1$), debido a que la asistencia de los nuevos alumnos, especialmente los de carreras técnicas, es más constante a lo largo del año. En los años 1965-1975, aumenta la desviación típica, reflejo de la aún mayor disminución de asistencia en los cinco meses de junio a octubre, lo que parece indicar que el nivel de exigencia de los exámenes de junio ha disminuido.(repercusión de los hechos políticos de 1968), amén de la desaparición de la carrera de comercio, absorbida por otros estudios. En los años 1976-1982, la desviación típica casi triplica a la del conjunto 1939-1975 ($17,4$ frente a $6,1$), lo que junto con las muy importantes caídas de asistencia en verano ($-42,3$ en septiembre), reflejan el paulatino cierre de la Academia. En fin, en el conjunto de los 44 años de 1939 a 1982, destaca ante todo, la caída de asistencia del periodo junio-octubre, con la mayor incidencia en septiembre, siendo marzo el mejor mes de asistencia. Ambas situaciones se producían ya en el conjunto inicial de 14 años desde 1939 a 1952, siendo del mismo nivel las desviaciones típicas de ambos conjuntos ($8,3$ y $8,1$).